

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 6

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 6. Juni 2014)

Aufgabe 22) Partielle Ableitungen (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Cobb-Douglas Produktionsfunktion $y(p_1, p_2) = 8p_1^{0.25}p_2^{0.75}$ bezüglich der Parameter p_1 und p_2 .
- (b) Zeigen Sie: Für $q(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ gilt $q(x_1, x_2) = \frac{\partial q}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2}x_2$
- (c) Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} \sin(ct - x + x_0)$.
- (d) Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial v} m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Aufgabe 23) Totales Differential (4 Punkte)

Eine Funktion $z(x, y)$ sei bestimmt durch die Gleichung $yz - \ln(z) = x + y$. Bestimmen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ mit Hilfe des totalen Differentials.

Aufgabe 24) Ideales Gas (4 Punkte)

Die ideale Gasgleichung $pV = RT$ beschreibt, wie in idealen Gasen die Größen Druck (p), Temperatur (T) und Volumen (V) miteinander verknüpft sind. R ist die Gaskonstante. Mit Hilfe der idealen Gasgleichung kann jede Variable V, p, T als Funktion der beiden anderen dargestellt werden, z.B. $V(p, T) = RT/p$.

Zeigen Sie $\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial V} = -1$.

Aufgabe 25) Extremwerte I (8 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 + xy + y^4$ auf Extremwerte.
- (b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x + y$ mit der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 20$.

Aufgabe 26) Extremwerte II (4 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders, den man in das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ einschreiben kann.

Aufgabe 27) Raumkurven (4 Punkte)

Betrachten Sie Raumkurven $\vec{r}(s)$ in natürlicher Parametrisierung s (d.h. ds ist das Bogenlängenelement). Beweisen Sie die dritte Frenetsche Formel $\frac{d\vec{n}}{ds} = \tau\vec{b} - \kappa\vec{t}$.

Hier ist $\vec{t}$ der Tangentenvektor, $\vec{n}$ der Normalenvektor, $\vec{b}$ der Binormalenvektor, τ die Torsion und κ die Krümmung (siehe Vorlesung oder Wikipedia: "Frenetsche Formeln").

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{n} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$.