Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014[*]

Universität Mainz
Fachbereich 08
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes
- Zahlen
- Reelle Funktionen
- Komplexe Zahlen

Vektorrechnung
- Vektoren und Vektorräume
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung
- Folgen und Reihen
- Differenzieren
- Potenzreihen
- Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

---

[*]Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs
(online unter http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha http://www.wolframalpha.com/examples

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes **1**

1.1 Die Sprache der Physik . . . 1

1.1.1 Zeichen für physikalische Größen . . . 2

1.1.2 Zeichen für Verknüpfungen . . . 3

1.1.3 Einheiten . . . 4

1.2 Zahlen . . . 6

1.2.1 Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper . . . 6

1.2.2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ . . . 7

1.2.3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ . . . 8

1.2.4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . 9

1.2.5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ . . . 9

1.2.6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ . . . 10

1.2.7 Zusammenfassung . . . 11

1.3 Reelle Funktionen . . . 12

1.3.1 Elementare Funktionen . . . 12

1.3.1.1 Polynome und rationale Funktionen . . . 12

1.3.1.2 Algebraische Funktionen . . . 13

1.3.1.3 Exponentialfunktion . . . 14

1.3.1.4 Logarithmus . . . 15

1.3.1.5 Trigonometrische Funktionen . . . 16

1.3.1.6 Hyperbolische Funktionen . . . 16

1.3.1.7 Funktionen mit Ecken und Sprüngen . . . 17

1.3.1.8 Weitere wichtige abgeleitete Funktionen . . . 17

1.3.2 Eigenschaften von Funktionen . . . 18

1.3.2.1 Spiegelsymmetrie . . . 18

1.3.2.2 Beschränktheit . . . 18

1.3.2.3 Monotonie . . . 18

1.3.2.4 Eineindeutigkeit . . . 18

1.3.2.5 Stetigkeit . . . 19

1.3.2.6 Grenzwerte . . . 19

1.4 Komplexe Zahlen . . . 21
1.4.1 Die imaginäre Einheit . . . 21
1.4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 22
1.4.2.1 Rechnen mit der imaginären Einheit . . . 22
1.4.2.2 Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen: 22
1.4.2.3 Euler-Formel . . . 23
1.4.2.4 Rechenregeln . . . 23
1.4.2.5 Spezielle Transformationen . . . 24
1.4.3 Funktionen einer komplexen Variablen . . . 24
1.4.3.1 Potenzen . . . 25
1.4.3.2 Wurzeln . . . 25
1.4.3.3 Exponentialfunktion (natürlich) . . . 26
1.4.3.4 Logarithmus (natürlich) . . . 26
1.4.3.5 Trigonometrische Funktionen . . . 27

2 Vektorrechnung 29
2.1 Vektoren . . . 29
2.1.1 Definition bzw. Begriffsklärung . . . 29
2.1.2 Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung . . . 30
2.1.3 Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume . . . 31
2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt) . . . 33
2.2.1 Definition und mathematische Struktur . . . 33
2.2.2 Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol . . . 33
2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) . . . 35
2.3.1 Definition und mathematische Struktur . . . 35
2.3.2 Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol . . . 35
2.3.3 Höhere Vektorprodukte . . . 36

3 Infinitesimalrechnung 39
3.1 Folgen und Reihen . . . 39
3.1.1 Folgen . . . 39
3.1.2 Reihen . . . 40
3.2 Differentialrechnung . . . 42
3.2.1 Die Ableitung . . . 42
3.2.2 Elementare Beispiele . . . 44
3.2.3 Differentiationsregeln . . . 46
3.2.4 Anwendungen der Differentiationsregeln . . . 47
3.2.5 Tabelle wichtiger Ableitungen . . . 48
3.2.6 Vektorwertige Funktionen . . . 49

3.2.6.1 Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen . . . 49
3.2.6.2 Speziell Raumkurven . . . 49
3.2.7 Extremwertaufgaben . . . 51
3.3 Taylor-Entwicklung . . . 55
3.3.1 Kurzer Abriss über Potenzreihen . . . 55
3.3.2 Konstruktion der Taylor-Reihe . . . 57
3.3.3 Anwendungen . . . 59
3.4 Integralrechnung . . . 62
3.4.1 Das Riemannsche Integral . . . 62
3.4.2 Hauptsatz und Stammfunktion . . . 63
3.4.3 Integrationsmethoden . . . 65
3.4.4 Uneigentliche Integrale . . . 68
3.4.5 Mehrfachintegrale . . . 70
3.4.5.1 Beispiele . . . 70
3.4.5.2 Polarkoordinaten . . . 71
3.4.5.3 Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante . . . 73

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen 77
4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 78
4.1.1 Separable Differentialgleichungen . . . 78
4.1.2 Lineare Differentialgleichungen . . . 79
4.2 Systeme von Differentialgleichungen . . . 81
4.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . 81
4.2.2 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . 81
4.2.3 Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 82
4.2.4 Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . 85

5 Vektoranalysis 87
5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung . . . 87
5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren . . . 87
5.1.2 Felder . . . 88
5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral . . . 88
5.1.4 Flächenintegral . . . 89
5.2 Der Nabla-Operator . . . 90
5.2.1 Skalare Felder und Gradient . . . 90

5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation . . . 91
5.2.3 Der Laplace-Operator . . . 91
5.2.4 Wichtige Zusammenhänge . . . 92
5.3 Krummlinige Koordinaten . . . 92
5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme . . . 92
5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen . . . 94
5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme . . . 96
5.4 Integralsätze . . . 97
5.4.1 der Gaußsche Integralsatz . . . 97
5.4.1.1 Der Satz . . . 97
5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz . . . 98
5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene . . . 99
5.4.3 Der Integralsatz von Stokes . . . 100

6 Die Diracsche Delta-Funktion 103
6.1 Motivation und Einführung . . . 103
6.2 Definition . . . 104
6.3 Darstellungen der Delta-Funktion . . . 104
6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen . . . 104
6.3.2 Darstellung als Integral . . . 106
6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion . . . 106
6.5 Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen . . . 107

7 Die Fouriertransformation 109
7.1 Diskrete Fouriertransformation . . . 110
7.1.1 Definition . . . 110
7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation . . . 111
7.2 Fourierintegral . . . 112
7.2.1 Definition . . . 112
7.2.2 Eigenschaften und Rechenregeln . . . 113
7.2.3 Paare von Fourier-Transformierten . . . 114
7.2.4 Anwendungsbeispiele . . . 116
7.2.4.1 Wellengleichung . . . 116
7.2.4.2 Diffusionsgleichung . . . 116
7.2.4.3 Greensche Funktion . . . 116
7.3 Fourierreihe . . . 118
7.3.1 Definition . . . 118
7.3.2 Darstellung in trigonometrischen Funktionen . . . 119

8 Partielle Differentialgleichungen 121
8.1 Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik 121
8.1.1 Elliptischer Typ 122
8.1.2 Hyperbolischer Typ 122
8.1.3 Parabolischer Typ 123
8.2 Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen 123
8.2.1 Laplace-Gleichung 124
8.2.1.1 Numerische Lösung 124
8.2.1.2 Lösung mit Separation der Variablen 124
8.2.2 Wellengleichung 126
8.2.2.1 Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation 126
8.2.2.2 Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz 127
8.2.3 Diffusionsgleichung 128
8.2.3.1 Separationsansatz und asymptotisches Verhalten 128
8.2.3.2 Propagatordarstellung 129
8.2.4 Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion 129

9 Orthogonale Funktionen 131
9.1 Allgemeiner Rahmen 131
9.1.1 Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme 131
9.1.2 Das Sturm-Liouville-Problem 132
9.1.3 Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen 133
9.2 Legendre-Polynome 134
9.2.1 Die einfache Legendresche Differentialgleichung 134
9.2.2 Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome 135
9.2.3 Zugeordnete Legendre-Polynome 136
9.2.4 Kugelflächenfunktionen 137
9.3 Die Besselsche Differentialgleichung 139

A Anhang: Matrizen 141
A.1 Beispiele von Matrizen 141
A.2 Elementare Begriffe 143
A.3 Rechnen mit Matrizen 143
A.4 Determinanten 145
A.5 Drehungen und Drehmatrizen 148
A.6 Das Eigenwertproblem 149
A.7 Funktionen von Matrizen 151

B Anhang: Analytische Funktionen **153**

B.1 Definitionen 153

B.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 154

B.3 Integralsätze 155

B.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe 156

Kapitel 2

Vektorrechnung

Logisch wäre es, in der Vorlesung an dieser Stelle mit Infinitesimalrechnung und Potenzreihen weiterzumachen (Kapitel 3). Es soll aber relativ unmotiviert ein Kapitel über Vektoren eingeschoben werden, da die elementaren Begriffe der Vektorrechnung in den Vorlesungen der Experimentalphysik so ziemlich von Anfang an benötigt werden.

2.1 Vektoren

2.1.1 Definition bzw. Begriffsklärung

Vektoren: Zentrale Größen in der Physik.
Aber: Was ist ein Vektor eigentlich?
→ physikalische und mathematische Sichtweise

Mathematischer Vektor: Element eines Vektorraums (siehe 2.1.3)

Physikalischer Vektor: Gerichtete Strecke mit Anfangs- und Endpunkt, z.B. Ort $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft $\vec{F}$.
Notation: $\vec{a}, \mathbf{a}, \underline{a}, \cdots$
Charakterisierung: Durch Betrag (Länge der Strecke) und Richtung (Einheitsvektor $\vec{e}_a$).

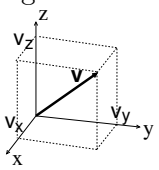
Skalare: Im Gegensatz zum Vektoren einfache "Zahlen"
Wieder physikalische und mathematische Sichtweise.

Mathematisch: Vektorraum ist "über einem Körper" definiert (siehe 2.1.3)
Skalare sind Elemente dieses Körpers.

Physikalisch: Größen, die durch einzelne Zahlen charakterisiert werden können (z.B. Temperatur, Druck, Betrag eines Vektors)

2.1.2 Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung

Im allgemeinen legt man im Raum ein Koordinatensystem (KDS) fest.



Dann kann Vektor durch Satz von D Zahlen dargestellt werden. ($D = 3$ im Raum, $D = 2$ in der Ebene etc.)
Zahlen (Koordinaten) hängen vom KDS ab.

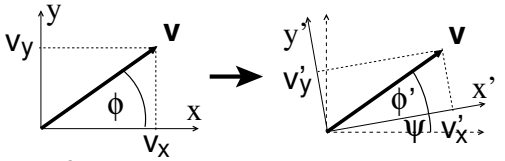
$\Longrightarrow$ Alternative Definition eines **physikalischen Vektors**:
Größe, charakterisiert durch D Zahlen (D: Dimension des Raums), die sich bei Drehung des Koordinatensystems in "bestimmter Weise" transformieren. (mehr dazu gleich).

Alternative Definition eines **physikalischen Skalars**:
Größe, charakterisiert durch eine Zahl, die vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Frage: Was bedeutet "bestimmte Weise"?
Wie transformieren sich Vektorkoordinaten unter Drehung des KDS?
Annahme hier: rechtwinkliges Koordinatensystem.

Diskussion zunächst in 2 Dimensionen (Vektor in der Ebene)

Betrachte Einfluss auf Drehung um Winkel ψ auf Vektor $\vec{v}$.



Koordinaten des Vektor $\vec{v}$:

$$\begin{array}{c} v_x = v\cos\phi \\ v_y = v\sin\phi \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} v'_x = v\cos\phi' \\ v'_y = v\sin\phi' \end{array}$$

mit $\phi' = \phi - \psi$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v'_x = v\cos(\phi-\psi) = v\cos\phi\cos\psi + v\sin\phi\sin\psi = v_x\cos\psi + v_y\sin\psi \\ v'_y = v\sin(\phi-\psi) = v\sin\phi\cos\psi - v\cos\phi\sin\psi = -v_x\sin\psi + v_y\cos\psi \end{array}$$

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } \mathcal{D}(\psi)} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Drehung des KDS kann durch **Drehmatrix** beschrieben werden.

Analog kann man Drehmatrizen auch in drei Dimensionen definieren.
(kompliziertere Form, die Matrizen hängen von drei Winkeln ab).

Vorteile der Beschreibung von Drehungen durch Drehmatrizen:

- Eine Drehmatrix beschreibt Einfluss der Drehung auf die Koordinaten aller Vektoren
- Kombinierte Drehungen können leicht durch Hintereinanderschalten von Drehmatrizen beschrieben werden
  (formal per Matrixmultiplikation – siehe Einschub Matrizen).

Kurzer Einschub Matrizen

(Stoff in 'Mathematik für Physiker' (für BSc) bzw. Rechenmethoden 2 (für BEd)
Für ausführlichere Übersicht siehe auch Anhang Matrizen)

Beispiel: 2×2-Matrizen

Gegeben Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$,

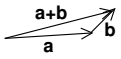
- Anwendung von Matrix auf Vektor: $w = Av$ bedeutet
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix},$$
d.h. in Komponentenschreibweise: $\boxed{w_j = \sum_k a_{jk} v_k}$.
- Analog Matrixmultiplikation:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$
d.h. in Komponentenschreibweise:
Mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow C = AB$ bedeutet $\boxed{c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}}$.

Kann verallgemeinert werden auf beliebige $n \times n$ -Matrizen
(und sogar $n \times m$ Matrizen, ist aber hier weniger wichtig).

Matrixmultiplikation definiert assoziative Verknüpfung auf den Matrizen.
$n \times n$-Matrizen mit dieser Verknüpfung bilden eine Gruppe.

2.1.3 Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume

1) Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$:

- Graphisch: Hänge Pfeile aneinander 

- Koordinaten: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.
- Rechengesetze: Vektoren mit Addition bilden "Abelsche Gruppe"
(i) Abgeschlossen: $\vec{a} + \vec{b}$ ist wieder ein Vektor
(ii) Assoziativ: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
(iii) Es gibt eine Null $\vec{0}$ mit: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \qquad \forall \vec{a}$
(iv) Inverses: $\forall \vec{a} \qquad \exists \quad (-\vec{a}) : \qquad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0.$
(v) Kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2) Multiplikation mit einem Skalar : (i.e., einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.)

- Graphisch: Streckung/Stauchung um Faktor λ
(Falls $\lambda < 0$: Richtung dreht sich um.)

- Koordinaten: $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$.
- Rechengesetze:
  (vi) Kommutativ: $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$
  (vii) Assoziativ: $\beta(\alpha\vec{a}) = (\beta\alpha)\vec{a}$
  (viii) Distributivgesetze: $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Bemerkung: Die Menge der Skalare $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ für sich genommen bildet einen Körper (siehe 1.2.1). Eine Menge von Objekten, auf der eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit den obigen Eigenschaften (i)-(viii) definiert ist bezeichnet man als linearen Vektorraum über dem Körper der Skalare.

$\Longrightarrow$ Mathematische Definition eines Vektors: Element eines Vektorraums
Der mathematische Begriff des Vektors ist allgemeiner als der physikalische Begriff. In dieser Vorlesung werden mathematisch gesehen meistens Vektorräume $\mathbb{R}^D$ diskutiert (D ist die Raumdimension). Aber z.B. die Menge der Funktionen $f(x)$ bildet auch einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3) Lineare Abhängigkeit :

Definition: Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig**,
falls aus $\sum \alpha_i \vec{a}_i = 0$ folgt $\alpha_i = 0 \quad \forall \quad i$.
Anderenfalls sind die Vektoren **linear abhängig**.

Anschaulich: Zwei Vektoren linear abhängig $\Rightarrow$ parallel.
Drei Vektoren linear abhängig $\Rightarrow$ koplanar (in einer Ebene) .

Bemerkungen:

- Zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ spannen Ebene durch Ursprung auf, d.h. alle Punkte der Ebene können in die Form $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ gebracht werden (α, β sind Skalare).
- Drei linear unabhängige Vektoren spannen gesamten Raum auf.
- In drei Dimensionen sind maximal drei Vektoren linear unabhängig.

(Mathematisch: Dimension ist definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum)

Aufgaben:

- Gegeben sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
  Berechnen Sie $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$.
  Sind $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, linear unabhängig?
  Wie lautet die Gleichung für die Gerade durch $\vec{a}$, die zu $\vec{b}$ parallel ist?
- Bilden Sie in der (x,y)Ebene die Summe von 7 Vektoren der Länge a, wobei $\vec{a}_1$ in x-Richtung zeigt und $\vec{a}_j$ mit $\vec{a}_{j-1}$ die Winkeldifferenz $\pi/6$ hat.

2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt)

2.2.1 Definition und mathematische Struktur

1) Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^D$ mit beliebigem $D \geq 1$):
Abbildung eines Paars von Vektoren auf einen Skalar

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, \cos(\phi)}$ mit ϕ : Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Physikalisches Beispiel: Arbeit = Kraft mal Weg ($W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$).

2) Rechenregeln:

(i) Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(ii) Homogen: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(iii) Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

(iv) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$
($a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ist Betrag des Vektors).

- Kein eindeutiges Inverses
(durch Vektoren darf man nicht dividieren !)

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man **unitär**.

3) Folgerungen

- **Cauchy-Schwartzsche Ungleichung**: $\boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab}$
(hier konkret: klar, da $\cos\phi \leq 1$
Kann man aber auch allein aus (i)-(iv) beweisen:
Für alle λ gilt: $0 \leq (\vec{a} - \lambda\vec{b})^2 = a^2 + \lambda^2 b^2 - 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
Wähle $\lambda = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{b^2} \Rightarrow 0 \leq a^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{b^2} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq a^2 b^2$ ✓)
Falls $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab$ folgt: Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind parallel.
(möglicher Test auf lineare Abhängigkeit).

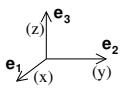
- **Dreiecks-Ungleichung**: $\boxed{|a - b| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq a + b}$

$$\text{vgl.} \left\{ \begin{array}{lcl} (a-b)^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab \\ (\vec{a}+\vec{b})^2 & = & a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ (a+b)^2 & = & a^2 + b^2 + 2ab \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Aus } -ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab \\ \text{(Cauchy-Schwartzsche Ungl.)} \\ \text{folgt } (a-b)^2 \leq (\vec{a}+\vec{b})^2 \leq (a+b)^2 \checkmark \end{array}$$

- **Einheitsvektor** in Richtung $\vec{a}$: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$

2.2.2 Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol

Ab jetzt sollen unsere Koordinatensysteme rechtwinklige Koordinatenachsen haben, die ein "Rechtssystem" bilden (Rechte-Hand Regel).



Definiere $\vec{e}_i$: Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachse i.
$\rightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_i a_i\vec{e}_i$ (mit a_i: Koordinaten)
Es gilt: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left\{ \begin{array}{ll} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{array} \right.$

1) Motiviert Definition des **Kronecker-Symbols**

$$\boxed{\delta_{ij} := \begin{cases} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases}} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

2) Skalarprodukt in Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$; $\vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (\sum_i a_i \vec{e}_i)(\sum_j b_j \vec{e}_j) = \sum_{ij} a_i\, b_j\, (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{ij} a_i\, b_j\, \delta_{ij}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i\, b_i}$

3) Anwendung: Berechnung der Koordinaten eines Vektors $\vec{a}$ in einem anderen (rechtwinkligen) Koordinatensystem mit Koordinatenachsen in Richtung $\{\vec{e}_i'\}$.

Koordinaten: Projektion von $\vec{a}$ auf die Achsen (Einheitsvektoren) $\vec{e}_i'$:

$\Rightarrow \boxed{a_i' = \vec{a} \cdot \vec{e}_i'} \Rightarrow \vec{a} = \sum_i a_i' \vec{e}_i' = \sum_i (\vec{a} \cdot \vec{e}_i')\, \vec{e}_i'$.

Gilt für alle Vektoren $\vec{a}$ und rechtwinklige Koordinatensysteme $\{\vec{e}_i'\}$.

$\rightsquigarrow$ Liefert einfache Berechnungsformel für Drehmatrizen.

Betrachte Drehung, die KDS $\{\vec{e}_i\}$ in KDS $\{\vec{e}_i'\}$ überführt.

Vektor $\vec{a}$ hat Koordinaten a_i bzw. a_i' mit $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$, $\vec{a}_i' = \vec{a} \cdot \vec{e}_i'$

Aus $\vec{a} = \sum_j a_j \vec{e}_j$ und $a_i' = \vec{a} \cdot \vec{e}_i'$ folgt $a_i' = \sum_j a_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i')$

also $\boxed{a_i' = \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j}$ mit Drehmatrix $\boxed{\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'}$

Aufgaben:

- Beweisen Sie den Kosinussatz für Dreiecke: Für Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c und dem Winkel ϕ zwischen den Seiten a und b gilt $a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi = c^2$.
- Betrachten Sie Vektoren mit Koordinaten $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Bestimmen Sie den Einheitsvektor in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

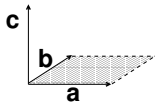
2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

2.3.1 Definition und mathematische Struktur

1) Vektorprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

Abbildung eines Paars von Vektoren auf Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

mit Betrag $\boxed{|\vec{c}| = a\, b\, \sin(\phi)}$ (ϕ : Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.)



Richtung: $\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$

Vorzeichen: So, dass $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Rechtssystem.

Geometrisch: $|\vec{c}|$ ist Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Physikalisches Beispiel: Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p}$.

2) Rechengesetze

(i) Antikommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(ii) Homogen: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

(iii) Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(zur Herleitung siehe z.B. Nolting Bd. 1)

NB: Aus (i) und (iii) folgt auch $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(iv) Jacobi-Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ (vorläufig ohne Herleitung).

- Nicht assoziativ, keine Identität, kein Inverses (durch Vektoren kann man immer noch nicht dividieren).

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem äußeren Produkt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man eine **Lie Algebra**.

2.3.2 Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol

Das Koordinatensystem sei wieder ein rechtwinkliges Rechtssystem, mit Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ entlang den Koordinatenachsen.

$$\begin{array}{rccccc} \Rightarrow & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 & = & \vec{e}_3 & = & -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \\ & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & = & \vec{e}_1 & = & -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \\ & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & = & \vec{e}_2 & = & -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \end{array} \qquad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0 \quad \forall i.$$

1) Motiviert Definition des Epsilon-Tensor oder Levi-Civita-Symbol:

$$\boxed{\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1: & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1: & (ijk) = (213), (321), (132) \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$$

(bzw. "total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe").

2) Vektorprodukt in Koordinatendarstellung:

Mit $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$; $\vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j$ folgt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ij} a_i\, b_j\, (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$

$\Rightarrow c_k = \vec{c} \cdot \vec{e}_k = [\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i\, b_j\, (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \sum_{ij} a_i\, b_j\, \epsilon_{ijk}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i\, b_j\, \epsilon_{ijk}}, \qquad \text{konkret: } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

3) Rechenregeln mit dem Epsilon-Tensor:

$$\boxed{\epsilon_{ijk} = \underbrace{\epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}}_{\text{gerade Permutationen}} = \underbrace{-\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}}_{\text{ungerade Permutationen von } (i,j,k)}}$$

$$\boxed{\sum_m \epsilon_{klm}\epsilon_{pqm} = \delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp}}$$

(Beweis: Hausaufgabe – Buchhaltung, argumentieren ...)

$$\boxed{\sum_{lm} \epsilon_{klm}\epsilon_{plm} = 2\delta_{kp}}$$

(denn: $\sum_{lm} \epsilon_{klm}\epsilon_{plm} = \sum_l (\delta_{kp} \underbrace{\delta_{ll}}_{1} - \delta k_q \delta_{lp}) = 3\delta_{kp} - \delta_{kp}$ ✓)

Aufgaben:

- Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- Berechnen Sie die Fläche des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

2.3.3 Höhere Vektorprodukte

1) Spatprodukt $\boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$ ($\rightarrow$ Skalar)

Geometrische Interpretation:

Betrag: Volumen eines von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aufgespannten Parallelepipeds.

Vorzeichen: +, falls $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Rechtssystem,

– für Linkssystem.

Koordinatenschreibweise:

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum_k a_k (\vec{b} \times \vec{c})_k = \sum_{ijk} a_k b_i c_j\, \epsilon_{ijk} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$

$\Rightarrow \boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k}$.

2) Doppeltes Vektorprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ($\rightarrow$ Vektor)

Dafür gilt "Entwicklungssatz": $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})}$

(Herleitung am schnellsten mit Hilfe des Epsilon-Tensors:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i (\vec{b} \times \vec{c})_j = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i \sum_{lm} \epsilon_{lmj} b_l c_m \\ &= \sum_{ijlm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmj} a_i b_l c_m = \sum_{ilm} (\sum_j \epsilon_{kij}\epsilon_{lmj}) a_i b_l c_m \\ &= \sum_{ilm} (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) a_i b_l c_m \\ &= \sum_m a_m b_k c_m - \sum_l a_l b_l c_k = b_k (\vec{a} \cdot \vec{c} - c_k (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad). \end{aligned}$$

3) Weitere wichtige Beziehungen:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \qquad \text{(Lagrange-Identität)}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$$

Aufgaben:

- Beweisen Sie die Jacobi-Identität
- Gegeben die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  Berechnen Sie $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}|$, $|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})|$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$.
- Beweisen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$
- Berechnen Sie $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})$.
- Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ seien linear unabhängig.
  Die reziproken Vektoren seien definiert durch: $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)}\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)}\vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)}$.
  Zeigen Sie $\vec{a}_i\vec{b}_j = \delta_{ij}$
- Zeigen Sie $(\vec{a}-\vec{b})\cdot((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}) = 2\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$.