

Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014^{*}

Universität Mainz

Fachbereich 08

Theorie der kondensierten Materie

Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

^{*}Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/>)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com/examples>

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:	22
1.4.2.3	Euler-Formel	23
1.4.2.4	Rechenregeln	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen	24
1.4.3.1	Potenzen	25
1.4.3.2	Wurzeln	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich)	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich)	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen	27
2	Vektorrechnung	29
2.1	Vektoren	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	35
2.3.1	Definition und mathematische Struktur	35
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte	36
3	Infinitesimalrechnung	39
3.1	Folgen und Reihen	39
3.1.1	Folgen	39
3.1.2	Reihen	40
3.2	Differentialrechnung	42
3.2.1	Die Ableitung	42
3.2.2	Elementare Beispiele	44
3.2.3	Differentiationsregeln	46
3.2.4	Anwendungen der Differentiationsregeln	47
3.2.5	Tabelle wichtiger Ableitungen	48
3.2.6	Vektorwertige Funktionen	49

3.2.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen	49
3.2.6.2	Speziell Raumkurven	49
3.2.7	Extremwertaufgaben	51
3.3	Taylor-Entwicklung	55
3.3.1	Kurzer Abriss über Potenzreihen	55
3.3.2	Konstruktion der Taylor-Reihe	57
3.3.3	Anwendungen	59
3.4	Integralrechnung	62
3.4.1	Das Riemannsche Integral	62
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktion	63
3.4.3	Integrationsmethoden	65
3.4.4	Uneigentliche Integrale	68
3.4.5	Mehrfachintegrale	70
3.4.5.1	Beispiele	70
3.4.5.2	Polarkoordinaten	71
3.4.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante	73
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	77
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	78
4.1.1	Separable Differentialgleichungen	78
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen	79
4.2	Systeme von Differentialgleichungen	81
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	81
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	81
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	82
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten	85
5	Vektoranalysis	87
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung	87
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren	87
5.1.2	Felder	88
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral	88
5.1.4	Flächenintegral	89
5.2	Der Nabla-Operator	90
5.2.1	Skalare Felder und Gradient	90

5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation	91
5.2.3	Der Laplace-Operator	91
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge	92
5.3	Krummlinige Koordinaten	92
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme	92
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen	94
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme	96
5.4	Integralsätze	97
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz	97
5.4.1.1	Der Satz	97
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz	98
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene	99
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	100
6	Die Diracsche Delta-Funktion	103
6.1	Motivation und Einführung	103
6.2	Definition	104
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion	104
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen	104
6.3.2	Darstellung als Integral	106
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion	106
6.5	Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen	107
7	Die Fouriertransformation	109
7.1	Diskrete Fouriertransformation	110
7.1.1	Definition	110
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	111
7.2	Fourierintegral	112
7.2.1	Definition	112
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln	113
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten	114
7.2.4	Anwendungsbeispiele	116
7.2.4.1	Wellengleichung	116
7.2.4.2	Diffusionsgleichung	116
7.2.4.3	Greensche Funktion	116
7.3	Fourierreihe	118
7.3.1	Definition	118
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen	119

8	Partielle Differentialgleichungen	121
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik	121
8.1.1	Elliptischer Typ	122
8.1.2	Hyperbolischer Typ	122
8.1.3	Parabolischer Typ	123
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen	123
8.2.1	Laplace-Gleichung	124
8.2.1.1	Numerische Lösung	124
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen	124
8.2.2	Wellengleichung	126
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation	126
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz	127
8.2.3	Diffusionsgleichung	128
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten	128
8.2.3.2	Propagatordarstellung	129
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion	129
9	Orthogonale Funktionen	131
9.1	Allgemeiner Rahmen	131
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme	131
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem	132
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen	133
9.2	Legendre-Polynome	134
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung	134
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome	135
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome	136
9.2.4	Kugelflächenfunktionen	137
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung	139
A	Anhang: Matrizen	141
A.1	Beispiele von Matrizen	141
A.2	Elementare Begriffe	143
A.3	Rechnen mit Matrizen	143
A.4	Determinanten	145
A.5	Drehungen und Drehmatrizen	148
A.6	Das Eigenwertproblem	149
A.7	Funktionen von Matrizen	151

B	Anhang: Analytische Funktionen	153
B.1	Definitionen	153
B.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	154
B.3	Integralsätze	155
B.4	Taylor-Reihe und Laurent-Reihe	156

Anhang B

Anhang: Analytische Funktionen

In diesem Anhang: Spezielle Eigenschaften *komplexer* differenzierbarer Funktionen $f(z)$ ($f(z), z \in \mathbb{C}$).

Komplexe Differenzierbarkeit ist eine viel stärkere Forderung als Differenzierbarkeit im Reellen, da der Grenzwert für den Differenzenquotienten für Differenzen in der komplexen Ebene erfüllt sein muss.

Im Gegenzug haben komplex differenzierbare Funktionen eine Reihe erstaunlicher Eigenschaften $\rightarrow$ Gegenstand der *Funktionentheorie*.

B.1 Definitionen

Analytische Funktion: $f(z)$ heißt **analytisch bei** $z = a$, wenn $f(z)$ differenzierbar für alle Punkte innerhalb eines (möglicherweise kleinen) Kreis um $z = a$, d.h. der Grenzwert $\frac{df}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz}$ existiert und ist eindeutig für alle Richtungen von dz in der komplexen Ebene.

Eine Funktion $f(z)$ heißt **analytisch in einem (offenen) Gebiet**, wenn $f(z)$ bei jedem Punkt in diesem Gebiet analytisch ist.

Reguläre Punkte von $f(z)$ sind Punkte, wo $f(z)$ analytisch ist.

Singuläre Punkte oder **Singularitäten** sind Punkte, an denen $f(z)$ nicht analytisch ist.

Falls $f(z)$ bei $z = a$ singulär ist, aber rund um a analytisch, dann ist a eine **isolierte Singularität**.

Ein **Pol** ist eine isolierte Singularität, bei der die reziproke Funktion $1/f(z)$ regulär ist und eine Nullstelle hat. An einem **Pol nter Ordnung** hat $1/f(z)$ eine n -fache Nullstelle.

Beispiele:

Die Funktion $f(z) = z^2$ ist analytisch.

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ hat einen zweifachen Pol bei $z = 0$.

Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nicht analytisch.

(Nicht differenzierbar im Komplexen:

In Polardarstellung sei $z = |z|e^{i\phi}$, $dz = |dz|e^{i\psi}$.

Dann ist $\lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = 2|z| \cos(\phi - \psi)e^{-i\psi}$ nicht eindeutig:

Hängt von ψ ab.)

B.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Es gilt:

Cauchy-Riemann-Relationen Wenn $f(z)$ analytisch ist, dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

(Beweisskizze: $df = du + idv$; $dz = dx + idy$.

$$\Rightarrow df = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \stackrel{!}{=} \frac{df}{dz} dz = \frac{df}{dz} (dx + idy),$$

$$\text{wobei } \frac{df}{dz} \text{ eindeutig sein soll. } \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{!}{=} \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Rest folgt aus Vergleich von Real- und Imaginärteil.)

Umgekehrt gilt: Falls die u und v stetig und stetig differenzierbar sind und ihre partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Relationen erfüllen, ist $f(z) = u + iv$ analytisch.

(Beweisskizze: Eindeutigkeit der Ableitung läßt sich zumindest für

Grenzwerte $dz \rightarrow 0$ entlang gerader Pfade von dz zeigen.

Schreibe $dz = dx + idy = |dz|e^{i\phi} \rightarrow dx = |dz|\cos\phi$, $dy = |dz|\sin\phi$.

$$df = |dz| \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\phi + i \frac{\partial v}{\partial x} \cos\phi + i \frac{\partial v}{\partial y} \sin\phi \right]$$

$$= |dz| (\cos\phi + i \sin\phi) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right], \text{ wegen Cauchy-Riemann-Relation.}$$

Damit ist $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ eindeutig.)

NB: Daraus folgt unmittelbar, dass für analytische $f = u + iv$ die Funktionen u und v im Analytizitätsgebiet die sogenannte **Laplace-Gleichung** erfüllen: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ mit $\Delta g(x, y) := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \text{ Herleitung für } v \text{ analog.} \right)$$

Beispiele:

$$f(z) = z^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \text{analytisch!}$$

$$f(z) = |z|^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 + y^2, v \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{nicht analytisch!}$$

B.3 Integralsätze

Cauchyscher Integralsatz: Wenn $f(z)$ auf einer 'einfachen' geschlossenen Kurve C und in dem darin eingeschlossenen Gebiet G analytisch ist, dann gilt: $\oint_C dz f(z) = 0$.

Dabei ist eine 'einfache' Kurve eine Kurve, die sich nicht selbst kreuzt, und das Integral $\int_C dz f(z)$ ist als *Kurvenintegral* definiert: Die Kurve C sei durch eine Funktion $z(s)$ mit irgendeinem Parameter s parametrisiert ($s \in [s_0, s_1]$). Dann ist $\int_C dz f(z) = \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{dz}{ds} f(z(s))$

(Beweisskizze: Betrachte einfachkeitshalber konvexes Gebiet

(anderenfalls Zerlegung in konvexe Teilgebiete).

Betrachte in $\oint_C dz f(z) = \oint_C (dx + i dy) f(z)$ zunächst den Term $\oint_C dx f(z)$.

Weg C kann in oberen und unteren Teilweg $y_u(x)$ und $y_o(x)$ zerlegt werden.

$$\oint_C dx f(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (f(x, y_u(x)) - f(x, y_o(x))) dx = - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} dy \frac{\partial f}{\partial y} = - \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{Analog: } \oint_C dy f(z) = \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$\text{Zusammen: } \oint_C dz f = - \iint_G dA \left(\frac{\partial f}{\partial y} - i \frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \iint_G dA \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \text{ wegen Cauchy-Riemann Relationen}$$

Folgerung: Solange man Anfangs- und Endpunkt gleich lässt und keinen Pol überstreicht, darf man Integrationspfade in der komplexen Ebene verschieben. (Altes und neues Kurvenintegral unterscheiden sich dann um eine geschlossene Kurve, die nach dem Cauchyschen Integralsatz keinen Beitrag liefert.)

Beispiel: Berechnung des Integrals $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} e^{ikx}$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-ik/2)^2} e^{-k^2/4} = e^{-k^2/4} \int_{-(\infty-ik/2)}^{\infty-ik/2} dy e^{-y^2}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{=} e^{-k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = e^{-k^2/4} \sqrt{\pi}.$$

Cauchysche Integralgleichung: Sei eine einfache geschlossene Kurve C , die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wenn $f(z)$ auf C und dem von C eingeschlossenen Gebiet G analytisch ist, dann gilt für Punkte w in dem Gebiet G : $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$.

(Beweisskizze: Ziehe Integrationskurve so weit zusammen (Cauchyscher Integralsatz!),

bis sie nur einen Kreis von infinitesimalem Radius ϵ um den Pol $z = w$ ist. Parametrisiere sie mit $\phi \in [0 : 2\pi]$: $z(\phi) = w + \epsilon e^{i\phi}$.

$$\Rightarrow \oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi i\epsilon e^{i\phi} \frac{f(w)}{\epsilon e^{i\phi}} = f(w) i \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i f(w)$$

Residuensatz Folgt direkt aus dem Cauchyschen Integralsatz.

C sei eine einfache geschlossene Kurve, die ein Gebiet G umschließt. Die Funktion $f(z)$ sei auf C und G analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten z_j im Inneren von G .

$$\text{Dann ist } \oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}[f(z); z_j]$$

mit den **Residuen** $\text{Res}[f(z); z_j] := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} d\zeta f(\zeta)$, wobei die Kurve Γ_j ein Kreis mit Radius $\epsilon \rightarrow 0^+$ um $z = z_j$ ist. Alle Kurvenintegrale werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Berechnung des Residuums oft ganz einfach:

Wenn z_j eine n -fache Polstelle von $f(z)$ ist, dann ist

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z); z_j] = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) (z - z_j)^n] \Big|_{z=z_j}}$$

(Rechnung: $f(z)$ hat n -fachen Pol bei $z_j \Leftrightarrow g(z) = f(z) (z - z_j)^n$ ist regulär bei z_j)

Parametrisiere Γ_j mit $\phi \in [0 : 2\pi] : z(\phi) = z_j + \epsilon e^{i\phi}$.

(ϵ muss klein genug sein, dass Γ_j nur einen Pol umschließt.)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} dz f(z) &= \oint_{\Gamma_j} dz \frac{g(z)}{(z - z_j)^n} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} g(z_j + \epsilon e^{i\phi}) \epsilon^{-n} e^{-in\phi} \\ \left| \frac{dz}{d\phi} = i\epsilon e^{i\phi}, \quad \text{Taylorentwicklung von } g(z_j + \epsilon e^{i\phi}) \text{ um } z_j \right. \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k g(z)}{dz^k} \Big|_{z=z_j} \epsilon^{j-n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(j+n-1)\phi}}_{2\pi \delta_{j,n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z) \Big|_{z=z_j} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel: Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2}$

Funktion $f(z) = 1/(1+z^2)$ hat einfache Pole bei $z = \pm i$.

Zugehörige Residuen: $\operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{1}{2i}$, $\operatorname{Res}[f(z), -i] = -\frac{1}{2i}$.

Wähle als Integrationspfad Kurve, die gewünschtes Integral enthält und obere Halbebene umschließt:

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \oint dz f(z) = \int_{-R}^R dx f(x) + \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} d(Re^{i\phi}) f(Re^{i\phi})$$

Beitrag von $\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} d(Re^{i\phi}) f(Re^{i\phi}) \sim \frac{1}{R}$ verschwindet mit $R \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = \pi.$$

B.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe

Theorem: (ohne Beweisskizze): Eine Funktion $f(z)$, die in einem Gebiet analytisch ist (also *mindestens einmal* differenzierbar), ist damit automatisch *unendlich oft* differenzierbar und kann in jedem Punkt a des Gebietes in eine Taylorreihe entwickelt werden. Der *Konvergenzradius* der resultierenden Potenzreihe ist durch den Abstand zum nächsten singulären Punkt in der komplexen Ebene gegeben.

(Beispiel: $f(z) = \ln(1+z)$ hat Singularität bei $z = -1$. Deshalb hat die MacLaurin-Reihe von $f(z)$ den Konvergenzradius $R = 1$.)

Analytische Fortsetzung - Innerhalb eines zusammenhängenden Gebiets kann der Konvergenzbereich bzw. u.U. auch der Definitionsbereich einer Funktion $f(z)$ erweitert werden, wenn man die Taylorreihe um $z = a$ dazu nutzt, eine neue Taylorreihe um einen geeigneten Punkt b zu konstruieren.

Beispiel: Logarithmus $f(z) = \ln(1+z)$

Taylor-Reihe von $f(z)$ um $z = 0$ hat den Konvergenzradius 1 (s.o.)

Man kann diese Taylor-Reihe dazu nutzen, eine Taylorreihe um $z = 0.9$ zu konstruieren. Die neue Potenzreihe hat den Konvergenzradius $R = 1.9$ und konvergiert daher in einem größeren Bereich als die ursprüngliche Reihe.

Durch sukzessive analytische Fortsetzungen über die komplexe Ebene kann man den Definitionsbereich von $f(z)$ auch so erweitern, dass die Funktion für reelle $z < -1$ definiert ist. Ergebnis ist allerdings nicht eindeutig und hängt davon ab, ob über die obere oder untere Halbebene von $\mathbb{C}$ analytisch fortgesetzt wurde.

Laurent-Reihe: Verallgemeinerung der Taylor-Reihe

Taylor-Reihe: Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen $(z - z_0)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Konvergenzgebiet kreisförmig (schließt z_0 ein).

Laurent-Reihe: Entwicklung von $f(z)$ nach $(z - z_0)^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Konvergenzgebiet kreisringförmig (schließt z_0 nicht notwendig ein).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n / (z - z_0)^n.$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) (z - z_0)^{n-1},$$

wobei C eine beliebige geschlossene Kurve im Konvergenzgebiet (Kreisring) ist, die z_0 umschließt.

(Herleitung der Formeln für a_n und b_n :

Zeige zunächst, dass $\oint dz (z - z_0)^k = \delta_{k,-1} 2\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$:

$k = -1$: Cauchysche Integralgleichung.

$k \geq 0$: Cauchyscher Integralsatz ($(f(z) = (z - z_0)^k$ ist analytisch).

$k < -1$: Ziehe Integrationskurve auf Kreis mit Radius ϵ um z_0 zusammen.

Parametrisiere $z(\phi) = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$.

Berechne $\oint dz (z - z_0)^k = i\epsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(k+1)\phi} = 0$ für $k \neq -1$.

Setze dann Laurentreihe für $f(z)$ in Gleichungen für a_n und b_n ein und überprüfe deren Richtigkeit.)