Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014[*]

Universität Mainz
Fachbereich 08
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes
- Zahlen
- Reelle Funktionen
- Komplexe Zahlen

Vektorrechnung
- Vektoren und Vektorräume
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung
- Folgen und Reihen
- Differenzieren
- Potenzreihen
- Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

---

[*]Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs
(online unter http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha http://www.wolframalpha.com/examples

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes **1**

1.1 Die Sprache der Physik . . . 1

1.1.1 Zeichen für physikalische Größen . . . 2

1.1.2 Zeichen für Verknüpfungen . . . 3

1.1.3 Einheiten . . . 4

1.2 Zahlen . . . 6

1.2.1 Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper . . . 6

1.2.2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ . . . 7

1.2.3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ . . . 8

1.2.4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . 9

1.2.5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ . . . 9

1.2.6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ . . . 10

1.2.7 Zusammenfassung . . . 11

1.3 Reelle Funktionen . . . 12

1.3.1 Elementare Funktionen . . . 12

1.3.1.1 Polynome und rationale Funktionen . . . 12

1.3.1.2 Algebraische Funktionen . . . 13

1.3.1.3 Exponentialfunktion . . . 14

1.3.1.4 Logarithmus . . . 15

1.3.1.5 Trigonometrische Funktionen . . . 16

1.3.1.6 Hyperbolische Funktionen . . . 16

1.3.1.7 Funktionen mit Ecken und Sprüngen . . . 17

1.3.1.8 Weitere wichtige abgeleitete Funktionen . . . 17

1.3.2 Eigenschaften von Funktionen . . . 18

1.3.2.1 Spiegelsymmetrie . . . 18

1.3.2.2 Beschränktheit . . . 18

1.3.2.3 Monotonie . . . 18

1.3.2.4 Eineindeutigkeit . . . 18

1.3.2.5 Stetigkeit . . . 19

1.3.2.6 Grenzwerte . . . 19

1.4 Komplexe Zahlen . . . 21
1.4.1 Die imaginäre Einheit . . . 21
1.4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 22
1.4.2.1 Rechnen mit der imaginären Einheit . . . 22
1.4.2.2 Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen: 22
1.4.2.3 Euler-Formel . . . 23
1.4.2.4 Rechenregeln . . . 23
1.4.2.5 Spezielle Transformationen . . . 24
1.4.3 Funktionen einer komplexen Variablen . . . 24
1.4.3.1 Potenzen . . . 25
1.4.3.2 Wurzeln . . . 25
1.4.3.3 Exponentialfunktion (natürlich) . . . 26
1.4.3.4 Logarithmus (natürlich) . . . 26
1.4.3.5 Trigonometrische Funktionen . . . 27

2 Vektorrechnung 29
2.1 Vektoren . . . 29
2.1.1 Definition bzw. Begriffsklärung . . . 29
2.1.2 Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung . . . 30
2.1.3 Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume . . . 31
2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt) . . . 33
2.2.1 Definition und mathematische Struktur . . . 33
2.2.2 Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol . . . 33
2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) . . . 35
2.3.1 Definition und mathematische Struktur . . . 35
2.3.2 Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol . . . 35
2.3.3 Höhere Vektorprodukte . . . 36

3 Infinitesimalrechnung 39
3.1 Folgen und Reihen . . . 39
3.1.1 Folgen . . . 39
3.1.2 Reihen . . . 40
3.2 Differentialrechnung . . . 42
3.2.1 Die Ableitung . . . 42
3.2.2 Elementare Beispiele . . . 44
3.2.3 Differentiationsregeln . . . 46
3.2.4 Anwendungen der Differentiationsregeln . . . 47
3.2.5 Tabelle wichtiger Ableitungen . . . 48
3.2.6 Vektorwertige Funktionen . . . 49

3.2.6.1 Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen . . . 49
3.2.6.2 Speziell Raumkurven . . . 49
3.2.7 Extremwertaufgaben . . . 51
3.3 Taylor-Entwicklung . . . 55
3.3.1 Kurzer Abriss über Potenzreihen . . . 55
3.3.2 Konstruktion der Taylor-Reihe . . . 57
3.3.3 Anwendungen . . . 59
3.4 Integralrechnung . . . 62
3.4.1 Das Riemannsche Integral . . . 62
3.4.2 Hauptsatz und Stammfunktion . . . 63
3.4.3 Integrationsmethoden . . . 65
3.4.4 Uneigentliche Integrale . . . 68
3.4.5 Mehrfachintegrale . . . 70
3.4.5.1 Beispiele . . . 70
3.4.5.2 Polarkoordinaten . . . 71
3.4.5.3 Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante . . . 73

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen 77
4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 78
4.1.1 Separable Differentialgleichungen . . . 78
4.1.2 Lineare Differentialgleichungen . . . 79
4.2 Systeme von Differentialgleichungen . . . 81
4.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . 81
4.2.2 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . 81
4.2.3 Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 82
4.2.4 Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . 85

5 Vektoranalysis 87
5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung . . . 87
5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren . . . 87
5.1.2 Felder . . . 88
5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral . . . 88
5.1.4 Flächenintegral . . . 89
5.2 Der Nabla-Operator . . . 90
5.2.1 Skalare Felder und Gradient . . . 90

5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation . . . 91
5.2.3 Der Laplace-Operator . . . 91
5.2.4 Wichtige Zusammenhänge . . . 92
5.3 Krummlinige Koordinaten . . . 92
5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme . . . 92
5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen . . . 94
5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme . . . 96
5.4 Integralsätze . . . 97
5.4.1 der Gaußsche Integralsatz . . . 97
5.4.1.1 Der Satz . . . 97
5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz . . . 98
5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene . . . 99
5.4.3 Der Integralsatz von Stokes . . . 100

6 Die Diracsche Delta-Funktion 103
6.1 Motivation und Einführung . . . 103
6.2 Definition . . . 104
6.3 Darstellungen der Delta-Funktion . . . 104
6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen . . . 104
6.3.2 Darstellung als Integral . . . 106
6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion . . . 106
6.5 Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen . . . 107

7 Die Fouriertransformation 109
7.1 Diskrete Fouriertransformation . . . 110
7.1.1 Definition . . . 110
7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation . . . 111
7.2 Fourierintegral . . . 112
7.2.1 Definition . . . 112
7.2.2 Eigenschaften und Rechenregeln . . . 113
7.2.3 Paare von Fourier-Transformierten . . . 114
7.2.4 Anwendungsbeispiele . . . 116
7.2.4.1 Wellengleichung . . . 116
7.2.4.2 Diffusionsgleichung . . . 116
7.2.4.3 Greensche Funktion . . . 116
7.3 Fourierreihe . . . 118
7.3.1 Definition . . . 118
7.3.2 Darstellung in trigonometrischen Funktionen . . . 119

8 Partielle Differentialgleichungen 121
8.1 Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik 121
8.1.1 Elliptischer Typ 122
8.1.2 Hyperbolischer Typ 122
8.1.3 Parabolischer Typ 123
8.2 Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen 123
8.2.1 Laplace-Gleichung 124
8.2.1.1 Numerische Lösung 124
8.2.1.2 Lösung mit Separation der Variablen 124
8.2.2 Wellengleichung 126
8.2.2.1 Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation 126
8.2.2.2 Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz 127
8.2.3 Diffusionsgleichung 128
8.2.3.1 Separationsansatz und asymptotisches Verhalten 128
8.2.3.2 Propagatordarstellung 129
8.2.4 Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion 129

9 Orthogonale Funktionen 131
9.1 Allgemeiner Rahmen 131
9.1.1 Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme 131
9.1.2 Das Sturm-Liouville-Problem 132
9.1.3 Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen 133
9.2 Legendre-Polynome 134
9.2.1 Die einfache Legendresche Differentialgleichung 134
9.2.2 Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome 135
9.2.3 Zugeordnete Legendre-Polynome 136
9.2.4 Kugelflächenfunktionen 137
9.3 Die Besselsche Differentialgleichung 139

A Anhang: Matrizen 141
A.1 Beispiele von Matrizen 141
A.2 Elementare Begriffe 143
A.3 Rechnen mit Matrizen 143
A.4 Determinanten 145
A.5 Drehungen und Drehmatrizen 148
A.6 Das Eigenwertproblem 149
A.7 Funktionen von Matrizen 151

B Anhang: Analytische Funktionen **153**

B.1 Definitionen 153

B.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 154

B.3 Integralsätze 155

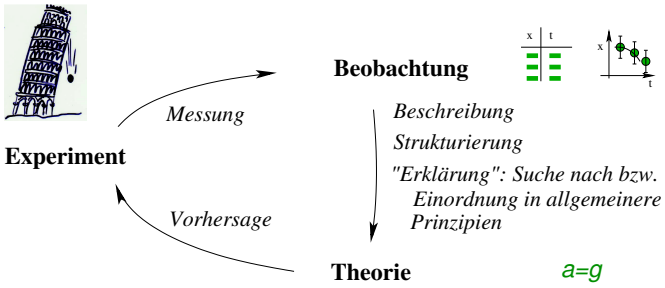
B.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe 156

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Die Sprache der Physik

Kreislauf der empirischen Wissenschaften:



In der Physik (und großen Teilen der Chemie, zunehmend Biologie, Volkswirtschaft ...) spielt Mathematik als Sprache in diesem Kreislauf eine zentrale Rolle.

(NB: Nicht einfach nur als Hilfsmittel: Sprache bestimmt das Denken).

Historisch: Physik und Mathematik

Bis Mitte des 19. Jahrhundert (~ 1830)

- Mathematik im Wesentlichen zur Beschreibung von Experimenten
  (Funktionaler Zusammenhang zwischen Messwerten)
- Spekulationen über allgemeine Zusammenhänge i.A. umgangssprachlich
  (nicht-technisch)
  ("experimentelle Philosophie")

Beschäftigung mit der Physik war i. A. Nebenbeschäftigung.

Seit ~ 1870

- Mathematik ist die Sprache der Theorie.
  → Interpretation der Natur wird von Mathematik geleitet.
  Wichtige Rolle dabei: Entwicklung der Infinitesimalrechnung

Physik wird zum Beruf (Universitäten)

Beispiel: Christiaan Huygens: "Horologium Olscillatorium", 1673
(frühe Mechanik, 14 Jahre vor Newtons "Principia")

über fallende Körper:
"Zu gleichen Zeiten werden einem fallenden Körper gleiche Mengen Geschwindigkeit hinzugefügt, und zu gleichen Zeiten erhöhen sich die von einem Körper durchquerten Abstände sukzessive um den gleichen Betrag."

Übersetzung in die heutige Sprache:
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ = const. oder $\dot{v}$ = const.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ = const. oder $\ddot{x}$ = const.

Zutaten zu einer mathematischen Formulierung physikalischer Sachverhalte:

- Zahlen (2, -3.5, π)
- Einheiten (m, km, s, EUR)
- Zeichen für

  Physikalische Größen
  Manipulationen und Verknüpfungen

Im Einzelnen:

1.1.1 Zeichen für physikalische Größen

Lateinisches Alphabet
$a, b, c, \cdots$
$A, B, C, \cdots$

Griechisches Alphabet
$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$
$A, B, \Gamma, \cdot$

Altdeutsches Alphabet, Fraktur oder Sütterlin (heutzutage selten)
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \cdots$
$\mathcal{U}$ $\mathcal{V}$ $\mathcal{W}$ $\cdots$
$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$ $\cdots$

z.B. Newtonsches Kraftgesetz: Kraft = Masse mal Beschleunigung
übersetzt: $F = m \cdot a$ (F = "Force", a = "acceleration")
oder $K = m \cdot b$ (K = "Kraft", b = "Beschleunigung")

Notation wird i. A. nicht einheitlich sein
(von Buch zu Buch, von Dozent zu Dozent, sogar innerhalb eines Kurses)

(Schlimmes Beispiel: $E = mc^2$ könnte die Gleichung für die Beschleunigung auf einer Kreisbahn sein: Radius $\cdot$ Winkelgeschwindigkeit ^{2})

1.1.2 Zeichen für Verknüpfungen

Einfache mathematische Zeichen:

$+, -, \cdot, /, \pm$
$=, \neq, \equiv$
$<, >, \leq, \geq$
$\approx, \sim, \propto$
$\ll, \gg$
∞

Logische Zeichen:

$\in, \ni, \notin$
$\subset, \supset, \subseteq, \supseteq$
$\cup, \cap, \setminus, \varnothing$
$\exists, \exists!$
$\forall$
$\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
$:=$
Beispiel: $\forall x : \exists! y : x + y = 0$

Kompliziertere Zeichen:

Summenzeichen $\sum$: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Beispiele:

Gaußsche Summenformel

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$

(denn: $\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Geometrische Summe

$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x-1)$ für $x \neq 1$

(denn: $S_n := \sum_{k=0}^{n} x^k \Rightarrow xS_n - S_n = x^{n+1} - 1 = S_n(x-1)$)

Geometrische Reihe

Speziell: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ für $|x| < 1$.

Produktzeichen $\prod$: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bedeutung des Binomialkoeffizienten (eine von vielen)

→ Binomialformel: $\boxed{(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$

Aufgaben

- Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k, \prod_{k=1}^{4}(-1)^k, \binom{6}{3}$.
- Berechnen Sie $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}$
- Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Zeigen Sie $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
  Trick: Ausmultiplizieren von $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$.
- Betrachten Sie folgenden "Beweis", dass Wasserstoff=Chlor. Wo steckt der Wurm?
  Aus $H_2 + Cl_2 = 2\ HCl$
  folgt H H + Cl Cl - 2 H Cl = 0
  $\Rightarrow$ (H-Cl)^2 = 0
  $\Rightarrow$ H-Cl = 0
  $\Rightarrow$ H = Cl

1.1.3 Einheiten

Vorab: Einheiten $\leftrightarrow$ Maßstäbe
Festlegung von Maßstäben ist eine eigene Wissenschaft.
(Maßstäbe für Zeit, Länge, Masse, Ladung, $\cdots$)

Darüberhinaus gibt es aber noch verschiedene Einheitensysteme.

Häufig (nicht immer) benutzt man heute SI-Einheiten
(syst'eme international d'unit'es)

mit Grundgrößen
Länge: Meter (m)
Zeit: Sekunde (s)
Masse: Kilogramm (kg)
Elektrischer Strom: Amp'ere (A)
Lichststärke: Candela (cd)
ebener Winkel: Radian (rd)
Raumwinkel: Steradian (srd)
Stoffmenge: Mol (mol)

und vielen abgeleiteten Größen, z.B.
Frequenz: Hertz (Hz = 1/s)
Kraft: Newton (N = kg m/s^2)
Energie: Joule (J = N m)

Andere auch gebräuchliche Einheiten
Winkel: Grad ^{0} = $(\pi/180)$ rd = 0.01745 rd, Minute ' = $\frac{1}{60}{}^0$, Sekunde " = $\frac{1}{60}{}'$,
Masse: atomare Masse u=$1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
Energie: Elektronenvolt eV = $1.6022 \cdot 10^{-19}$ J
verschiedene Einheitensysteme im elektromagnetischen Bereich

Größenordnungen

Um Nullen zu vermeiden → international standardisierte Dezimalvorsilben (z.B. m, km, mm, μm, ⋯, entsprechend g, kg, mg, μg, ⋯

$10^{-1} \equiv$ d (Dezi-)
$10^{-2} \equiv$ c (Zenti-)
$10^{-3} \equiv$ m (Milli-)
$10^{-6} \equiv \mu$ (Mikro-)
$10^{-9} \equiv$ n (Nano-)
$10^{-12} \equiv$ p (Pico-)
$10^{-15} \equiv$ f (Femto-)
$10^{-18} \equiv$ a (Atto-)

$10^{1} \equiv$ D (Deka-)
$10^{2} \equiv$ h (Hekto-)
$10^{3} \equiv$ k (Kilo-)
$10^{6} \equiv$ M (Mega-)
$10^{9} \equiv$ G (Giga-)
$10^{12} \equiv$ T (Tera-)
$10^{15} \equiv$ P (Peta-)

Aufgaben

- Wie viele Kubikdezimeter Wasser hält ein Kanister mit Länge 80 cm, Breite 40 cm, Höhe 60 cm?
- Wiviele Stunden und Minuten sind 18600 Sekunden?
- Wieviele Platten der Größe 10 × 20 cm bruacht man, um eine Fläche von 50 m^2 zu pflastern?
- Welchen Längen entsprechen 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde, 1 rad auf der Erdoberfläche (Umfang ist 40.000 kkm).
- Welchen Flächen entspricht auf der Erde 1 Quadratgrad, 1 Quadratminute, 1 Quadratsekunde, 1 Steradian?
- Wieviele Steradian hat eine Kugel?
- Wie lange ist ein Mikrojahrhundert?

1.2 Zahlen

Dieses Kapitel: Rudimentäre Übersicht über verschiedene Arten von Zahlen und deren Eigenschaften.

NB: Obwohl Zahlen uns sehr vertraut sind, sind sie eigentlich höchst abstrakte Gebilde

1.2.1 Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper

- **Mengen**: Verbund von Objekten (Elementen), z.B. $A = \{a, b, c\}$.
  Elemente: Objekte in einer Menge ($a \in A$)
  leere Menge: Menge ohne Elemente ($\varnothing$)
  Teilmenge: z.B. $B = \{b, c\}$ ist Teilmenge von $A = \{a, b, c\}$ ($B \subset A$)
  Obermenge: z.B. $D = \{a, b, c, d\}$ ist Obermenge von $A = \{a, b, c\}$ ($D \supset A$)
  Vereinigungsmenge, Schnittmenge: z.B. sei $C = \{c, d\}$
  $\Rightarrow A \cup C = \{a, b, c, d\}, A \cap C = \{c\}$

- **Abbildung**: Vorschrift, die jedem Element a einer Menge M ein neues Objekt $\varphi(a)$ zuordnet: $a \to \varphi(a)$.
  Dann ist $\varphi(a)$ das Bild von a, a das Urbild von $\varphi(a)$
  Falls $\varphi(a) \in N$ für alle $a \in M$: Abbildung von M in N
  Abbildung surjektiv, wenn alle Elemente von N ein Urbild haben.
  Abbildung injektiv oder eindeutig, wenn es jeweils genau ein Urbild gibt.
  Abbildung bijektiv: Injektiv und surjektiv (eineindeutig).

- **Verknüpfung**: Abbildung von der Menge $M \times M$ (der "Produktmenge") aller Paare (a, b) mit $a, b \in M$: $(a, b) \to \varphi(a, b)$ oder $a \circ b$.
  (z.B. auf Zahlenmengen: Addition, Multiplikation)

- **Gruppe**: Menge G mit einer Verknüpfung mit den Eigenschaften:
  1) Abgeschlossenheit: $a \in G, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$
  2) Assoziativgesetz: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
  3) Neutrales Element: Es existiert eine "Identität" $e \in G$
  mit $e \circ a = a$ für alle $a \in G$.
  4) Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a^{-1} \circ a = e$

- **Abelsche Gruppe**: Gruppe mit der Zusatzeigenschaft
  5) Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

- **Halbgruppe**: Menge mit Verknüpfung, die die Eigenschaften 1) und 2) erfüllt (Abgeschlossenheit und Assoziativgesetz).

- **Ring**: Menge R mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ (Addition, Multiplikation)
  – Abelsche Gruppe bzgl. Addition ($+$)
  – Halbgruppe bzgl. Multiplikation ($\cdot$)
  – Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  Identität bzgl. de Addition heißt üblicherweise Null.

- **Körper**: Ein Ring K mit folgenden Eigenschaften:
  - Mindestens ein Element ist von Null verschieden.
  - $K \setminus \{0\}$ (K ohne Null) ist von Abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation.

Bemerkung: Diese Strukturen wurden natürlich im Hinblick auf die Zahlenmengen eingeführt, die gleich besprochen werden. Sie sind aber auch von viel allgemeinerer Bedeutung: Zusammenhänge, die man nur aus Gruppen-, Ringen- oder Körpereigenschaften beweist, gelten ganz allgemein in allen derartigen Strukturen.

Aufgaben:
- Zeigen Sie: Für Gruppen folgt aus Gruppeneigenschaften auch $a \circ a^{-1} = e$, $a \circ e = a$.
- Sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß dann die Menge der Polynome $f(x) = \sum_{k+0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in R$, n eine natürliche Zahl (siehe 1.2.2), x ein Symbol, auch ein Ring ist.

1.2.2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$: "Natürlich", da seit alters her zum Zählen benutzt.

Axiomatische Definition über Peano-Axiome (Giuseppe Peano, 1858-1932)

I 1 ist eine natürliche Zahl.

II Jede natürliche Zahl a hat einen Nachfolger a^+ in der Menge der natürlichen Zahlen. $(\forall a \in \mathbb{N} : \exists! a^+ \in \mathbb{N})$

III Es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1.

IV Aus $a^+ = b^+$ folgt $a = b$.

V Prinzip der vollständigen Induktion:
Enthält eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 und zu jeder Zahl a auch deren Nachfolger a^+, enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Aus dem letzten Axiom folgt Beweismethode der vollständigen Induktion.

Ziel: Eine Eigenschaft E für alle natürlichen Zahlen N beweisen.

Weg: – Beweise E für $N = 1$
– Nimm an, E gilt für alle $N \leq n \in \mathbb{N}$. Beweise sie für $N = n^+$.
$\Rightarrow$ Dann gilt sie für alle natürlichen Zahlen.

Beispiel: Beweis von $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$:
- Gilt für $N = 1$ ✓
- Gelte für $N \leq n$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{n(n+1)/2 \text{ laut Annahme}} + (n+1) = (n+2)(n+1)/2 \checkmark$$

Auf natürlichen Zahlen kann man Addition und Multiplikation definieren.

Addition über $x + 1 = x^+$, $x + y^+ = (x + y)^+$ $\forall x, y \in \mathbb{N}$

Multiplikation über $x \cdot 1 = x$, $x \cdot y^+ = x \cdot y + x$ $\forall x, y \in \mathbb{N}$

Eigenschaften (ohne Beweis)
- Addition $+$: Assoziativ, kommutativ
- Multiplikation $\cdot$: Assoziativ, kommutativ, Identität

$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist Halbgruppe bzgl Addition und Multiplikation.
- Zusätzlich gelten Distributivgesetze.

Häufig wird noch die Null hinzugenommen: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
Dann hat die Addition auch eine Identität

Bemerkung: Die Griechen und Römer hatten keine Null. In China gab es sie schon seit dem 4. Jhdt. vor unserer Zeitrechnung. Wurde im 12. Jhdt. nach unserer Zeitrechnung von Arabern nach Europa gebracht.

Aufgaben zum Induktionsbeweis:
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

- $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- $n/2 < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$
- Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (erst erraten, dann mit vollständiger Induktion beweisen)

Diskutieren Sie folgende zwei "Beweise", die mit der Methode der vollständigen Induktion geführt wurden. Wo steckt der Wurm?

Beweis, dass alle Zahlen interessant sind:
Die Eins ist interessant (klar, z.B. Identität der Multiplikation).
Nimm an, alle Zahlen kleiner als n sind interessant. Dann ist auch $n+1$ interessant. Anderenfalls wäre es die erste nicht interessante Zahl, und das macht sie auch wieder interessant.

Überraschungstest: Ein Lehrer kündigt für die kommende Woche an, dass er an einem Tag einen Überraschungstest schreiben wird. Die Schüler stellen folgende Überlegung an.
- Am Freitag kann er den Test nicht mehr schreiben,
  da wäre es ja dann kein Überraschungstest mehr.
- Am Donnerstag ist es deshalb auch unmöglich.
- Ebenso am Mittwoch, Dienstag, Montag.
- Folglich wird der Test nicht stattfinden.

(Aber: Dann schreibt der Lehrer dann am Mittwoch völlig überraschend einen Test ...)

1.2.3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Ausgehend von den natürlichen Zahlen

Forderung: Gleichung $\boxed{ax + b = 0}$ soll für alle $a, b \in \mathbb{N}$ lösbar sein.
$\rightsquigarrow$ führt zu negativen Zahlen:
Zu jedem $a \in \mathbb{N}$ gehört ein $(-a)$ mit $a + (-a) = 0$.

(Beispiele: Mathematiker im Aufzug, Schulden, Vorwärts-/Rückwärtsgehen)

Gesamtmenge: Natürliche Zahlen, Null und negative Zahlen bilden zusammen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-a : a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

Eigenschaften:

- In $\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $a + x = b$ immer lösbar ($x = b + (-a)$)
- $\mathbb{Z}$ bildet bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe (a hat Inverses), bzgl. der Multiplikation nach wie vor eine Halbgruppe.
- Distributivgesetze gelten

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ ist ein Ring.

1.2.4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Ausgehend von den ganzen Zahlen

Forderung: Gleichung $\boxed{a \cdot x = b}$ soll lösbar sein für alle $\boxed{a \neq 0}$.
$\rightsquigarrow$ führt zu rationalen Zahlen:
Zu jedem $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gehört ein Inverses a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

- Erweiterung von $\mathbb{Z}$ um Kombinationen $a^{-1}b = b/a$
  $\Rightarrow a \cdot x = b$ wird lösbar.
- Bemerkung: De facto steht eine rationale Zahl für eine ganze Klasse von Tupeln $(a, b) = b/a$, da man kürzen kann
  (z.B. löst 2/3=4/6 sowohl die Gleichung 3x=2 als auch 6x=4).

Gesamtmenge: Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Eigenschaften:

- In $\mathbb{Q}$ ist die Gleichung $a \cdot x = b$ lösbar.
- $\mathbb{Q}$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. $+$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist abelsche Gruppe bzgl. $\cdot$
- $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.

Beispiele: Praktisch gesehen alle Zahlen in der Physik
(Messung liefert immer Dezimalzahl, die irgendwo abbricht.)

1.2.5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Bei rationalen Zahlen sind immer noch einige wichtige Zahlen, nicht enthalten, z.B.

- Lösung von $x^2 = 2$
  und anderen Polynomgleichungen $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$
  Graphisch: $x^2 - 2 = 0$ sollte Lösung haben.
  (Kurve $y = x^2 - 2$ schneidet die Nullinie).
  entsprechende Erweiterung um Zahlen, bei denen in einem Plot $p(x)$ vs. x die Nullinie geschnitten wird (Nullstellen des Polynoms $p(x)$): algebraische Zahlen.

(NB: Unvollständige Erweiterung, da z.B. $x^2 = -1$ nach wie vor keine Lösung hat. Das wird erst mit der Einführung der komplexen Zahlen (s.u.) behoben.)

– Kreiszahl π, Eulersche Zahl e u.a.: Transzendente Zahlen.

Zusammen: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

Bemerkungen

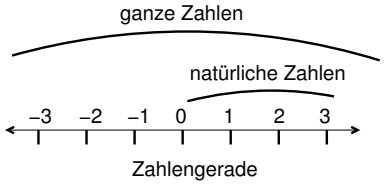
Die Erkenntnis, dass die Lösung von $x^2 = 2$, also $\sqrt{2}$ irrational ist, ist uralt. Das war schon den Pythagoräern bekannt, wurde aber unter den Tisch gekehrt, weil es nicht ins Weltbild passte.

Der Beweis geht so: Nimm an, $\sqrt{2} = p/q$ sei rational. Dann folgt $\sqrt{2}q = p \Rightarrow 2q^2 = p^2$.
Primfaktorzerlegung von p und q: Links steht eine ungerade Zahl Faktoren, rechst eine gerade Zahl. Es gilt aber, dass die Primfaktorzerlegung eindeutig ist. (ohne Beweis: Folgt aus der Theorie der Ringe). Also kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein.

Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ basiert auf der Infinitesimalrechnung / braucht Begriff des Unendlichen.
(Vorgriff auf Begriff der Folgen): $\mathbb{R}$ enthält mit jeder konvergierenden Folge von rationalen Zahlen auch deren Grenzwert. Rationale Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$, d.h. sie kommen beliebig nahe an jede reelle Zahl heran. (In jeder noch so kleinen "ϵ-Umgebung" einer reellen Zahlen liegt auch eine rationale Zahl: $\forall x \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Q} : |x - y| < \epsilon$).

Anschaulich:

Eindeutige Abbildung zwischen Zahlen und Zahlengeraden



1.2.6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Erweiterung so, dass $x^2 = -1$ auch lösbar wird. Dafür muss man das Bild der Zahlengeraden aufgeben / erweitern. Mehr dazu in Kapitel 1.4

1.2.7 Zusammenfassung

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Symbol</th><th rowspan="2">lösbare Gleichungen</th><th rowspan="2">zusätzliche Zahlen</th><th colspan="2">Rechenregeln</th><th rowspan="2">Abbildung</th></tr>
<tr><th>Addition</th><th>Multiplikation</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Natürliche Zahlen</td><td>$\mathbb{N}$</td><td>$a+b=x$
$a\cdot b=x$</td><td></td><td>assoziativ
kommutativ</td><td>assoziativ
kommutativ
Identität</td><td rowspan="2">Gitterpunkte auf Halbgeraden</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{N}_0$</td><td></td><td>Null</td><td>Identität</td><td></td></tr>
<tr><td>Ganze Zahlen</td><td>$\mathbb{Z}$</td><td>$a+x=b$</td><td>Differenzen
$a-b$</td><td>abelsche Gruppe</td><td>Ring</td><td>Gitterpunkte auf Geraden</td></tr>
<tr><td>Rationale Zahlen</td><td>$\mathbb{Q}$</td><td>$a\cdot x=b$
$(a\neq 0)$</td><td>Brüche
b/a</td><td>abelsche Gruppe</td><td>abelsche Gruppe
Körper</td><td>Dicht auf Geraden</td></tr>
<tr><td>Reelle Zahlen</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x^2=a$
$(a\geq 0)$</td><td>Irrationale Zahlen</td><td colspan="2">Körper</td><td>Vollständige Gerade</td></tr>
<tr><td>Komplexe Zahlen</td><td>$\mathbb{C}$</td><td>$x^2=a$
$(a<0)$</td><td>Imaginäre Zahl</td><td colspan="2">Körper</td><td>Zahlen-Ebene</td></tr>
</table>

Aufgaben zum Abschluss:

Was ist an folgenden "Beweisen" falsch?

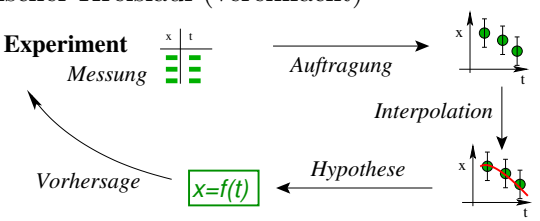
1=0 , denn: Betrachte $x=1$
$\Rightarrow x^2=x$
$\Rightarrow x^2-x=x-1$
$\Rightarrow (x-1)(x+1)=x-1$
$\Rightarrow x+1=1$
$\Rightarrow x=0$ ✓?.

4=5 , denn: Es gilt $16-36=25-45$
$\Rightarrow 16-36+81/4=25-45+81/4$
$\Rightarrow 42-2\cdot 4\cdot \frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2=5^2-2\cdot 5\cdot \frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2$
$\Rightarrow (4-\frac{9}{2})^2=(5-\frac{9}{2})^2$
$\Rightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$
$\Rightarrow 4=5$ ✓?.

1.3 Reelle Funktionen

Bedeutung von Funktionen

- Mathematisch – anderes Word für Abbildung
  z.B. reelle Funktion $f(x) = 1/|x|$
  charakterisiert durch:
  - Definitionsbereich D_f: Erlaubte Werte von x (hier: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
  - Wertebereich W_f: Menge der Bilder (hier: $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$)
  - Abbildungsvorschrift
- Physikalisch – Hilfsmittel zur Formulierung von Theorien und zur Beschreibung von Experimenten.
  Empirischer Kreislauf (vereinfacht)



Dieses Kapitel: Zusammenstellung/Erinnerung an einige wichtige reelle Funktionen und Charakterisierung.

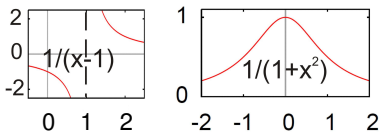
1.3.1 Elementare Funktionen

1.3.1.1 Polynome und rationale Funktionen

- Konstante Funktion: $f(x) = a$ (ebene Linie)
- Lineare Funktion: $f(x) = a + bx$ (Gerade)
- Quadratische Funktion: $f(x) = a + bx + cx^2$ (Parabel)
- Polynome $n$ten Grades: $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$
- Rationale Funktion: $f(x) = p(x)/q(x)$ wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind.

Beispiele

– $f(x) = 1/(x-1)$
– $f(x) = 1/(1+x^2)$
(Lorentzkurve)



Bemerkungen

a) Teilen von Polynomen kann man genauso angehen wie Dividieren
z.B. $(x^2 + 2x - 1)/(x+1) = x + 1 - 2/(x+1)$
$(x^2 + x)$
$(x + 1)$
-2

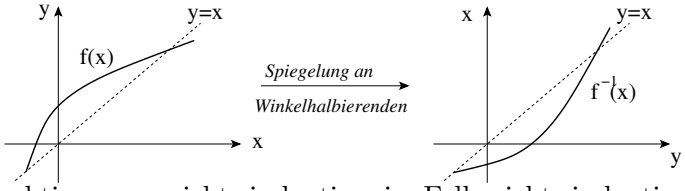
b) Nullstellen von Polynomen:
–Quadratische Gleichungen: $x^2 + px + q = 0$
→ "pq-Formel" $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
–Gleichungen 3. oder 4. Ordnung: Komplizierte Ausdrücke
–Ab 5. Ordnung: Kein allgemeiner algebraischer Ausdruck mehr möglich!
(Satz von Abel-Ruffini)

Aufgaben zu rationalen Funktionen
– Skizzieren Sie x^3, x^4, $1/x^2$, $1/x^3$, $1/(x-2)^2$, $x/(1+x^2)$
– Berechnen Sie $(x^4 - a^4)/(x - a)$

1.3.1.2 Algebraische Funktionen

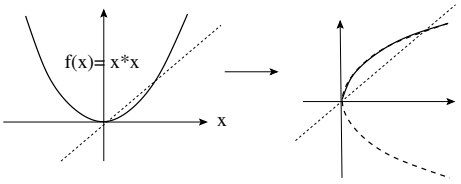
Wurzel: $g(x) = \sqrt{x} \equiv x^{1/2}$ inverse Funktion zu $f(x) = x^2$

Allgemein inverse Funktionen:
Falls $y = f(x)$, ist $x = f^{-1}(y)$ inverse Funktion $(f(f^{-1}(y)) = y)$
Graphisch



NB: Inverse Funktion muss nicht eindeutig sein. Falls nicht eindeutig, muss man sich eine Variante aussuchen.

Speziell Wurzel:
Konvention: $\sqrt{x}$ ist oberer Ast.
NB: Definitionsbereich eingeschränkt $(x \geq 0)$.



Andere rationale Potenzen
z.B. $\sqrt[3]{x} \equiv x^{1/3}$ ist inverse Funktion zu $f(x) = x^3$
$\sqrt[4]{x} \equiv x^{1/4}$ ist inverse Funktion zu $f(x) = x^4$

Zusammengesetzte Ausdrücke
z.B. $\sqrt{x^2 + a^2}/(x-3)^{3/5}$ etc. (mit $y^{3/5} := (y^{1/5})^3$)

Aufgaben zu algebraischen Funktionen / Zahlen
– Skizzieren Sie $1/\sqrt{x}$, $1/\sqrt{x+1}$, $1/\sqrt{x}+1$
– Zeigen Sie folgende Identitäten (Aufgaben aus Indien):
Apastamba, 5.-4. Jhd. v. Christus: $\frac{36}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} (\frac{24}{\sqrt{3}} + \frac{30}{\sqrt{3}}) = 324$
Bhaskara II, 1114-1185: $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$
Ramanujan, 1887-1920: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

1.3.1.3 Exponentialfunktion

Vorab: Rechnen mit Potenzen b^x, b sei positiv ($b > 0$)

– Exponent x natürlich: $x = n \in \mathbb{N}$

b^x definiert durch $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ mal}}$

→ Rechenregeln: $b^n b^m = b^{n+m}$, $(b_n)^m = b^{n \cdot m}$, $(ab)^n = a^n b^n$

– Exponent x eine ganze Zahl, $x \in \mathbb{Z}$

b^x definiert über $b^0 := 1$, $b^{-n} := 1/b^n$

→ Rechenregeln gelten immer noch.

– Exponent x eine rationale Zahl, $x \in \mathbb{Q}$

b^x definiert über $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$, $b^{m/n} = (\sqrt[n]{b})^m$ gemäß 1.3.1.2

→ Rechenregeln gelten immer noch.

Klasse der Exponentialfunktionen

Wähle irgendein $b > 0$

Zeichne b^x für alle $x \in \mathbb{Q}$

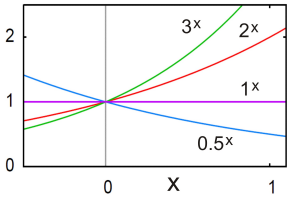
→ schöne, glatte Kurve, Punkte liegen dicht.

→ kann erweitert werden auf $x \in \mathbb{R}$

Für jedes b erhält man eigene Kurve.

Es gilt jeweils Multiplikationstheorem

$$\boxed{\begin{aligned} b^{x+y} &= b^x \cdot b^y \\ (b^x)^y &= b^{x \cdot y} \end{aligned}} \quad \text{für } x, y, b \in \mathbb{R},\ b > 0.$$

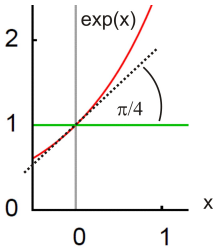


Natürliche Exponentialfunktion

Spezielle Wahl von b, so dass lokaler Winkel zur y-Achse bei $x = 0$ genau $\pi/4$ ist (45 Grad).

Dies gilt für $\boxed{b = 2.71828\cdots =: \mathrm{e}}$: Euler-Zahl (irrational)

Notation $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)}$



Besondere Eigenschaften

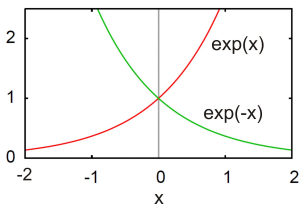
– Ableitung: $f(x) = \exp(x) \Rightarrow f'(x) = f(x)$ (Vorgriff auf Kapitel 3.1)

– Potenzreihe: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ (Vorgriff auf Kapitel 3.2)

– Wachstum: $\exp(x)$ wächst schneller an als jede Potenzfunktion x^n $(\forall n, b > 0 : \exists x_0 : \mathrm{e}^x > b x^n \ \forall x > x_0)$

Bedeutung der Exponentialfunktion

- "exponentielles Wachstum":
  Charakteristisch für ungebremstes Wachstum
  (z.B. Bakterien mit genug Nahrung in Petrischale)
- "exponentieller Zerfall": $(1/e)^x = \exp(-x)$
  charakteristisch für freien Zerfall
  (z.B. radioaktiver Zerfall)



Aufgaben zur Exponentialfunktion

Skizzieren Sie: – $f(x) = 1 - e^{-x}$ (Spannung beim Aufladen eines Kondensators)
– $f(x) = x + e^{-x}$
– $f(x) = x\, e^{-x}$ ('Poissonverteilung')
– $f(x) = x^2\, e^{-x}$
– $f(x) = 1/(e^x - 1)$ ('Bose-Einstein-Verteilung')
– $f(x) = 1/(e^x + 1)$ ('Fermi-Dirac-Verteilung')

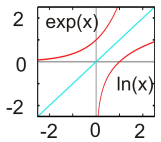
Schauen Sie sich verschiedene Funktionen auf dem Computer an, z.B. Java-Applet "Funktionenschaufenster" im Skript von K. Hefft (www.thphys.uni-heidelberg.de/ hefft/vk1) oder die Seite von Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com)

1.3.1.4 Logarithmus

Inverse Funktion zur Exponentialfunktion

Natürlicher Logarithmus

Inverses zur natürlichen Exponentialfunktion
$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y) \equiv \log(y)$



Dekadischer Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg(y) \equiv {}_{10}\log(y)$

Dyadischer Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = 2^x \Leftrightarrow x = \mathrm{ld}(y) \equiv {}_{2}\log(y)$

Allgemeiner Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = b^x \Leftrightarrow x = {}_{b}\log(y)$
"Logarithmus zur Basis b" (mit $b > 0$)

Rechenregeln: Aus Multiplikationstheorem $b^x\, b^y = b^{x+y}$, $(b^x)^y = b^{xy}$
folgt für jede Basis:

$$\boxed{\begin{array}{l} {}_{b}\log(y \cdot z) = {}_{b}\log(y) + {}_{b}\log(z) \\ y\,{}_{b}\log(z) = {}_{b}\log(z^y) \end{array}}$$

Umrechnung zwischen Exponentialfunktion und Logarithmen:
Rechne als Referenz alles auf natürliche Funktionen um.

$$\boxed{b^x = e^{x \ln(b)}} \qquad (\text{denn: } b = e^{\ln b} \Rightarrow b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \ln b})$$

$$\boxed{{}_{b}\log(y) = \ln(y) \cdot {}_{b}\log(e)} \qquad (\ln(y) \cdot {}_{b}\log(e) = {}_{b}\log(\underbrace{e^{\ln(y)}}_{y}) = {}_{b}\log(y))$$

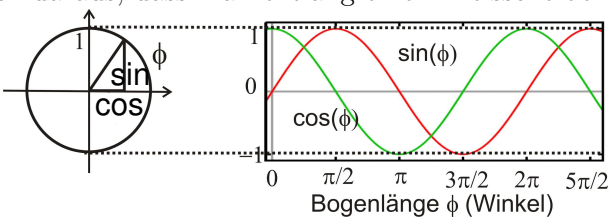
Bemerkung: So wie die Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion anwächst, wächst der Logarithmus langsamer als jede Potenzfunktion:
$\forall \epsilon > 0 : \exists x_0 : \ln(x) < x^\epsilon \ \forall x > x_0$.

Aufgaben zum Logarithmus

– Zeigen Sie ${}_{b}\log(e) = 1/\ln(e)$
(also ist Umrechnungsformel auch: ${}_{b}\log(y) = \ln(y)/\ln(b)$)
– Berechnen Sie ${}_{b}\log(b)$
– Berechnen Sie $\mathrm{ld}(x)$ aus $\ln(x)$.
– Wo steckt der Wurm in folgendem "Beweis" für die Behauptung $2 > 3$.
$1/4 > 1/8 \Rightarrow (1/2)^2 > (1/2)^3 \Rightarrow \ln(1/2)^2 > \ln(1/2)^3$
$\Rightarrow 2\ln(1/2) > 3\ln(1/2) \Rightarrow 2 > 3$ ✓?

1.3.1.5 Trigonometrische Funktionen

Ergeben sich daraus, dass man entlang einer Kreisscheibe läuft



- Eigenschaften

  periodisch mit Periode 2π: $f(x+2\pi) = f(x)$

  $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ ($\leftrightarrow$ Satz des Pythagoras)
  (Notation: $\sin^2(\phi) = (\sin(\phi))^2$ etc.)

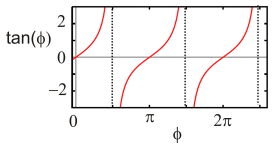
  $\cos(\phi) = \sin(\phi + \pi/2)$

- Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos(a)\ \cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a \pm b) &= \sin(a)\ \cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)\end{aligned}}$$

- Abgeleitete Funktionen

  Tangens: $\tan(\phi) = \sin(\phi)/\cos(\phi)$
  Cotangens: $\cot(\phi) = \cos(\phi)/\sin(\phi)$



- Umkehrfunktionen (zyklometrische Funktionen)

$$\begin{aligned}\sin(x) = y,\ x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\rightarrow x = \text{arc}\sin(y)\\ \cos(x) = y,\ x \in [0, \pi] &\rightarrow x = \text{arc}\cos(y)\\ \tan(x) = y,\ x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\rightarrow x = \text{arc}\tan(y)\\ \cot(x) = y,\ x \in [0, \pi] &\rightarrow x = \text{arc}\cot(y)\end{aligned}$$

Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen
- Skizzieren Sie $\cot(\phi)$, $\text{arc}\tan(\phi)$, $\phi + \sin(\phi, \sin(\phi)/\phi$.
- Zeigen Sie: $\sin^2(\phi) = \tan^2(\phi)/(1+\tan^2(\phi))$
- Zeigen Sie: $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\ \cos(\frac{x-y}{2})$

1.3.1.6 Hyperbolische Funktionen

Aus Exponentialfunktion abgeleitet
Eigenschaften, die an trigonometrische Funktionen erinnern

- Definition

  Sinus hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$
  Cosinus hyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$
  Tangens hyperbolicus: $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$
  Cotangens hyperbolicus: $\coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x)$

- Eigenschaften

  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

- Additionstheoreme

  $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\ \cosh(y) \pm \sinh(x)\ \sinh(y)$
  $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\ \cosh(y) \pm \cosh(x)\ \sinh(y)$
  (kann durch Einsetzen leicht nachgeprüft werden)

→ Große Ähnlichkeit mit trigonometrischen Funktionen
Deutet auf Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und Sinus/Cosinus hin – wird ersichtlich nach Einführung der komplexen Zahlen. (Kap. 1.4).

- Umkehrfunktionen: Area-Funktionen

  $\sinh(x) = y, \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arsinh}(y)$
  $\cosh(x) = y,\ x \in [0, \infty] \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arcosh}(y)$
  etc.

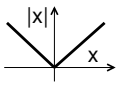
Aufgaben zu hyperbolischen Funktionen
– Skizzieren Sie $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \operatorname{arsinh}(x)$
– Beweisen Sie die Additionstheoreme.
– Zeigen Sie: $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

1.3.1.7 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

Es gibt vor allem zwei wichtige derartige Funktionen

- **Betragsfunktion** $y = |x|$
  Definition des Betrages: Sei $a \in \mathbb{R}$

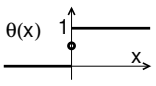
$$|a| = \begin{cases} a & : \quad a > 0 \\ -a & : \quad a < 0 \end{cases}$$



  Rechenregeln:
  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
  $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

- **Heavisidesche Stufenfunktion** $\Theta(x)$

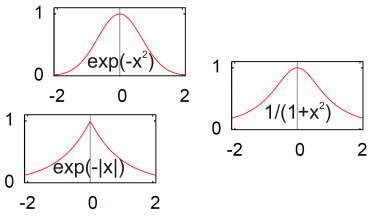
$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0.5 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$



  Beispiel: $\Theta(x - a)\ \Theta(b - x)$ (mit $a < b$) gibt Kastenfunktion.

1.3.1.8 Weitere wichtige abgeleitete Funktionen

- Gaußfunktion: $f(x) = \exp(-x^2)$
- Lorentzfunktion: $f(x) = 1/(1 + x^2)$
- $f(x) = \exp(-|x|/a)$



1.3.2 Eigenschaften von Funktionen

1.3.2.1 Spiegelsymmetrie

$y = f(x)$ gerade, wenn $f(-x) = f(x)\ \forall x$ (z.B. x^2)

$y = f(x)$ ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)\ \forall x$ (z.B. x^3)

Bemerkung: Man kann jede Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen: $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ mit
$f_g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $f_u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

1.3.2.2 Beschränktheit

Funktion heisst nach oben (unten) beschränkt im Intervall $[a, b]$, wenn es eine obere (untere) Schranke für Funktionswerte gibt.

$\left| y = f(x) \text{ nach} \binom{\text{oben}}{\text{unten}} \text{beschränkt in } [a,b] \Leftrightarrow \exists B : B \binom{\geq}{\leq} f(x)\ \forall x \in [a,b] \right.$

1.3.2.3 Monotonie

Funktion heisst monoton steigend (fallend) im Intervall $[a, b]$, wenn mit wachsendem Argument die Funktionswerte steigen (fallen)

$\left| y = f(x) \text{ monoton} \binom{\text{steigend}}{\text{fallend}} \text{in } [a,b] \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in [a,b] : f(x_1) \binom{\leq}{\geq} f(x_2) \right.$

$\left| y = f(x) \underline{\text{streng}} \text{ monoton} \binom{\text{steigend}}{\text{fallend}} \text{in } [a,b] \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in [a,b] : f(x_1) \binom{<}{>} f(x_2) \right.$

Anwendung auf einige der Funktionen in 1.3.1 (im Definitionsbereich)

Funktion	Symmetrie (gerade, ungerade)	Beschränktheit oben	Beschränktheit unten	Monotonie (steigend, fallend)
$\sin(x)$	u	✓	✓	–
$\cos(x)$	g	✓	✓	–
$\exp(x)$	–	–	✓	s
$\log(x)$	–	–	–	s
$\sinh(x)$	u	–	–	s
$\cosh(x)$	g	–	✓	–

1.3.2.4 Eineindeutigkeit

Definitionsbereich D_f sei $[a, b]$. Funktion $f(x)$ ist eineindeutig, wenn zu jedem Punkt in D_f genau ein Punkt im Wertebereich W_f gehört.

$\left| y = f(x) \text{ eineindeutig in } [a,b] \Leftrightarrow \forall y \in W_f : \exists! x \in [a,b] : y = f(x) \right.$

→ dann ist die Umkehrung von $f(x)$ eindeutig ("umkehrbar eindeutig") bzw. $f(x)$ ist surjektiv (vgl. 1.2.1).

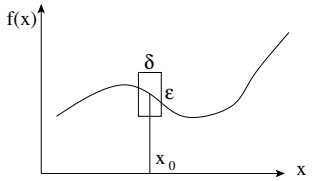
Bemerkung: Streng monotone Funktionen sind eineindeutig.

1.3.2.5 Stetigkeit

Anschaulich: Keine Sprünge

Mathematisch:

Stetig bei x_0 → kein Sprung
→ $f(x)$ rückt nahe an $f(x_0)$,
wenn x nahe an x_0 rückt.



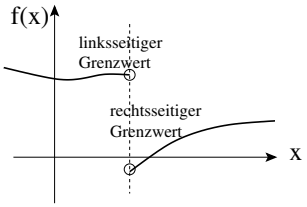
$$\left| y = f(x) \text{ stetig bei } x_0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \; \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \right.$$

Beispiele:
- $\sin(x), \cos(x), \exp(x), \log(x)$ im gesamten Definitionsbereich stetig.
- $1/x$ bei $x = 0$ nicht stetig (divergiert sogar!), sonst überall stetig.
- Heaviside-Funktion bei $x = 0$ nicht stetig.

1.3.2.6 Grenzwerte

- Grenzwert an vorgegebenen Punkten x_0:

$f(x)$ nähert sich bei Annäherung an x_0 einem Grenzwert y_0 beliebig nahe an, z.B.



Mathematisch: Grenzwert wird durch $\lim_{x \to x_0}$ dargestellt.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \; \forall x \in D_f \text{ mit } 0 < x - x_0 < \delta \right.$$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \; \forall x \in D_f \text{ mit } 0 < x_0 - x < \delta \right.$$

Allgemeiner Grenzwert: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \; \forall x \in D_f \text{ mit } |x - x_0| < \delta \right.$$

(falls Definitionsbereich das Intervall um x_0 einschließt, impliziert das rechtsseitiger Grenzwert = linksseitiger Grenzwert.)

Bemerkungen:

(i) $\lim_{x \to x_0^\pm} = y_0$ bedeutet nicht automatisch $f(x_0) = y_0$
Gegenbeispiel ist Heaviside-Funktion:
$\lim_{x \to 0^-} \theta(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = 1$, $\theta(0) = 1/2$.

(ii) Stetigkeit bei x_0 bedeutet: Grenzwert bei x_0 exisitiert und ist gleich dem Funktionswert

- Grenzwert im Unendlichen ($\pm\infty$):
  $f(x)$ nähert sich bei grossen x oder $-x$ beliebig nahe einem Grenzwert an (z.B. $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$)

  $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \Delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \; \forall x \text{ mit } x > \Delta$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \Delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \; \forall x \text{ mit } x < -\Delta$

- Regel von l'Hospital (ohne Beweis)

  Oft hilfreich zur Bestimmung schwieriger Grenzwerte

  Betrachte Grenzwert der Form $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
  mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
  oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

  Zur Berechnung des Grenzwertes bestimme Ableitungen $f'(x), g'(x)$ von $f(x), g(x)$ (Vorgriff auf Abschnitt 3.1, hoffentlich bekannt aus der Schule!).

  Falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beispiele
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$,
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$,
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$,
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1+x^2} = \infty$ (Grenzwert existiert nicht).
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
  (Berechnung nach l'Hospital mit $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$:
  $\Rightarrow f'(x) = \cos x, f'(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$)

NB: Gründe, warum Funktionen eventuell keinen Grenzwert haben:
- $\lim f(x)$ divergiert (wird $\pm\infty$)
- Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert verschieden.
- Grenzwert nicht eindeutig

Aufgaben
- Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{1-x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{1-x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x}$
- Berechnen Sie $\lim_{x\to 0}(\tan x)^2$, $\lim_{x\to\infty}(\tan x)^2$, $\lim_{x\to 0} \arctan x$, $\lim_{x\to\infty} \arctan x$.
- Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \tanh x$, $\lim_{x\to 0} |x|$ $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$.
- Betrachten Sie Grenzwerte von Funktion $\exp(-1/x)$. bei $x = 0$ und $x = \pm\infty$.
- Skizzieren Sie $\exp(-1/x)$.

1.4 Komplexe Zahlen

1.4.1 Die imaginäre Einheit

Zum Abschluss: Weitere Erweiterung des Zahlenraums.
Bislang hatten wir die Zahlenklassen:

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$

↓ Lösbarkeit von $a + x = b$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

↓ Lösbarkeit von $ax = b$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

↓ Ganzer Zahlenstrahl

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

↓ Lösbarkeit beliebiger Polynomgleichungen:
$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$

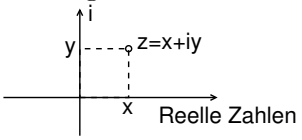
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Wie geht das?

Gute Nachricht:
Es genügt, eine einzige neue Zahl einzuführen:
Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ (Euler).
$x = i$ löst die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.
Mit i konstruiere allgemein neue Zahlen $\boxed{z = x + iy}$ $(x, y \in \mathbb{R})$
→ Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$.

Damit wird *jede* Polynomgleichung lösbar (Satz von Abel)
– Jedes Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden
$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$
(Fundamentalsatz der Algebra):
– Viele andere nützliche Eigenschaften.
Viele Rechnungen werden sehr viel einfacher.

"Schlechte" Nachricht:
Darstellung der Zahlen auf Zahlenstrahl nicht mehr möglich.
→ Übergang zur Gaußschen Zahlenebene
Komplexe Zahl entspricht Punkt in der Ebene
Vergleichsrelationen wie <, > (kleiner, größer)
machen dann keinen Sinn mehr.



Frage: Brauchen Physiker das?

1) Nein: Wir kommen ja eigentlich zur Beschreibung von Experimenten schon mit rationalen Zahlen aus!

2) Ja: Viele Dinge vereinfachen sich erheblich, wenn man komplexe Zahlen zulässt.

Viele Formeln werden sehr kompliziert, wenn man versucht, mit reellen Zahlen auszukommen
– insbesondere im Zusammenhang mit Schwingungen, Wellen, Elektrotechnik, Quantenmechanik

Also: Wenn wir uns das Leben schwer machen wollen, versuchen wir, ohne komplexe Zahlen auszukommen. Wenn wir bequem sein wollen, machen wir uns jetzt die Mühe, sie kennenzulernen und uns daran zu gewöhnen (wie seinerzeit an die negativen Zahlen).

1.4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

1.4.2.1 Rechnen mit der imaginären Einheit

Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ bzw. $i^2 + 1$: Lösung von $z^2 = 1$: $\boxed{z = \pm i}$

Folgerung: Potenzen

$i^0 = 1$
$1/i$ invers zu $i \Rightarrow \boxed{1/i = -i}$
(check: $(1/i) \cdot i = (-i)i = -i^2 = 1$ ✓)
$1/i^2 = (1/i)^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$
$1/i^3 = i$
$1/i^4 = 1$
etc.

$i^3 = (i^2)i = -i$
$i^4 = (i^3)i = -i^2 = 1$
$\vdots$
$i^{4n} = 1$
$i^{4n+1} = i$
$i^{4n+2} = -1$
$i^{4n+3} = -i$
} für $n \in \mathbb{Z}$

Aufgaben: Was ist $i^5, i^{45}, (-i)^{20}, (-i)^{-3}$?

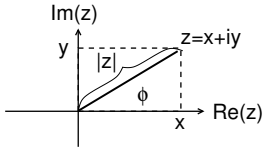
1.4.2.2 Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:

Gegeben $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$)

Dann ist $x =: \Re(z) \equiv \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z (eindeutig!)
$y =: \Im(z) \equiv \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z (eindeutig)

Alternativ: Polarkoordinaten in der Zahlenebene

$z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$
mit ϕ: Argument von z (nicht eindeutig, außer man schränkt ein, z.B. $\phi \in [0, 2\pi]$)
$|z|$: Betrag von z



Berechnung von ϕ und $|z|$ aus x und y:
Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras)
Argument: Aus $\left.\begin{array}{l} x = |z|\cos(\phi) \\ y = |z|\sin(\phi) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$

Aufgaben
– Berechnen Sie Betrag und Argument von $1 + i, 1 - i$
– Was ist falsch an folgender Rechnung? $-1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

1.4.2.3 Euler-Formel

Darstellung $z = |z|\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ kann stark vereinfacht werden mit Hilfe der Formel

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)}$$

Erweiterung der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen. Begründing kommt in Kapitel 3.2 (Die linke und rechte Seite der Gleichung haben die gleiche Potenzreihe). Es gelten die üblichen Rechenregelne für $\exp(x)$.
z.B. Checke $e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2}$

$$\begin{aligned} e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} &= (\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \\ &= \cos\phi_1\cos\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1) + i^2\sin\phi_1\sin\phi_2 \\ &= \underbrace{[\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2]}_{\cos(\phi_1+\phi_2)} + i\underbrace{[\sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1]}_{\sin(\phi_1+\phi_1} \\ &= \cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2) = e^{i(\Phi_1+\phi_2)} \checkmark \end{aligned}$$

Speziell gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\exp(2\pi i) = 1 \\ &\exp(i\pi) = -1 \\ &\exp(i\pi/2) = i \\ &\exp(-i\pi/2) = -i \end{aligned}}$$

und: $\exp(i(\phi + 2\pi)) = \exp(i\phi)$
ist periodisch mit Periode 2π.

Die Polarkoordinatendarstellung von $z = x + iy$ ist dann: $\boxed{z = |z|\,\exp(i\phi)}$

1.4.2.4 Rechenregeln

- Addition $z = x + iy, w + u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$
  $\Rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$
  Realteil und Imaginärteil werden getrennt addiert.
  Man sieht direkt dass die Gesetze für abelsche Gruppen gelten.
  (Abgeschlossenheit ✓, Assoziativität ✓, Kommutativität ✓,
  Null: $0 + 0i$ erfüllt $z + 0 = z\ \forall z$ ✓
  Negatives: $-z = -x - iy$ erfüllt $z + (-z) = 0\ \forall z$ ✓
  Anschaulich: Komplexe Zahl enspricht Vektor (x, y) in Zahlenebene.
  Addition entspricht Vektoraddition.

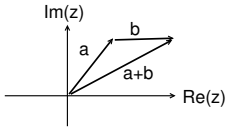
- Multiplikation $z = x + iy, w + u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$
  $\Rightarrow z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(yu + xv)$
  Anschaulich am ehesten in Polarkoordinaten zu begreifen:
  $z = |z|e^{i\phi}, w = |w|e^{i\psi} \Rightarrow z \cdot w = |z| \cdot |w|\, e^{i(\phi+\psi)}$
  Daran sieht man, dass wieder abelsche Gruppengesetze gelten:
  (Abgeschlossenheit ✓, Assoziativität ✓, Kommutativität ✓,
  Eins: $1 + 0i$ erfüllt $z \cdot 1 = z\ \forall z$ ✓
  Inverses: $1/z == (1/|z|)\, e^{-i\phi}$ erfüllt $(1/z) \cdot z = 1\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ✓

Distributivgesetze gelten auch.

$\Rightarrow$ Insgesamt bilden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wieder einen Körper!

1.4.2.5 Spezielle Transformationen

- Betrag (hatten wir schon, hier nur wiederholt)
  $z = x + iy \Rightarrow$ Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  Bei den komplexen Zahlen gilt immer noch die Dreiecksungleichung:
  $$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$
  (wird aus Skizze anschaulich
  sauberer Beweis siehe Mathe-Vorlesungen)
  NB: Hier macht der Begriff "Dreieck" erst Sinn!



- Komplexkonjugation

  $z = x + iy \Rightarrow$ Komplexkonjugiertes $z^* = x - iy$

  Entspricht Spiegelung an der reellen Achse

  In Polarkoordinaten: $z = |z|e^{i\phi} \Rightarrow z^* = |z|e^{-i\phi}$

  Speziell: $z = x + iy = |z|e^{i\phi}, w = u + iv = |w|e^{i\psi}$
  $(z + w)^* = z^* + w^*$
  $(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$
  (check: $(zw)^* = (|z||w|e^{i(\phi+\psi)})^* = |z||w|e^{-i(\phi+\psi)} = z^*w^*\checkmark$)
  $(z \cdot z^*) = |z|^2$

Aufgaben
- Berechnen Sie für $c = 3 + 3i\sqrt{3}$: $cc^*, c^2, c/c^*, 1/c, 1/c^*, 1/c + 1/c^*, 1/c - 1/c^*, c^3$
- Berechnen Sie allgemein für $z = re^{i\phi}$: $zz^*, z^2, z/z^*, |z/z^*|, 1/z + 1/z^*, 1/z - 1/z^*$
- Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Zahlen $c, ic, 1/c, 1/c^*$ für $c = 1 - i$ und $c = 1 + 2i$.

1.4.3 Funktionen einer komplexen Variablen

Vorab: Grundsätzliche Definition einer Funktion wie bei den reellen Zahlen:
Abbildung $f(z)$ von komplexer Zahl z auf komplexe Zahl w.
Vieles kann man aus Kapitel 1.3.2 sinngemäß übernehmen, z.B.

- Definition von Stetigkeit (keine Sprünge)
  $w = f(z)$ stetig bei z_0
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 (\in \mathbb{R}) : \exists \delta > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \; \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \delta$
- Definition von Grenzwerten
  $\lim_{z \to z_0} = w_0$
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 (\in \mathbb{R}) : \exists \delta > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z) - w_0| < \epsilon \; \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \delta$
- Definition von Beschränktheit
  $f(z)$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists B > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z)| \leq B \; \forall z$
  (Beschränktheit "nach oben" oder "nach unten" macht keinen Sinn mehr.)

Weitere Funktionen, die wir in 1.3.1 diskutiert haben, lassen sich ohne weiteres für komplexe Zahlen erweitern.
Nur: Graphische Darstellung wird schwieriger (4D?)

1.4.3.1 Potenzen

Gegeben komplexe Variable $z = x + iy = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$

$n$te Potenz ist (äquivalente Schreibweisen, $n \in \mathbb{N}_0$)
$z^n = (x+iy)^n = |z|^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n$
$= |z|^n(e^{i\phi})^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

Also: Für $z \to z^n$
Betrag $|z| \to |z|^n$
Argument $\phi \to n\phi$

Bemerkung: Liefert nebenbei Formeln für $\cos(n\phi)$ und $\sin(n\phi)$
Man muss nur $|z| = 1$ setzen. Betrachte z.B. $n = 2$:
$\cos(2\phi) + i\sin(2\phi) = (\cos\phi + i\sin\phi)^2$
$= (\cos^2\phi - \sin^2\phi) + i \cdot 2\sin\phi\cos\phi$
Vergleiche Realteil $\Rightarrow \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi$
Vergleiche Imaginärteil $\Rightarrow \sin(2\phi) = 2\cos\phi\sin\phi$

1.4.3.2 Wurzeln

Weitgehend analog zu Potenzen: Für $z = |z|e^{i\phi}$ ist $n$te Wurzel:
$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (|z|e^{i\phi})^{1/n = |z|^{1/n} e i\phi/n} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\phi/n}$

Einziger Unterschied zum Reellen:

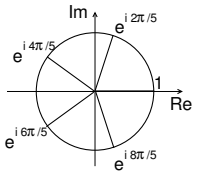
Im Reellen gibt es eine Konvention, zu welcher von mehreren Lösungen von $x^n = a > 0$ der Ausdruck $x = \sqrt[n]{a}$ gehört (positiver Ast).

Im Komplexen gibt es keine solche Konvention, es muss jedesmal extra spezifiziert werden. Insofern ist der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ im Komplexen mehrdeutig!

Konkreter: Gleichung $w^n = z$ hat n verschiedene Lösungen.

- Diskutiere zuerst $w^n = 1$, also $\sqrt[n]{1}$.
  Da $1 = e^0 = e^{i\cdot 2\pi} = e^{i\cdot 4\pi} = \cdots = e^{i\cdot 2m\pi}$ $(m \in \mathbb{N})$,
  ist $\sqrt[n]{1} = e^0, e^{i\cdot 2\pi/n}, e^{i\cdot 4\pi/n}, \cdots e^{i\cdot 2m\pi/n}$

  → "Einheitswurzeln":
  Einheitskreis in n "Tortenstücke" aufgeteilt.
  Wurzeln entsprechen Randpunkten $e^{i\cdot 2m\pi/n}$
  Erst nach n Punkten geht es wieder von vorne los.



- Allgemein $w^n = z$ mit $z = |z|e^{i\phi} = |z|e^{i\phi}\cdot 1$
  $\Rightarrow$ Lösungen $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\phi/n}$; $\sqrt[n]{|z|}e^{i\phi/n + i2\pi k/n}$ $(k \in \mathbb{Z})$
  Von diesen sind n verschieden.

Beispiele

- Wurzeln $\sqrt{i}$, also Lösungen von $w^2 = i$
  $i = 1 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow w_1 = e^{i\pi/4}; w_2 = e^{i\pi/4} \underbrace{e^{i2\pi/2}}_{-1} = -e^{i\pi/4}$
  $$\Rightarrow w_{1,2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm(\underbrace{\cos(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}} + i\underbrace{\sin(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}}) = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$
- $\sqrt[3]{8i}$, also Lösungen von $w^3 = 8i$
  $8i = 8 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow w_1 = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{2}\frac{1}{3}} = 2e^{i\pi/6}$
  $w_2 = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{2}\frac{1}{3}+i2\pi\frac{1}{3}} = 2e^{i\pi\cdot 5/6}$
  $w_3 = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{2}\frac{1}{3}+i2\pi\frac{2}{3}} = 2\underbrace{e^{i\pi\cdot 3/2}}_{-i} = -2i$

Aufgaben
Berechnen Sie $\sqrt[2]{8i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[3]{1+i}$

1.4.3.3 Exponentialfunktion (natürlich)

Erweiterung der Exponentialfunktion auf imaginäre Zahlen über Euler-Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

Erweiterung auf allgemeine komplexe Zahlen $z = x + iy$ über Multiplikationstheorem $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{\text{Betrag}} \underbrace{(\cos y + i\sin y)}_{y\text{: Argument}}$.

1.4.3.4 Logarithmus (natürlich)

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. $w = \ln z \Rightarrow z = e^w$

Mit $z = |z|e^{i\phi}$ folgt $|z|e^{i\phi} = e^{\ln|z|+i\phi} = e^w$, also $w = \ln|z| + i\phi$.

Achtung: Auch hier gibt es, wie bei den Wurzeln, eine Mehrdeutigkeit.
Mit $w = \ln|z| + i\phi$ ist auch $w_k = \ln|z| + i\phi + 2\pi ik$ eine Lösung von $z = e^w$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
→ Ausdruck $\ln z$ ist ebenfalls nicht eindeutig definiert.

Konvention: Die Lösung mit $-\pi < \phi < \pi$ ist herausgehoben und heißt "Hauptwert". Notation dafür: $\mathrm{Ln}(z)$.

Aber: Der Ausdruck $\ln(z)$ ist mehrdeutig, und wenn er verwendet wird, muss zusätzlich festgelegt werden, was gemeint ist.

Beispiel: $\ln(i) = \ln(e^{i\pi/2}) = i\pi/2; i(\pi/2 + 2\pi); i(\pi/2 + 4\pi), \cdots$

Bemerkung: Mit Hilfe des Logarithmus kann man nun auch allgemeine Potenzen berechnen: $b^z = e^{z\ln b}$. Da aber $\ln b$ nicht eindeutig ist, ist b^z auch nicht eindeutig. Solche Ausdrücke kommen aber in der Praxis (in der Physik) eher nicht vor.

Aufgaben
Berechnen Sie $\ln(-1), \ln(-i), i^i$.

1.4.3.5 Trigonometrische Funktionen

Erhält man aus Umkehrung der Euler-Formel

Zunächst reelle ϕ:

Aus $e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\sin\phi \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ \sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \end{cases}$

Erweiterung auf komplexe Zahlen:

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

Folgerungen

- Es gilt nach wie vor $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
  (Check durch Einsetzen:
  $\cos^2 z = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})$
  $\sin^2 z = \frac{1}{4}(\frac{1}{i})^2(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})$
  $\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}(2+2) = 1 \quad \checkmark$)
- Man erkennt unmittelbar den Zusammenhang mit den hyperbolischen Funktionen:
  $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
  $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
  Daran sieht man $\boxed{\cos(z) = \cosh(iz),\ \sin(z) = \frac{1}{i}\sinh(iz)}$

Aufgaben

- Zeigen Sie $\cos(iz) = \cosh(z), \sin(iz) = i\sinh(z)$
- Berechnen Sie $\cos(\pm\pi/2), \cos(\pm\pi)$ aus der Euler-Formel.
- Berechnen Sie $\cos(\pi \pm i\pi), \cos(\pi/2 \pm i\pi)$
- Zeigen Sie $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$