

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"**Blatt 9**

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 27. Juni 2014)

Aufgabe 41) Polarkoordinaten (6 Punkte)

- Berechnen Sie das Volumen des Metalls eines 1m langen Rohres mit Innenradius $r_1 = 3\text{cm}$ und Außenradius $r_2 = 4\text{cm}$.
- Berechnen Sie das Volumen des Metalls einer Hohlkugel mit Innenradius $r_1 = 3\text{cm}$ und Außenradius $r_2 = 4\text{cm}$.

Aufgabe 42) Gewicht der Atmosphäre (8 Punkte)

Nach der barometrische Höhenformel folgt die Dichte der Luft $\rho(h)$ bei der Höhe h über dem Meeresboden der Gleichung

$$\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_s)$$

mit $\rho_0 = 1.2041 \text{ kg/m}^3$ und der Skalenhöhe $h_s \approx 8.4 \text{ km}$.

- Verwenden Sie die barometrische Höhenformel, um das Gewicht der Atmosphäre abzuschätzen. Benutzen Sie dazu Kugelkoordinaten. Der Radius der Erde ist $R = 6.378 \text{ km}$.
- Die Erde habe eine mittlere Dichte von $\rho = 5.515 \text{ g/cm}^3$. Berechnen Sie den Anteil der Atmosphäre an der Gesamtmasse der Erde.

Aufgabe 43) Trägheitsmoment (8 Punkte)

Das sogenannte Trägheitsmoment eines Körpers der Dichte ρ um die z -Achse ist gegeben durch die Gleichung

$$\theta = \rho \int \int dV(x^2 + y^2),$$

wobei natürlich nur über das Volumen des Körpers integriert wird.

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders der Länge L und des Radius R , der in z -Richtung orientiert ist.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel des Radius R .

Aufgabe 44) Jacobi-Determinante (6 Punkte)

Parabolische Koordinaten sind definiert durch die Koordinatentransformation $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ und $y = uv$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante zu dieser Transformation.
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung von parabolischen Koordinaten das Integral $\int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^2+v^2}{1+(u^2-v^2)^2} e^{-2uv}$

Zusatzaufgabe: n-dimensionales Simplex (8 Bonuspunkte)

Ein n -dimensionales Simplex ist definiert über $x_k \geq 0 \forall k$ und $\sum_{k=1}^n x_k \leq 1$.

Bestimmen Sie das Volumen des n -dimensionalen Simplex für allgemeine $n \in \mathbb{N}$.