

# Mathematische Rechenmethoden

---

Version vom SS 2014<sup>\*</sup>

Universität Mainz

Fachbereich 08

Theorie der kondensierten Materie

Prof. Dr. Friederike Schmid<sup>†</sup>

## Mathematische Rechenmethoden für Physiker

### Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis    **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

---

<sup>\*</sup>Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

<sup>†</sup>03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

## Literatur

**K. Hefft** Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/> )

**W. Nolting** Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

**S. Großmann** Mathematischer Einführungskurs für die Physik

**K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz** Mathematik für Physiker 1

**C. Lang, N. Pucker** Mathematische Methoden in der Physik

**M. L. Boas** Mathematical Methods in the Physical Sciences

**WolframAlpha** <http://www.wolframalpha.com/examples>

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                         |          |
|----------|-----------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Grundlegendes</b>                    | <b>1</b> |
| 1.1      | Die Sprache der Physik                  | 1        |
| 1.1.1    | Zeichen für physikalische Größen        | 2        |
| 1.1.2    | Zeichen für Verknüpfungen               | 3        |
| 1.1.3    | Einheiten                               | 4        |
| 1.2      | Zahlen                                  | 6        |
| 1.2.1    | Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper   | 6        |
| 1.2.2    | Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$          | 7        |
| 1.2.3    | Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$               | 8        |
| 1.2.4    | Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$           | 9        |
| 1.2.5    | Reelle Zahlen $\mathbb{R}$              | 9        |
| 1.2.6    | Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$            | 10       |
| 1.2.7    | Zusammenfassung                         | 11       |
| 1.3      | Reelle Funktionen                       | 12       |
| 1.3.1    | Elementare Funktionen                   | 12       |
| 1.3.1.1  | Polynome und rationale Funktionen       | 12       |
| 1.3.1.2  | Algebraische Funktionen                 | 13       |
| 1.3.1.3  | Exponentialfunktion                     | 14       |
| 1.3.1.4  | Logarithmus                             | 15       |
| 1.3.1.5  | Trigonometrische Funktionen             | 16       |
| 1.3.1.6  | Hyperbolische Funktionen                | 16       |
| 1.3.1.7  | Funktionen mit Ecken und Sprüngen       | 17       |
| 1.3.1.8  | Weitere wichtige abgeleitete Funktionen | 17       |
| 1.3.2    | Eigenschaften von Funktionen            | 18       |
| 1.3.2.1  | Spiegelsymmetrie                        | 18       |
| 1.3.2.2  | Beschränktheit                          | 18       |
| 1.3.2.3  | Monotonie                               | 18       |
| 1.3.2.4  | Eindeindeutigkeit                       | 18       |
| 1.3.2.5  | Stetigkeit                              | 19       |
| 1.3.2.6  | Grenzwerte                              | 19       |

|          |                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4      | Komplexe Zahlen . . . . .                                 | 21        |
| 1.4.1    | Die imaginäre Einheit . . . . .                           | 21        |
| 1.4.2    | Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .                    | 22        |
| 1.4.2.1  | Rechnen mit der imaginären Einheit . . . . .              | 22        |
| 1.4.2.2  | Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen: . . . . . | 22        |
| 1.4.2.3  | Euler-Formel . . . . .                                    | 23        |
| 1.4.2.4  | Rechenregeln . . . . .                                    | 23        |
| 1.4.2.5  | Spezielle Transformationen . . . . .                      | 24        |
| 1.4.3    | Funktionen einer komplexen Variablen . . . . .            | 24        |
| 1.4.3.1  | Potenzen . . . . .                                        | 25        |
| 1.4.3.2  | Wurzeln . . . . .                                         | 25        |
| 1.4.3.3  | Exponentialfunktion (natürlich) . . . . .                 | 26        |
| 1.4.3.4  | Logarithmus (natürlich) . . . . .                         | 26        |
| 1.4.3.5  | Trigonometrische Funktionen . . . . .                     | 27        |
| <b>2</b> | <b>Vektorrechnung</b>                                     | <b>29</b> |
| 2.1      | Vektoren . . . . .                                        | 29        |
| 2.1.1    | Definition bzw. Begriffsklärung . . . . .                 | 29        |
| 2.1.2    | Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung . . . . .   | 30        |
| 2.1.3    | Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume . . . . .   | 31        |
| 2.2      | Skalarprodukt (inneres Produkt) . . . . .                 | 33        |
| 2.2.1    | Definition und mathematische Struktur . . . . .           | 33        |
| 2.2.2    | Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol . . . . .     | 33        |
| 2.3      | Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) . . . . .   | 35        |
| 2.3.1    | Definition und mathematische Struktur . . . . .           | 35        |
| 2.3.2    | Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol . . . . .   | 35        |
| 2.3.3    | Höhere Vektorprodukte . . . . .                           | 36        |
| <b>3</b> | <b>Infinitesimalrechnung</b>                              | <b>39</b> |
| 3.1      | Folgen und Reihen . . . . .                               | 39        |
| 3.1.1    | Folgen . . . . .                                          | 39        |
| 3.1.2    | Reihen . . . . .                                          | 40        |
| 3.2      | Differentialrechnung . . . . .                            | 42        |
| 3.2.1    | Die Ableitung . . . . .                                   | 42        |
| 3.2.2    | Elementare Beispiele . . . . .                            | 44        |
| 3.2.3    | Differentiationsregeln . . . . .                          | 46        |
| 3.2.4    | Anwendungen der Differentiationsregeln . . . . .          | 47        |
| 3.2.5    | Tabelle wichtiger Ableitungen . . . . .                   | 48        |
| 3.2.6    | Vektorwertige Funktionen . . . . .                        | 49        |

|          |                                                                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.6.1  | Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen . . . . .                                         | 49        |
| 3.2.6.2  | Speziell Raumkurven . . . . .                                                                         | 49        |
| 3.2.7    | Extremwertaufgaben . . . . .                                                                          | 51        |
| 3.3      | Taylor-Entwicklung . . . . .                                                                          | 55        |
| 3.3.1    | Kurzer Abriss über Potenzreihen . . . . .                                                             | 55        |
| 3.3.2    | Konstruktion der Taylor-Reihe . . . . .                                                               | 57        |
| 3.3.3    | Anwendungen . . . . .                                                                                 | 59        |
| 3.4      | Integralrechnung . . . . .                                                                            | 62        |
| 3.4.1    | Das Riemannsche Integral . . . . .                                                                    | 62        |
| 3.4.2    | Hauptsatz und Stammfunktion . . . . .                                                                 | 63        |
| 3.4.3    | Integrationsmethoden . . . . .                                                                        | 65        |
| 3.4.4    | Uneigentliche Integrale . . . . .                                                                     | 68        |
| 3.4.5    | Mehrfachintegrale . . . . .                                                                           | 70        |
| 3.4.5.1  | Beispiele . . . . .                                                                                   | 70        |
| 3.4.5.2  | Polarkoordinaten . . . . .                                                                            | 71        |
| 3.4.5.3  | Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante . . . . .                                   | 73        |
| <b>4</b> | <b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>                                                            | <b>77</b> |
| 4.1      | Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .                                              | 78        |
| 4.1.1    | Separable Differentialgleichungen . . . . .                                                           | 78        |
| 4.1.2    | Lineare Differentialgleichungen . . . . .                                                             | 79        |
| 4.2      | Systeme von Differentialgleichungen . . . . .                                                         | 81        |
| 4.2.1    | Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . . . | 81        |
| 4.2.2    | Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .                                                       | 81        |
| 4.2.3    | Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .                      | 82        |
| 4.2.4    | Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . . .                             | 85        |
| <b>5</b> | <b>Vektoranalysis</b>                                                                                 | <b>87</b> |
| 5.1      | Vorbemerkungen und Erinnerung . . . . .                                                               | 87        |
| 5.1.1    | Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren . . . . .                                                | 87        |
| 5.1.2    | Felder . . . . .                                                                                      | 88        |
| 5.1.3    | Kurvenintegral bzw. Linienintegral . . . . .                                                          | 88        |
| 5.1.4    | Flächenintegral . . . . .                                                                             | 89        |
| 5.2      | Der Nabla-Operator . . . . .                                                                          | 90        |
| 5.2.1    | Skalare Felder und Gradient . . . . .                                                                 | 90        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2.2    | Vektorfelder: Divergenz und Rotation . . . . .                                | 91         |
| 5.2.3    | Der Laplace-Operator . . . . .                                                | 91         |
| 5.2.4    | Wichtige Zusammenhänge . . . . .                                              | 92         |
| 5.3      | Krummlinige Koordinaten . . . . .                                             | 92         |
| 5.3.1    | Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme . . . . .                       | 92         |
| 5.3.2    | Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen . . . . .                     | 94         |
| 5.3.3    | Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme . . . . . | 96         |
| 5.4      | Integralsätze . . . . .                                                       | 97         |
| 5.4.1    | der Gaußsche Integralsatz . . . . .                                           | 97         |
| 5.4.1.1  | Der Satz . . . . .                                                            | 97         |
| 5.4.1.2  | Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz . . . . .                          | 98         |
| 5.4.2    | Der Greensche Satz in der Ebene . . . . .                                     | 99         |
| 5.4.3    | Der Integralsatz von Stokes . . . . .                                         | 100        |
| <b>6</b> | <b>Die Diracsche Delta-Funktion</b>                                           | <b>103</b> |
| 6.1      | Motivation und Einführung . . . . .                                           | 103        |
| 6.2      | Definition . . . . .                                                          | 104        |
| 6.3      | Darstellungen der Delta-Funktion . . . . .                                    | 104        |
| 6.3.1    | Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen . . . . .                        | 104        |
| 6.3.2    | Darstellung als Integral . . . . .                                            | 106        |
| 6.4      | Rechenregeln mit der Delta-Funktion . . . . .                                 | 106        |
| 6.5      | Verallgemeinerung für höhere ( $d$ ) Dimensionen . . . . .                    | 107        |
| <b>7</b> | <b>Die Fouriertransformation</b>                                              | <b>109</b> |
| 7.1      | Diskrete Fouriertransformation . . . . .                                      | 110        |
| 7.1.1    | Definition . . . . .                                                          | 110        |
| 7.1.2    | Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation . . . . .                   | 111        |
| 7.2      | Fourierintegral . . . . .                                                     | 112        |
| 7.2.1    | Definition . . . . .                                                          | 112        |
| 7.2.2    | Eigenschaften und Rechenregeln . . . . .                                      | 113        |
| 7.2.3    | Paare von Fourier-Transformierten . . . . .                                   | 114        |
| 7.2.4    | Anwendungsbeispiele . . . . .                                                 | 116        |
| 7.2.4.1  | Wellengleichung . . . . .                                                     | 116        |
| 7.2.4.2  | Diffusionsgleichung . . . . .                                                 | 116        |
| 7.2.4.3  | Greensche Funktion . . . . .                                                  | 116        |
| 7.3      | Fourierreihe . . . . .                                                        | 118        |
| 7.3.1    | Definition . . . . .                                                          | 118        |
| 7.3.2    | Darstellung in trigonometrischen Funktionen . . . . .                         | 119        |

|          |                                                                   |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>8</b> | <b>Partielle Differentialgleichungen</b>                          | <b>121</b> |
| 8.1      | Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik . . . . .  | 121        |
| 8.1.1    | Elliptischer Typ . . . . .                                        | 122        |
| 8.1.2    | Hyperbolischer Typ . . . . .                                      | 122        |
| 8.1.3    | Parabolischer Typ . . . . .                                       | 123        |
| 8.2      | Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen . . . . .  | 123        |
| 8.2.1    | Laplace-Gleichung . . . . .                                       | 124        |
| 8.2.1.1  | Numerische Lösung . . . . .                                       | 124        |
| 8.2.1.2  | Lösung mit Separation der Variablen . . . . .                     | 124        |
| 8.2.2    | Wellengleichung . . . . .                                         | 126        |
| 8.2.2.1  | Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation . . . . .      | 126        |
| 8.2.2.2  | Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz . . . . . | 127        |
| 8.2.3    | Diffusionsgleichung . . . . .                                     | 128        |
| 8.2.3.1  | Separationsansatz und asymptotisches Verhalten . . . . .          | 128        |
| 8.2.3.2  | Propagatordarstellung . . . . .                                   | 129        |
| 8.2.4    | Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion . . . . .              | 129        |
| <b>9</b> | <b>Orthogonale Funktionen</b>                                     | <b>131</b> |
| 9.1      | Allgemeiner Rahmen . . . . .                                      | 131        |
| 9.1.1    | Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme . . . . .              | 131        |
| 9.1.2    | Das Sturm-Liouville-Problem . . . . .                             | 132        |
| 9.1.3    | Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen . . . . .               | 133        |
| 9.2      | Legendre-Polynome . . . . .                                       | 134        |
| 9.2.1    | Die einfache Legendresche Differentialgleichung . . . . .         | 134        |
| 9.2.2    | Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome . . . . .            | 135        |
| 9.2.3    | Zugeordnete Legendre-Polynome . . . . .                           | 136        |
| 9.2.4    | Kugelflächenfunktionen . . . . .                                  | 137        |
| 9.3      | Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .                    | 139        |
| <b>A</b> | <b>Anhang: Matrizen</b>                                           | <b>141</b> |
| A.1      | Beispiele von Matrizen . . . . .                                  | 141        |
| A.2      | Elementare Begriffe . . . . .                                     | 143        |
| A.3      | Rechnen mit Matrizen . . . . .                                    | 143        |
| A.4      | Determinanten . . . . .                                           | 145        |
| A.5      | Drehungen und Drehmatrizen . . . . .                              | 148        |
| A.6      | Das Eigenwertproblem . . . . .                                    | 149        |
| A.7      | Funktionen von Matrizen . . . . .                                 | 151        |

|          |                                                      |            |
|----------|------------------------------------------------------|------------|
| <b>B</b> | <b>Anhang: Analytische Funktionen</b>                | <b>153</b> |
| B.1      | Definitionen . . . . .                               | 153        |
| B.2      | Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen . . . . . | 154        |
| B.3      | Integralsätze . . . . .                              | 155        |
| B.4      | Taylor-Reihe und Laurent-Reihe . . . . .             | 156        |



# Anhang A

## Anhang: Matrizen

### A.1 Beispiele von Matrizen

Matrizen: Neben Vektoren weitere nützliche Konstrukte, mit denen sich Sachverhalte kurz und präzise ausdrücken lassen. Bedeutung unter anderem für

- Lineare Gleichungssysteme
- Beschreibung von Drehungen im Raum
- Darstellung bestimmter physikalischer Größen

Das soll im Folgenden kurz illustriert werden.

#### Lineare Gleichungssysteme

Beispiel: 
$$\begin{array}{rrcr} 3x & + & 7y & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & y & & & = & 1 \end{array} :$$

Charakterisiert durch "Koeffizientenmatrix"  $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

und "Spaltenvektor"  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Eigenschaften des Gleichungssystems werden im Wesentlichen von der Koeffizientenmatrix bestimmt.

"Matrix" hier: Zahlenschema aus  $m \times n$  Zahlen  $a_{ij}$  ( $m$  Zeilen,  $n$  Spalten)

Darstellung des Gleichungssystems in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Drehungen

Gegeben physikalischer Vektor  $\vec{a}$ , zwei rechtwinklige Koordinatensysteme  $\Sigma, \Sigma'$  mit Basisvektoren  $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e}'_i\}$  (Einheitsvektoren entlang Achsen  $i$ ).

Darstellung von  $\vec{a}$  im Koordinatensystem  $\Sigma$ :  $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$  mit  $a_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)$ .

Darstellung von  $\vec{a}$  im Koordinatensystem  $\Sigma'$ :  $\vec{a} = \sum_i a'_i \vec{e}'_i$  mit  $a'_i = (\vec{a}' \cdot \vec{e}'_i)$ .

$\Rightarrow$  Einfache Regel für die Umrechnung von Koordinaten  $\{a_i\} \rightarrow \{a'_i\}$ :

$$a'_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}'_i) = \left( \sum_j a_j \vec{e}_j \right) \cdot \vec{e}'_i = \sum_j (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j) a_j =: \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j \quad (\text{A.1})$$

Definiert Drehmatrix  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{ij})$  mit  $\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$ .

Dann folgt  $a'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j$  bzw. in Matrixschreibweise:  $a' = \mathcal{D}a$ .

Dies gilt für alle physikalischen Vektoren  $\vec{a}$ . Drehung des Koordinatensystems wird durch das Zahlenfeld  $\mathcal{D}$  vollständig bestimmt.

Konkret z.B. Ebene:  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung: Allgemeine affine Koordinatentransformation zwischen Koordinatensystemen, die nicht unbedingt rechtwinklig sind: Beschrieben durch allgemeine invertierbare  $3 \times 3$ -Matrix.

**Bemerkung:** Mit der Einführung der Drehmatrizen wird die Konkretisierung des Begriffs **”physikalischer Vektor”** möglich: Ein physikalischer Vektor ist eine Größe, charakterisiert durch drei Zahlen  $\{v_i\}$  (im dreidimensionalen Raum – zwei Zahlen in der Ebene), die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{v_i\} \rightarrow \{v'_i\} \text{ mit } v'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} v_j.$$

## Physikalische Tensoren

Beispiel: Trägheitsmoment und Trägheitstensor

**Trägheitsmoment  $\theta$**  Verknüpft Drehimpuls mit Winkelgeschwindigkeit  
Z.B. symmetrischer Kreisel, der sich um Symmetrieachse dreht. Symmetrieachse sei die  $z$ -Achse.

Winkelgeschwindigkeit:  $\omega = d\phi/dt$ .

Drehimpuls: Vektor  $\vec{L}$  mit Betrag  $L = \theta\omega$  und Richtung  $z$

$\theta$  ist das Drehmoment und charakterisiert den Kreisel

$$(\text{Konkret: } \theta = \int d^3r \rho(\vec{r})(x^2 + y^2))$$

Bedeutung des Drehimpulses: Physikalische *Erhaltungsgröße*.

## Verallgemeinerung: Trägheitstensor **I**

Frage: Beliebige Drehachse? Asymmetrischer Kreisel?

$\rightarrow$  Drehimpuls nicht unbedingt parallel zur Drehachse.

Aber: Immer noch linearer Zusammenhang.

Führe vektorielle Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ein.

Betrag:  $\omega$ , Richtung: Drehachse.

$$\text{Dann gilt: } \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ bzw.: } \vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$$

mit **I**:  $3 \times 3$ -Matrix, die eine *physikalische Eigenschaft* des Kreisels beschreibt. (Konkret:  $I_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$ )

$\Rightarrow$  Definition eines **”physikalischen Tensors”** ähnlich der Definition des physikalischen Vektors: Größe, charakterisiert durch  $3 \times 3$ -Matrix  $\{t_{ij}\}$ , die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{t_{ij}\} \rightarrow \{t'_{ij}\} \text{ mit } t'_{ij} = \sum_{kl} \mathcal{D}_{ik} \mathcal{D}_{jl} t_{kl}.$$

(Strenggenommen Tensor zweiter Stufe. Tensoren höherer Stufe: Selbes Prinzip, nur mehr Indizes.)

## A.2 Elementare Begriffe

### 1) Definition einer Matrix

Eine  $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit  $m$  Zeilen und  $n$

$$\text{Spalten: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}).$$

Zwei Matrizen gelten als gleich, wenn jeder Eintrag  $a_{ij}$  gleich ist.

### 2) Spezielle Matrizen

- Nullmatrix:  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$
- Quadratische  $n \times n$ -Matrizen
  - Symmetrische Matrix:  $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$
  - Antisymmetrische Matrix:  $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$
  - Diagonalmatrix:  $a_{ij} = \delta_{ij} a_i$
  - Einheitsmatrix:  $E = \mathbf{1} = \delta_{ij}$
- Vektoren:
  - Spaltenvektor:  $n \times 1$ -Matrix
  - Zeilenvektor:  $1 \times n$ -Matrix
  - $\rightarrow$  Koordinatendarstellungen von Vektoren sind spezielle Formen von Matrizen.

### 3) Rang einer Matrix

$m \times n$ -Matrix kann man sich zusammengesetzt denken aus  $m$  Zeilenvektoren oder  $n$  Spaltenvektoren.

Zeilenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Spaltenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren

Es gilt: Spaltenrang = Zeilenrang.

## A.3 Rechnen mit Matrizen

1) **Addition** : Sei  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ , gleiche Zahl von Zeilen/Spalten.

$$C = (c_{ij}), C = A + B \text{ bedeutet: } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

**2) Multiplikation mit Skalar** : Sei  $\lambda$  Skalar

$C = \lambda A$  bedeutet:  $c_{ij} = \lambda a_{ij} \forall i, j$ .

Bemerkung: Matrizen mit Addition und Skalarmultiplikation bilden wieder Vektorraum über dem Körper der Skalare ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

**3) Transposition**

$C = A^T$  bedeutet:  $c_{ij} = a_{ji}$

**4) Matrixmultiplikation** : Sei  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ ,

Anzahl Spalten von  $A$  = Anzahl Zeilen von  $B$

$C = AB$  bedeutet:  $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ .

Eigenschaften der Matrixmultiplikation

- Assoziativ:  $A(BC) = (AB)C$
- Neutrales Element:  $\mathbb{1}$  erfüllt  $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A \forall A$
- Nicht kommutativ: Im allgemeinen ist  $AB \neq BA$ .
- Matrix  $A$  kann Inverses haben (siehe 5), muss aber nicht.

**5) Matrixinversion**  $A$  sei eine  $m \times n$ -Matrix:

$n \times m$ -Matrix  $(A^{-1})$  ist "Links inverses" von  $A$ , wenn  $(A^{-1})A = \mathbb{1}$ .

(Definition der "Rechts inversen": Analog)

**Es gilt:** (Leicht zu zeigen)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Für  $n = m$ :  $AA^{-1} = \mathbb{1}$

(d.h.  $A^{-1}$  ist dann auch Rechts inverses).

**Praktische Berechnung:** Lösung eines Satzes von linearen Gleichungssystemen.

**Beispiel:** Gegeben  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Gesucht  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entspricht zwei linearen Gleichungssystemen:

$$(*) \quad 1x_{11} + 3x_{12} = 1 \quad 1x_{21} + 3x_{22} = 0$$

$$(**) \quad 2x_{11} + 1x_{12} = 0 \quad 2x_{21} + 1x_{22} = 1$$

Selbe Koeffizienten, nur rechten Seiten sind verschieden

→ Dieselben Transformationen führen zum Ziel.

**Lösungsverfahren** (für  $n \times n$ -Matrizen).

Schreibe Koeffizientenmatrix (für linke Seite) und Einheitsmatrix (für rechte Seiten) nebeneinander auf. Führe dann die Zeilentransformationen aus, die die Gleichungssysteme lösen.

→ Linke Matrix (Koeffizientenmatrix) wird zur Einheitsmatrix, rechte Matrix wird zur gesuchten inversen Matrix.

$$\begin{aligned}
\text{Konkret: } & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(**) \rightarrow (**)-3(*)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{(**) \rightarrow -(**)/5} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{(*) \rightarrow (*)-3(**)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \\
\Rightarrow \text{Ergebnis: } & A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Alternativen: Cramers Regel, siehe nächster Abschnitt, wird aber für  $n > 2$  impraktikabel. Weitere numerische Verfahren, z.B. LU-Zerlegung, siehe Numerikliteratur).

**6) Spur :** Für  $n \times n$  Matrizen  $A$  ist  $\text{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Es gilt:  $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$

(leicht zu sehen, wenn man es explizit hinschreibt).

$\rightarrow \text{Sp}(A_1 \cdots A_{n-1} A_n) = \text{Sp}(A_n A_1 \cdots A_{n-1})$ :

Matrizen in der Spur dürfen zyklisch vertauscht werden.

**7) Determinante :** Siehe nächster Abschnitt

## A.4 Determinanten

**1) Definition:** Betrachte  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij})$

$$\det(A) := \sum_P (-1)^P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \quad (\text{A.2})$$

Hier ist:  $(P_1 \cdots P_n)$ : Permutationen von  $(1 \cdots n)$

$\sum_P$ : Summe über alle Permutationen

$$(-1)^P: \begin{cases} 1 & , \text{ falls Permutation gerade} \\ -1 & , \text{ falls Permutation ungerade} \end{cases}$$

wobei - 'gerade' Permutation: lässt sich durch gerade Anzahl paarweiser Vertauschungen (Transpositionen) realisieren.

- 'ungerade' Permutation: ungerade Anzahl Transpositionen

Es gilt: Zuordnung Permutation  $\leftrightarrow$  gerade/ungerade ist eindeutig.

$$\text{Notation: } \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Konkret: } 2 \times 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

$$3 \times 3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$\rightarrow \text{Spatprodukt: } (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \sum \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

entspricht genau dem von  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  aufgespannten Volumen.

**Geometrische Interpretation:**  $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$  ( $\vec{a}_i$  Spaltenvektoren)

Dann ist  $|\det(A)|$  genau das von  $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$  aufgespannte  $n$ -dimensionale Volumen im  $n$ -dimensionalen Raum.

Daraus folgt z.B.  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_i$  linear abhängig  $\Leftrightarrow \text{Rang } A < n$ .

## 2) Rechenregeln

- **Transposition** :  $\det(A^T) = \det(A)$ .

(Begründung:  $\det(A^T) = \sum_P (-1)^P a_{P_1 1} \cdots a_{P_n n} = \sum_P (-1)^P a_{1 P_1^{-1}} \cdots a_{n P_n^{-1}}$   
 $= \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} a_{1 \hat{P}_1^{-1}} \cdots a_{n \hat{P}_n^{-1}}$  mit  $\hat{P} = P^{-1}$ ,  
 letzter Schritt folgt aus  $(-1)^P = (-1)^{P^{-1}}$ .)

- **Addition** einer Zeile/Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Spalte analog.

(Begründung: Faktoren  $(a_{ij} + b_{ij})$  in Gl. (A.2) ausmultiplizieren.)

- **Multiplikation** einer Zeile/Spalte mit einer Zahl  $\alpha$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Begründung: Faktor  $\alpha$  in Gl. (A.2) vor die Summe ziehen.)

Folgerung  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .

- **Vertauschung** zweier Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen.

(Begründung bei Spaltenvertauschung  $i \leftrightarrow j$ : Entspricht in Gl. (A.2) dem Ersetzen der Permutationen  $P$  durch  $P' = T_{ij}P$ , wobei  $T_{ij}$  die Transposition ( $i \leftrightarrow j$ ) ist. Falls  $P$  gerade, ist  $P'$  ungerade und umgekehrt.)

- Sind zwei Zeilen/Spalten gleich, folgt  $\det(A) = 0$ .

(Begründung: Vertauschung ändert  $A$  nicht, aber Vorzeichen von  $\det A$ .)

→ Wenn ein Vielfaches einer Zeile/Spalte auf eine andere addiert wird, ändert sich Determinante nicht.

- **Determinanten-Multiplikationssatz** :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

- **Algebraisches Komplement** :  $A^{(ij)}$  sei die Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.  
 Algebraisches Komplement:  $U_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(ij)})$ .

- **Determinanten-Entwicklungssatz :**

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_i a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Zeile } i \\ &= \sum_j a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Spalte } j\end{aligned}$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

- Andererseits:  $\sum_k a_{ik} U_{jk} = 0$ ,  $\sum_k a_{ki} U_{kj} = 0$  für  $i \neq k$ .

(Begründung: Definiere Matrix  $\bar{A}$ , die bis auf  $j$ -te Zeile identisch ist mit  $A$ , nur  $j$ -te Zeile durch  $i$ -te Zeile ersetzt. Dann ist  $\det(\bar{A}) = 0$ . Erste Behauptung (Zeile) folgt aus Entwicklungssatz:  $\det(\bar{A}) = \sum_k \bar{a}_{jk} U_{jk} = \sum_k a_{ik} U_{jk}$ . Zweite Behauptung analog.)

### 3) Folgerungen und Anwendungen

- **Inverses** einer  $n \times n$ -Matrix:

Voraussetzung:  $\det(A) \neq 0$

Dann lässt sich  $A$  invertieren und  $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji} / \det(A)$ .

( $[A^{-1}]_{ij}$ : Eintrag in der  $i$ -ten Zeile,  $j$ -ten Spalte der Matrix  $A^{-1}$ ).

- **Lineare Gleichungssysteme** Allgemeine Form:  $A\underline{x} = \underline{b}$

mit Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

und Spaltenvektoren  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

#### Lösbarkeit

- $A\underline{x} = \underline{b}$  lösbar  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \underline{b})$ .

(denn: Schreibe  $A = (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$  mit  $\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ .

$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} \Rightarrow \underline{b}$  ist Linearkombination der  $\underline{a}_i$ .)

- Lösung ist eindeutig  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$ .

(denn:  $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow$  alle  $\underline{a}_i$  linear unabhängig.

Aus  $\sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} = \sum_i \underline{a}_i \lambda_i$  folgt  $x_i = \lambda_i \quad \forall i$ )

#### Lösung für $n \times n$ -Systeme

Gleichungssystem  $A\underline{x} = \underline{b}$  allgemein lösbar (für alle  $\underline{b}$ ),

wenn  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  invertierbar.

Dann ist  $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ .

#### Cramersche Regel:

Definiere  $A^{(k)}$ : Matrix wie  $A$ ,  $k$ -te Spalte ersetzt durch  $\underline{b}$ .

Dann ist Lösung von  $A\underline{x} = \underline{b}$ :  $x_k = \det(A^{(k)}) / \det(A)$ .

(folgt nach Einsetzen von  $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji} / \det(A)$  in  $x_k = [A^{-1}\underline{b}]_k$ ).

## A.5 Drehungen und Drehmatrizen

Erinnerung (A.1): Koordinaten eines Vektors  $\vec{a}$  ändern sich bei Drehung des Koordinatensystems  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  gemäß  $a' = \mathcal{D}a$  mit  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{ij})$ ,  $\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$ .

Im Folgenden: Vertiefung der Diskussion von Drehmatrizen.

### 1) Charakteristika von Drehmatrizen

- **Orthonormal** :  $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$  bzw.  $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = \mathcal{D} \mathcal{D}^T = \mathbb{1}$

(Begründung:  $[\mathcal{D}^T \mathcal{D}]_{ik} = \sum_j \mathcal{D}_{ij}^T \mathcal{D}_{jk} = \sum_j \mathcal{D}_{ji} \mathcal{D}_{jk} = \sum_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j)(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \cdot \sum_j \vec{e}'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \forall \vec{a}$ )

Folgerung für die Struktur von Drehmatrizen:

Spaltenvektoren  $v_i$  in  $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$  stehen senkrecht aufeinander und  $|v_i| = 1$ .

- **Determinante** :  $\det(\mathcal{D}) = 1$ .

(Begründung:  $\det \mathcal{D} = \pm 1$  folgt aus  $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = \mathbb{1}$ . Vorzeichen + folgt daraus, dass  $\Sigma, \Sigma'$  beides Rechtssysteme sind  $\rightarrow$  lassen sich kontinuierlich ineinander überführen.

Konkret:  $\mathcal{D}$  parametrisierbar durch drei Winkel,  $\mathcal{D}(\phi, \theta, \xi)$  mit  $\mathcal{D}(0, 0, 0) = \mathbb{1} \Rightarrow \det(\mathcal{D}(0, 0, 0)) = 1$ . Drehung  $\mathcal{D}$  sind stetige Funktionen dieser Winkel, damit ist auch  $\det(\mathcal{D}(\phi, \theta, \xi))$  stetig und springt nicht einfach von +1 nach -1 um.)

Bemerkung: Es gibt auch Transformationen  $T$  mit  $T^T T = \mathbb{1}$  und  $\det(T) = -1$ , z.B. Spiegelung am Ursprung,  $T = -\mathbb{1}$ . In diesem Fall geht Rechtssystem in Linkssystem über.

### 2) Wirkung von Drehungen auf physikalische Größen (teilweise Wdh.)

**physikalischer Skalar**  $\Phi$ : Invariant unter Drehung,  $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi$ .

**physikalischer Vektor**  $v$ :  $v \rightarrow v' = \mathcal{D}v$ .

**physikalischer Tensor 2. Stufe**  $t$ :  $t \rightarrow t' = \mathcal{D}t\mathcal{D}^T$ .

Kann nun auch begründet werden aus Transformationsverhalten physikalischer Vektoren: Tensor angewandt auf Vektor gibt Vektor (z.B. Trägheitstensor:  $I\vec{\omega} = \vec{L}$ .)

$$\Rightarrow (tv) \rightarrow (tv)' = \mathcal{D}(tv) = \mathcal{D}t\mathcal{D}^T v'.$$

**Verallgemeinerung** für Tensoren  $n$ -ter Stufe leichter in Indexschreibweise:  $t_{ijk\dots} \rightarrow t'_{ijk\dots} = \sum_{i'j'k'\dots} \mathcal{D}_{ii'}\mathcal{D}_{jj'}\mathcal{D}_{kk'}\dots t_{ijk\dots}$ .

Speziell **Invarianten**: Aus Tensoren abgeleitete Skalare.

**Vektoren** : Betrag

**Tensoren 2. Stufe** : Spur und Determinante

(jeweils nicht schwer zu zeigen).

### 3) Einordnung der Drehmatrizen, Drehgruppe

Klassifizierung reeller Matrizen



- (i) **Invertierbare  $n \times n$ -Matrizen** bilden Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$
- (ii) Matrizen  $U \in GL(n, \mathbb{R})$  mit  $U^{-1} = U^T$  bilden Gruppe:  
**Orthogonale Gruppe  $O(n)$**
- (iii) Matrizen  $\mathcal{D} \in O(n)$  mit  $\det(\mathcal{D}) = +1$  bilden Gruppe:  
**Spezielle orthogonale Gruppe  $SO(n)$ .**

NB: Ähnliche Strukturen gibt es auch bei den komplexen Matrizen:

Matrizen  $U$  mit  $U^{-1} = U^*T$  bilden **unitäre Gruppe  $U(n)$** .

Matrizen  $U \in U(n)$  mit  $\det(U) = 1$  bilden **spezielle unitäre Gruppe  $SU(n)$** . Spielen wichtige Rolle in der Elementarteilchenphysik.

## A.6 Das Eigenwertproblem

**Beispiel:** Trägheitstensor  $I$  des Kreisels verknüpft Drehimpuls  $\vec{L}$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ :  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ . Es gibt offensichtlich eine Drehachse, für die gilt  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  (die Symmetrieachse). Für diese gilt  $I\vec{\omega} = \theta\vec{\omega}$ .

Das Trägheitsmoment  $\theta$  ist ein Beispiel für einen Eigenwert

### 1) Eigenwerte und Eigenvektoren

Allgemein: Gegeben  $n \times n$ -Matrix  $M$

Einen Vektor  $v \neq 0$  mit  $Mv = \lambda v$  ( $\lambda$ : Zahl) nennt man **Eigenvektor**. Der zugehörige Wert  $\lambda$  heißt **Eigenwert**. Die Gleichung  $Mv = \lambda v$  ist eine **Eigenwertgleichung**.

Eigenwertgleichungen spielen eine wichtige Rolle in allen Bereichen der Physik.

### 2) Bestimmung von Eigenwerten: Charakteristisches Polynom

Forme Eigenwertgleichung  $Mv = \lambda v$  um zu  $(M - \lambda \mathbb{1})v = 0$  ( $v \neq 0$ ).

$\Rightarrow (M - \lambda \mathbb{1})$  ist nicht invertierbar.  $\Rightarrow \det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$ .

Folgerung:

Definiere **charakteristisches Polynom**  $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1})$  (Polynom vom Grad  $n$ ). Eigenwerte von  $M$  können dadurch bestimmt werden, dass man die Nullstellen  $\lambda_i$  von  $\chi_M(\lambda)$  ermittelt.

Den zu einem Eigenwert  $\lambda_i$  zugehörigen **Eigenvektor**  $v_i$  erhält man dann durch Lösung des Gleichungssystems  $(M - \lambda_i \mathbb{1})v_i = 0$ .

### 3) Eigenvektoren und Eigenräume

- Es gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.

Begründung: Die Behauptung gelte für  $(k-1)$  Eigenvektoren zu verschiedenen  $(k-1)$  Eigenwerten  $\lambda_j$ . Der  $k$ -te Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_k$ , sei linear abhängig:  $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j v_j$ .

Dann folgt einerseits  $Mv_k = M \sum c_j v_j = \sum c_j Mv_j = \sum c_j \lambda_j v_j$

und andererseits  $Mv_k = \lambda_k v_k = \lambda_k \sum c_j v_j = \sum c_j \lambda_k v_j$ ,

Also zusammen  $\sum c_j (\lambda_j - \lambda_k) v_j = 0$ . Da die  $v_j$  (für  $j < k$ ) linear unabhängig sind, folgt  $c_j = 0 \forall j$  oder  $\lambda_k = \lambda_j$  für mindestens ein  $j$ .

- Ist  $M$  symmetrisch, dann stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.

Begründung: Sei  $v_j$  Spaltenvektor,  $v_j^T$  der zugehörige Zeilenvektor.

Mit  $Mv_j = \lambda_j v_j$  folgt  $v_j^T M^T = v_j^T \lambda_j$ . Weiterhin  $v_j^T v_k = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$  (Skalarprodukt). Damit ist einerseits  $v_k^T Mv_j = v_k^T \lambda_j v_j = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_j \lambda_j$  und andererseits  $v_k^T M^T v_j = \lambda_k \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$ , also zusammen  $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k (\lambda_j - \lambda_k) = 0$ .

Damit ist entweder  $\lambda_j = \lambda_k$  oder  $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$  (d.h.,  $\vec{v}_j \perp \vec{v}_k$ ).

- Ist  $\lambda_j$  ein vielfacher Eigenwert, d.h. vielfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann kann es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zu  $\lambda_j$  geben. Mit  $v_j^{(1)}$  und  $v_j^{(2)}$  ist auch jede Linearkombination  $c_1 v_j^{(1)} + c_2 v_j^{(2)}$  wieder Eigenvektor. Die Gesamtheit aller Eigenvektoren bildet also wieder einen Vektorraum, den "Eigenraum" des Eigenwerts. Dabei ist die Dimension des Eigenraums maximal die Vielfachheit des Eigenwerts (z.B. doppelter Eigenwert: – Eigenraum kann maximal eine Hyperfläche sein).

#### 4) Diagonalisierung

##### Allgemein

Eine  $n \times n$ -Matrix  $M$  habe  $n$  verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren  $v_j$  zu Eigenwerten  $\lambda_j$  (gilt z.B. sicher dann, wenn sie  $n$  verschiedene Eigenwerte hat).

Konstruiere Matrix  $V = (v_1, \dots, v_n)$  aus den Spaltenvektoren  $v_j$ . Invertierbar, da die  $v_j$  linear unabhängig ( $\det(V) \neq 0$ ).

Es gilt:  $MV = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: V\Lambda$ .

$\Rightarrow \boxed{V^{-1}MV = \Lambda}$  mit  $\Lambda$ : Diagonalmatrix

Transformationen  $M \rightarrow V^{-1}MV$  heißen **Ähnlichkeitstransformation**. Falls es eine Ähnlichkeitstransformation gibt, die  $M$  diagonal macht, heißt  $M$  **diagonalisierbar**.

##### Speziell symmetrische Matrizen

Siehe **3**): Vektoren  $v_j$  stehen senkrecht aufeinander, können natürlich auch normiert werden ( $|v_j| = 1$ ).

$\rightarrow V$  ist orthonormal, entspricht einer Drehmatrix, ggf. gekoppelt mit Spiegelung (falls  $\det(V) = -1$ ).

$\rightarrow \boxed{\Lambda = V^T M V}$  bzw.  $\boxed{M = V \Lambda V^T}$ .

$M$  geht aus  $\Lambda$  durch Drehung hervor.

**Spektralsatz** : Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

→ Für symmetrische Tensoren (wie z.B. der Trägheitstensor) läßt sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem finden, in dem die  $(x, y, z)$ -Achsen Eigenvektoren sind.  
 ("Hauptachsen" und "Hauptachsentransformation")

## A.7 Funktionen von Matrizen

Zum Abschluss: Mit  $n \times n$ -Matrizen kann man im Prinzip fast so hantieren wie mit Zahlen. Man muss nur darauf achten, dass sie nicht kommutieren (i.A.  $AB \neq BA$ ). Insbesondere kann man Funktionen von Matrizen bilden.

- Potenzen: Klar ( $M^n$ , ggf.  $M^{-n}$ , falls  $M$  invertierbar).
- Allgemein (siehe Kapitel 3) lassen sich die meisten Funktionen durch Potenzreihen darstellen:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$   
 ⇒ Verallgemeinerung auf Matrizen:  $f(M) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M^k$ .
- Damit läßt sich für diagonalisierbare Matrizen  $M$  noch eine weitere Konstruktionsvorschrift motivieren:

Sei  $M = V \Lambda V^{-1}$  und  $f(M) = \sum c_k M^k = \sum c_k (V \Lambda V^{-1})^k = V (\sum c_k \Lambda^k) V^{-1}$ .

Mit  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  folgt  $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ .

⇒  $f(M) = V \left( \sum c_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right) V^{-1} = V \left( \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \right) V^{-1}$ .

Diese Vorschrift läßt sich auch unabhängig von der Potenzreihendarstellung von  $f(x)$  anwenden.