

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"**Blatt 5**

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 30. Mai 2014)

Aufgabe 17) Ableitungen I (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen von folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
- (b) $f(x) = \ln(x) \ln(\ln(x)) - \ln(x)$
- (c) $f(x) = x^x$
- (d) $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$

Aufgabe 18) Ableitungen II (6 Punkte)

Berechnen Sie folgende Ableitungen

- (a) $\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{\cosh^2(\omega t(x)) - 1}}{\cosh(\omega t(x))} \right)$
- (b) $\frac{d^2}{da^2} f(g(a))$
- (c) $\frac{d^2}{dx^2} \left(\exp[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2] - A \right)$

Aufgabe 19) Ableitungen III / Grenzwerte (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe des Satzes von l'Hôpital.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a^x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \exp(2\pi - x)}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a}$

Aufgabe 20) Partielle Ableitungen und totales Differential (6 Punkte)

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ und das totale Differential der folgenden Funktionen

- (a) $f(x, y) = (x + y) \exp(x)$
- (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (c) $f(x, y) = \exp xy^2$

Aufgabe 21) Partielle Ableitungen II (8 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.

- (a) Schauen Sie sich auf der Wolfram Alpha Seite den dreidimensionalen Verlauf der Funktion an und skizzieren Sie das Bild auf Ihr Aufgabenblatt.

(Der Befehl lautet

`Plot3D[x y(x^2-y^2)/(x^2+y^2)]`)

- (b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.
- (c) Berechnen Sie nun speziell den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ und berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_{yx} = \frac{\partial f_x(0, y)}{\partial y}|_{y=0}$ und $f_{xy} = \frac{\partial f_y(x, 0)}{\partial x}|_{x=0}$ an diesem Punkt.
- (d) Berechnen Sie für allgemeine (x, y) $f_{yx} = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$ und $f_{xy} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x}$. Zeigen Sie $f_{xy} = f_{yx}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Was passiert bei $(x, y) = (0, 0)$?
Schauen Sie sich auf der Wolfram Alpha Seite den dreidimensionalen Verlauf der Funktion $f_{xy}(x, y)$ an.