Institut für Physik SS 2014

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 7

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 13. Juni 2014)

Aufgabe 28) Konvergenzradius (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(a) $f(x) = \sum \frac{1}{2^n n} x^n$

(b) $f(x) = \sum n^3 x^n$

(c) $f(x) = \sum \sqrt{1+9^n} x^n$

(d) $f(x) = \sum n^n x^n$

Aufgabe 29) Taylor-Reihe I (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $f(x) = x \exp(x)$ die ersten drei Terme der Taylorreihe um $x = 0$ von

a) $f(x)$

b) $1/(1 + f(x))$

c) $f(f(x))$

d) $f^{-1}(x)$ (die Umkehrfunktion)

Aufgabe 30) Taylor-Reihe II (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihe bis zur dritten Ordnung um $x = 0$ von

a) $f(x) = \tan(x)$

b) $f(x) = \exp(x)\ \sin(x)$

c) $f(x) = \exp(\sin(x))$

d) $\arcsin(x)$

Aufgabe 31) Taylor-Reihe III (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \exp(-x^2)$ um $x = 0$.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \exp(x)$ um $x = 10$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x = \pi$

d) Bestimmen Sie die Taylorreihe um $(1, 1)$ von $f(x, y) = \exp(x + xy)$.

Aufgabe 32) Anwendung der Taylor-Reihe (2 Punkte)

Benutzen Sie die Taylorentwicklung, um näherungsweise die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-2x} = x$ zu lösen.

Aufgabe 33) Grenzwerte (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + \cos(x) - 1}{x^4}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x)^{1/3}}{1-(1-x)^{1/2}}$

c) $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x^x - 1}{x\ln(x)}$

d) $\lim_{x\to 0, x>0} x^{\sin(x)}$

Aufgabe 34) Differentialgleichung (4 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $(1-x^2)f''(x) + 2f(x) = 0$. Machen Sie einen Potenzreihenansatz $f(x) = \sum a_k x^k$. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten einer Rekursionsformel der Form $a_{k+2} = \frac{k+p}{k+q} a_k$ genügen und bestimmen Sie p und q.

Betrachten Sie dann konkret den Fall $f(0) = 0, f'(0) = 1$ und bestimmen Sie dafür alle a_k.

Aufgabe 35) Taylor-Reihe mit Differentialoperator (2 Punkte)

Zeigen Sie: $\mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f(x)\Big|_{x=x_0} = f(x_0 + a)$

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Exponentialfunktion über ihre Potenzreihe definiert wird: $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.