Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014*

Universität Mainz
Fachbereich 08
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid†

*Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

†03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs
(online unter http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha http://www.wolframalpha.com/examples

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Infinitesimalrechnung

Rechnen mit dem Unendlichen, Gegenstand der Analysis
Erste Begriffe schon bei Funktionen (Grenzwerte, Stetigkeit)
Nun: Weitere Grundzüge

3.1 Folgen und Reihen

3.1.1 Folgen

Formal: Folge ist eine unendliche Menge von durchnummerierten Zahlen
$(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \equiv (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit einem Bildungsgesetz
(oder: Abbildung von $\mathbb{N}_0$ (manchmal auch $\mathbb{N}$) in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Beispiele:

(a)	$(0, 1, 2, 3, \cdots)$	$(a_n = n)$	
(b)	$(1, -1, 1, -1, \cdots)$	$(a_n = (-1)^n)$	
(c)	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$	$(a_n = \frac{1}{n}\ n \in \mathbb{N})$	harmonische Folge
(d)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots)$	$(a_n = \frac{n}{n+1})$	
(e)	$(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \cdots)$	$(a_n = \frac{1}{n!})$	(Konvention: $0! = 1$)
(f)	$(1, q, q^2, q^3, q^4, \cdots)$	$(a_n = q^n)$	geometrische Folge
(g)	$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$	$(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$	Fibonacci-Folge

zu (e): Beschreibt Zinseszinsentwicklung
z.B. 3% Zins → nach 1 Jahr Vermehrung um Faktor 1.03
nach 2 Jahren Vermehrung um Faktor $(1.03)^2$
nach 3 Jahren Vermehrung um Faktor $(1.03)^3$

zu (f): Berühmte Folge. Sollte ursprünglich Kaninchenwachstum beschreiben. Heute u.a. in der Kryptographie benutzt.

Charakterisierung von Folgen (Eigenschaften) – ähnlich Funktionen (1.3.2)

- **Beschränktheit**
  (a_n) beschränkt $\Leftrightarrow \quad \exists B : |a_n| \leq B\ \forall n \in \mathbb{N}_0$
  Analog: nach oben / nach unten beschränkt (für reelle Folgen)

- **Monotonie** (nur für reelle Folgen)
  (a_n) monoton steigend $\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n$
  (a_n) streng monoton steigend $\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}\ \forall n$
  analog monoton / streng monoton fallend
- **Konvergenz**
  Folge ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert bei $n \to \infty$ hat
  $\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 :\ \exists N \geq 0 :\ |a_n - a| < \epsilon\ \forall n > N$
  Alternatives, äquivalentes Kriterium: **Cauchy-Kriterium**
  (a_n) konvergent $\;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 :\ \exists N \geq 0 :\ |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n, m > N$
  (Vorteil: Leichter zu überprüfen, falls Grenzwert nicht bekannt.)

Nützliche Sätze (anschaulich klar: Beweis hier weggelassen)
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Eine Folge, die gleichzeitig monoton und beschränkt ist, hat einen Grenzwert.

Anwendung auf unsere Beispiele:

	beschränkt	monoton	Grenzwert
(a)	–	steigend	–
(b)	✓	–	–
(c)	✓	fallend (streng)	0
(d)	✓	steigend (streng)	1
(e)	✓	fallend (streng)	0
(f) $(q < 1)$	✓	fallend (streng)	0
(f) $(q = 1)$	✓	steigend/fallend (nicht streng)	1
(f) $(q > 1)$	–	steigend (streng)	–
(g)	–	steigend (streng)	–

3.1.2 Reihen

Gegeben Folge (a_n). Konstruiere neue Folge (S_m) mit $S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$
$\to$ diese nennt man dann eine **Reihe**. (möglich auch: $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$)

Notation: Man schreibt dafür $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (bzw. $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$)
Dieser Ausdruck steht aber für die *Folge* (S_m) und sagt a priori noch nichts darüber aus, ob diese überhaupt einen Grenzwert S hat.

Falls der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$ existiert, heißt die Reihe **konvergent**.
Falls sogar $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} |a_n|$ existiert, heißt sie **absolut konvergent**.
NB: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Zum Beispiel **Geometrische Reihe** (siehe 1.1.2)

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \;\Rightarrow\; \lim_{m\to\infty} S_m \begin{cases} \text{divergiert für } q \geq 1 \\ \text{konvergiert } (\to \frac{1}{1-q}) \text{ für } q < 1 \end{cases}$$

wird häufig benutzt, um andere Reihen abzuschätzen.

Weitere Beispiele: Reihen aus unseren Musterfolgen (3.1.1)

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots$ divergiert.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - \cdots$ hat keinen Grenzwert.
(S_m alterniert zwischen 0 und 1).

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ divergiert.
(denn $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \cdots = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{unendlich oft}}$ divergiert.)

(c') aber: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ konvergiert.
(denn $\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{1\cdot 2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{3\cdot 4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{5\cdot 6}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{7\cdot 8}} + \cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$

weiterhin: $\frac{1}{1\cdot 2} + \underbrace{\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6}}_{<2\cdot\frac{1}{3\cdot 4}} + \underbrace{\frac{1}{7\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{13\cdot 14}}_{<8\cdot\frac{1}{7\cdot 8}<\frac{1}{8}} + \cdots < \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2$

$\Rightarrow$ Zusammengefasste Reihe ist monoton (nur positive Elemente)
und beschränkt $\rightarrow$ konvergent!) (de facto: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln(2)$)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots$ divergiert (da Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$).

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$ konvergiert. (de facto: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$)
(denn $1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3}}_{<\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}_{<\frac{1}{2^3}} + \cdots < 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 3$.

also: Folge $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}$ ist beschränkt und monoton $\rightarrow$ hat Grenzwert.)

(f) : Geometrische Reihe, oben bereits diskutiert.

(g) : Divergiert.

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen
  $a_n = \frac{2n}{3n+7}$, $\quad a_n = \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10000)}$,
  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\quad a_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t^n + t^{-n}}$ für $|t| < 1$, $|t| = 1$, $|t| > 1$.

- Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. (de facto: $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$)

- Berechnen Sie $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$

- Diskutieren Sie folgenden "Beweis" der Behauptung 2 = 4:
  Betrachte die Gleichung $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ (Notation: $x^{x^x} = x^{(x^x)}$, $x^{x^{x^x}} = x^{(x^{x^x})}$ etc.)
  Lösungsversuch: Da $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$, folgt $x^{(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}})} = x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
  Nun die Gleichung $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$
  Lösungsversuch wie oben: Da $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$, folgt $x^{(x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}})} = x^4 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
  Also folgt $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ und $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4 \Rightarrow 2 = 4$ (?)

- Hier noch ein weiterer "Beweis", diesmal für $0 > \frac{1}{2}$.
  Betrachte $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdots$
  Wir haben gezeigt: $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$. Daraus folgt $S > \frac{1}{2}$.
  Betrachte nun folgende Umformung:
  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdots = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdots) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24}\cdots) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \frac{1}{40}\cdots) + \cdots$
  $= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdots)(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdots)$
  Mit $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdots) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 0$ folgt: $S = 0 > \frac{1}{2}$ (?)

(Hintergrund: Vorsicht beim Vertauschen von Termen in unendlichen Reihen! Nur erlaubt für *absolut* konvergente Reihen).

3.2 Differentialrechnung

Differential- und Integralrechnung

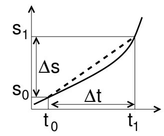
Entwicklung war einerseits motiviert aus der Physik.
Macht andererseits moderne Physik überhaupt erst möglich!

3.2.1 Die Ableitung

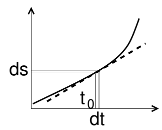
1) Differenzenquotion und Differentialquotient

Betrachte als konkretes Beispiel einen Wagen, der entlang einer geraden Straße fährt. Zur Zeit t hat er die Strecke $s(t)$ zurückgelegt.

Frage: Was ist seine Geschwindigkeit?



Erste Antwort: Mittlere Geschwindigkeit = Strecke/Zeit
entspricht $\bar{v} = \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$: Differenzenquotiont.
Das ist aber *nicht*, was der Tacho anzeigt.

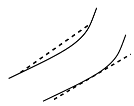


Zweite Antwort: Momentangeschwindigkeit = Tacho-Wert
→ im Prinzip Differenzenquotient, aber so,
dass die beiden Zeiten t_0, t_1 sehr nahe aneinander sind.
→ Grenzwert $\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} =: \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$: Differentialquotiont.

Leibniz-Schreibweise

Geometrische Interpretation:

Differenzenquotient: Sekante
Differentialquotient: Tangente



Allgemein: Gegeben Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen x.
→ **Differentialquotient:**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

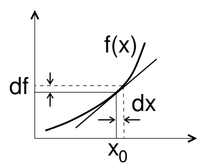
heißt **Ableitung** nach x.

Alternative Schreibweisen: $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x_0} = f'(x_0)$ (Strich)

Speziell Ableitung nach der Zeit t: $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \dot{f}(t_0)$ (Punkt)

2) Alternative Sichtweise: **Differential**

Betrachte Funktion $f(x)$ am Punkt x_0.
Schätze ab $f(x_0 + \Delta x)$:
→ Zuwachs $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x)$
$\approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \text{Rest}$.



Rest verschwindet (auch relativ zum Zuwachs), für kleine $\Delta x \to 0$.

Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ schreibt man

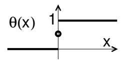
$$\boxed{f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + \left.\mathrm{d}f(x)\right|_{x_0}} \text{ mit } \boxed{\left.\mathrm{d}f(x)\right|_{x_0} = f'(x_0)\,\mathrm{d}x} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \mathrm{d}x.$$

sieht formal aus wie "kürzen" ($\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f$).

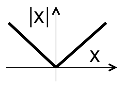
NB: Kürzen darf man bei Differentialquotienten natürlich eigentlich nicht. Trotzdem machen Physiker davon ausgiebig Gebrauch. Hintergrund ist genau dieses Denken in Differentialen, also: $\mathrm{d}f$ entspricht einem realen Zuwachs von f (also einer echten, sehr kleinen Zahl).

3) Differenzierbarkeit

Grenzwert $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ muß existiert nicht immer.

Gegenbeispiele: 

(unstetige Funktion)



(Funktion mit Knick)

Wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion **differenzierbar**.

$$f(x) \text{ differenzierbar bei } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert.}$$

4) Verallgemeinerung auf komplexe Funktionen

Definition von Differentialquotient und Differenzierbarkeit kann man direkt für Funktionen $f(z)$ von komplexen Zahlen z übernehmen.

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0} = \lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}}$$

Geometrische Interpretation schwieriger, sonst keine Änderung.

$f(z)$ heißt differenzierbar bei z_0, wenn der Grenzwert $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert.

NB: Im Komplexen ist Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung als im Reellen, da sich z von der ganzen komplexen Ebene an z_0 annähern kann.

5) Verallgemeinerung auf Funktionen mehrere Variablen

Gegeben sei z.B. eine Funktion von zwei Variablen $f(x,y)$.

→ Man kann ohne weiteres nach einer der Variablen, x oder y, ableiten und die andere dabei festhalten. Man muss nur festlegen, welcher. Das nennt man dann **partielle Ableitung**

Notation

Ableitung nach x: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}$

Ableitung nach y: $\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}$

Geschwungene Zeichen ∂ sagen aus:

Achtung, hier gibt es noch weitere Variablen.

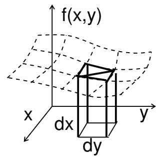
→ Physiker dürfen nicht mehr ohne weiteres kürzen !!!

Dazu betrachte zugehöriges Differential –

Zuwachs von $f(x,y)$ bein infinitesimaler Verschiebung von (x,y) um $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$:

Zuwachs von $f(x,y)$ in x-Richtung: $\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$

Zuwachs von $f(x,y)$ in y-Richtung: $\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$



→ Gesamter Zuwachs: Summe der einzelnen Beiträge.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f \text{ mit } \boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y}.$$

Man sieht: Einfaches Kürzen paßt hier nicht mehr.

Abgesehen davon ist die partielle Ableitung nichts grundsätzlich anderes als eine "normale" Ableitung.

5) Verallgemeinerung: Höhere Ableitungen

Gegeben Funktion $f(x)$

Ableitung $f'(x)$: Neue Funktion, kann man evtl. wieder ableiten

→ Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Beispiele: Ort $s(t)$ (Wagen)

Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t)$

Beschleunigung $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}(t)$

Allgemein $n$te Ableitung: $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n-1)}(x)$

Notation: $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n f(x)$.

Funktionen mehrere Variablen analog. Sei Funktion $f(x_1, \cdots, x_n)$

– Erste Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gemäß 4)

– Zweite Ableitungen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Satz von Schwarz: Bei mehrfach differenzierbaren Funktionen kann man partielle Ableitungen vertauschen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

(NB: Gilt nicht allgemein!)

6) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Zum Abschluss ein nützlicher Satz für reelle Funktionen:

Ist $f(x)$ stetig im Intervall $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$, dann folgt: Es existiert ein Wert $x_0 \in]a,b[$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

3.2.2 Elementare Beispiele

Explizite Berechnung der Ableitung einiger elementarer Funktionen. Aus diesen kann man später die meisten übrigen Ableitungen herleiten.

1) Potenzen: $f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = nx^{n-1}$

Rechnung:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[(x+\Delta x)^n - x^n]$$

$\Big|$ binomische Formel : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\big[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \tbinom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots - x^n\big] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\big[nx^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)\big] = nx^{n-1} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

NB: Gilt auch für komplexe Funktionen $f(z) = z^n$.

2) Exponentialfunktion: $f(x) = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; f'(x) = \mathrm{e}^x$

Rechnung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\big[\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x\big] = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1) \\ &= \mathrm{e}^x \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \mathrm{e}^x \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\mathrm{e}^{0+\Delta x}-\mathrm{e}^0}{\Delta x} \\ &= \mathrm{e}^x \cdot \big[\text{Steigung von } \mathrm{e}^x \text{ bei } x = 0\big] \end{aligned}$$

Aber: Per Konstruktion hat e^x bei $x = 0$ die Steigung 1
(e^x schneidet die y-Achse im Winkel $\frac{\pi}{4}$).

$\Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x f'(0) = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x \quad \checkmark$

NB: Es wird sich zeigen, dass die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ bei $z = 0$ (wie auch bei allen anderen z) differenzierbar ist. Daher gilt $f'(0) = 1$ auch in der komplexen Ebene und die Rechnung funktioniert genau so auch für die komplexe Funktion e^z.

3) Trigonometrische Funktionen: $f(x) = \begin{matrix}\sin(x)\\ \cos(x)\end{matrix} \;\Rightarrow\; f'(x) = \begin{matrix}\cos(x)\\ -\sin(x)\end{matrix}$

Rechnung zu $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\big[\sin(x+\Delta x) - \sin(x)\big]$$

| Additionstheorem: $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\big(\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x)\big) \\ &= \sin(x)\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} + \cos(x)\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

| Es gilt: $\cos(\Delta x) - 1 = -2\sin^2(\frac{\Delta x}{2})$. Setze $\Delta x' = \Delta x/2$

$$= -\sin(x)\lim_{\Delta x'\to 0} \frac{\sin^2(\Delta x')}{\Delta x'} + \cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

| Es gilt: $\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin(\phi)}{\phi} = 1$, $\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin^2(\phi)}{\phi} = 0$ (Beweis siehe unten)

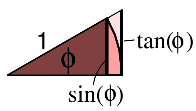
$\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \quad \checkmark$

Rechnung zu $f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = -\sin(x)$ geht analog.

Nachtrag Beweis $\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin(\phi)}{\phi} = 1$, $\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin^2(\phi)}{\phi} = 0$
(ohne Verwendung von Ableitungen, sonst beißt sich die Katze in den Schwanz.)

Beweis nach l'Hospital zunächst für $\phi > 0$

Betrachte Kreissegment mit einem einbeschriebenem und einem umfassenden rechtwinkligen Dreieck



- Fläche kleines Dreieck: $\frac{1}{2}\cos(\phi)\sin(\phi)$
- Fläche Kreissebment: $\frac{\phi}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}\phi$
- Fläche großes Dreieck: $\frac{1}{2}\tan(\phi)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos(\phi)\sin(\phi) \le \frac{1}{2}\phi \le \frac{1}{2}\tan(\phi)(= \frac{1}{2}\sin(\phi)/\cos(\phi))$

$\Rightarrow \cos(\phi) \le \phi/\sin(\phi) \le 1/\cos(\phi) \Rightarrow 1/\cos(\phi) \ge \sin(\phi)/\phi \ge \cos(\phi)$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\phi\to 0^+} 1/\cos(\phi)}_{1} \ge \lim_{\phi\to 0^+}\sin(\phi)/\phi \ge \underbrace{\lim_{\phi\to 0^+}\cos(\phi)}_{1}$

$\Rightarrow \lim_{\phi\to 0^+}\sin(\phi)/\phi = 1$ und $\lim_{\phi\to 0^+}\sin^2(\phi)/\phi = 0$

Beweis für $\phi < 0$ geht analog.

3.2.3 Differentiationsregeln

Von den elementaren Funktionen aus Abschnitt 1.3.1 haben wir die Potenzen x^n und die Exponentialfunktion e^x abgeleitet.

Es fehlen noch: Polynome, rationale Funktionen, Wurzeln, Logarithmen, etc.

Diese können jedoch aus den bekannten Ableitungen 3.2.2 unter Benutzung allgemeiner Regeln hergeleitet werden.

1) Linearität $\boxed{f(x) = a\,g(x) + b\,h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = a\,g'(x) + b\,h'(x).}$

Denn: $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[ag(x+\Delta x) + bh(x+\Delta x) - ag(x) - bh(x)] \\ &= a\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[g(x+\Delta x) - g(x)] + b\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[h(x+\Delta x) - h(x)] \\ &= ag'(x) + bh'(x) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2) Produktregel $\boxed{f(x) = g(x)\,h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x).}$

Denn: $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x)] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[(g(x+\Delta x) - g(x))h(x+\Delta x) + g(x)(h(x+\Delta x) - h(x))] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{\tfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{\to g'(x)} \underbrace{h(x+\Delta x)}_{\to h(x)} + g(x) \underbrace{\tfrac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}}_{\to h'(x)}] \\ &= g'(x)\,h(x) + g(x)\,h'(x) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

3) Inversenregel $\boxed{f(x) = 1/g(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = -g'(x)/g(x)^2}$

Denn: $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\left[\tfrac{1}{g(x+\Delta x)} - \tfrac{1}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\,\tfrac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\,g(x)} \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{\Delta x} \underbrace{\tfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{\to g'(x)} \underbrace{\tfrac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}}_{\to 1/g(x)^2} = -\tfrac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

4) Quotientenregel $\boxed{f(x) = g(x)/h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{g'(x)\,h(x) - g(x)\,h'(x)}{h(x)^2}}$

Ergibt sich aus Kombination von Produktregel und Quotientenregel:
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{g}{h}\right) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\cdot\tfrac{1}{h}\right) = g \underbrace{\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tfrac{1}{h}}_{-h'/h^2} + \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\right)\tfrac{1}{h} = \tfrac{1}{h^2}(-gh' + g'h) \qquad \checkmark$$

5) Kettenregel $\boxed{f(x) = f(g(x)) \;\Rightarrow\; f'(x) = f'(g)\,g'(x).}$

Leibniz-Schreibweise: $\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.}$ → Wieder ein Fall von "kürzen".

Beweisskizze mit Differentialen:
$$z = f(y) \;\Rightarrow\; \Delta z = \Delta f(y) = f'(y)\Delta y + \text{Rest}$$
$$y = g(x) \;\Rightarrow\; \Delta y = \Delta g(x) = g'(x)\Delta x + \text{Rest} \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{\Delta y}{g'(y)} - \frac{\text{Rest}}{g'(x)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{\Delta z}{\Delta x} \xrightarrow[\text{Reste verschwinden}]{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f'(y)\Delta y}{\Delta y/g'(x)} = f'(y)g'(x) \qquad \checkmark$$

7) Umkehrfunktionsregel

Sei $y = f(x)$ differenzierbar und umkehrbar → $x = g(y)$.

Dann ist $g(y)$ differenzierbar und $\boxed{g'(y) = 1/f'(x)\Big|_{x=g(y)}}$.

Leibniz-Schreibweise: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1/(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/f'(x)$.

→ Wieder so ähnlich wie "Kürzen".

Beweisskizze ohne Kürzen:

$$x = g(f(x)) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = 1 \& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = g(f(x)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$\Rightarrow 1 = g'f' \;\Rightarrow\; g' = 1/f' \quad \checkmark$$

3.2.4 Anwendungen der Differentiationsregeln

Mit Hilfe der Differentiationsregeln können aus den elementaren Ableitungen von Abschnitt 3.2.3 die Ableitungen fast aller übrigen Funktionen berechnet werden, zum Beispiel:

1) Polynome: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$
über $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = k x^{k-1}$ und Linearitätsregel
$\Rightarrow\; P'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots$

2) Rationale Funktionen: $f(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P und Q
über 1) und Quotientenregel

3) Wurzeln: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$
über $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$ und Umkehrfunktionsregel $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow x = y^n$
$\Rightarrow\; f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1/(n y^{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

4) Natürlicher Logarithmus: $f(x) = \ln(x)$
über $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ und Umkehrfunktionsregel $y = \ln(x) \Rightarrow x = \mathrm{e}^y$
$\Rightarrow\; f'(x) = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1/\mathrm{e}^y = 1/\mathrm{e}^{\ln x} = 1/x$.

5) Allgemeine Potenz: $f(x) = x^\alpha,\; \alpha \in \mathbb{R}$
über $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ und Kettenregel $f(x) = \mathrm{e}^y$ mit $y = \alpha \ln x$
$\Rightarrow\; f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^y \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

Aufgaben

Berechnen Sie einige der folgenden Ableitungen:
$\tan(x), \cot(x), \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \operatorname{arccot}(x)$
$\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x) \operatorname{arsinh}(x), \operatorname{arcosh}(x), \operatorname{artanh}(x), \operatorname{arcoth}(x)$
$b^x, {}_b\log(x), x^x$.

Berechnen Sie einige der folgenden Ableitungen:
$\sin^3(4x),\; \exp(-(x/a)^2),\; 1/\sqrt{ax^2+b},\; \ln(3\mathrm{e}^{2x}),\; \sqrt{1+\sqrt{x}},\; \ln(x)\,\ln(\ln(x)) - \ln(x)$.
$a\cosh(\frac{x-b}{a}),\; ax^2\mathrm{e}^{-bx},\; 1/(1+(\frac{x}{a})^2),\; \left(\frac{\sin(x/a)}{x/a}\right)^2$

Berechnen Sie folgende Ableitungen:
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{\cosh^2(\omega t(x))-1}}{\cosh(\omega t(x))}\right),\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2} f(g(a)),\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\exp[(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2] - A\right),\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\sqrt{f(\omega t) - xt}$

3.2.5 Tabelle wichtiger Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	Einschränkungen
const.	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\ln(x)$	$1/\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
r^x	$r^x \ln(r)$	$0 < r \in \mathbb{R}$
${}_b\log(\lvert x\rvert)$	$1/(x\ln(b))$	$0 < b \in \mathbb{R}, x \neq 0, b \neq 1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq (z+1/2)\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-1/\sin^2(x)$	$x \neq z\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-\pi/2 < \arcsin(x) < \pi/2,\ \lvert x\rvert < 1$
$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$0 < \arccos(x) < \pi,\ \lvert x\rvert < 1$
$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$	$-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-1/(1+x^2)$	$0 < \mathrm{arccot}(x) < \pi$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\tanh(x)$	$1/\cosh^2(x)$	
$\coth(x)$	$-1/\sinh^2(x)$	
$\mathrm{arsinh}(x)$	$1/\sqrt{1+x^2}$	
$\mathrm{arcosh}(x)$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$0 < \mathrm{arcosh}(x),\ x > 1$
$\mathrm{artanh}(x)$	$1/(1-x^2)$	$\lvert x\rvert < 1$
$\mathrm{arcoth}(x)$	$-1/(x^2-1)$	$\lvert x\rvert > 1$

Aufgaben

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hôpital (siehe 1.3.2.6):
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(7x)}{\tan(x)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{\sin(x)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}$, $\lim_{x\to 2\pi} \frac{\ln(\cos x)}{1-\exp(2\pi-x)}$,

Berechnen Sie folgende partiellen Ableitungen
$\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z)$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial}{\partial x}(xyz)$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{x^2+y^2}$
$q(p_1p_2) = y(p_1,p_2) = 8p_1^{0.25}p_2^{0.75}$ (Cobb-Douglas Produktionsfunktion)

Zeigen Sie: Für $q(x_1,x_2) = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ gilt $q(x_1,x_2) = \frac{\partial q}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2}x_2$.

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen:
$f(x,y) = (x+y)e^x$, $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(x,y) = e^{xy^2}$, $f(x,y) = 8x^2y - 4x\exp(g(y))$
$f(x_1,\cdots,x_n) = \ln(\sum_{i=1}^n x_i^n)$, $\prod_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der Funktionen
$f(x,y) = \exp(xy(+x^2-y^2$ und $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ für folgende implizit definierte Funktionen $y(x)$
$xy^2 - 3x^2 = xy + 5$
$3y - 4 = x(y+2)$

Die Funktion $z(x,y)$ ist implizit durch die Gleichung $yz - \ln(z) = x + y$ definiert. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ mit Hilfe des totalen Differentials.

3.2.6 Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktion: Abbildung $\vec{V}(\lambda)$ von Skalar λ auf Vektor $\vec{V}$.
Typisches Beispiel aus der Physik: $\vec{r}(t)$ - Ort eines Teilchens als Funktion der Zeit $\to$ Trajektorie

3.2.6.1 Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen

Im Grunde keine Änderungen gegenüber vorher

1) Stetigkeit wie gehabt:
$\vec{V}(\lambda)$ stetig bei $\lambda_0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0:\ \exists\delta > 0:\ |[\vec{V}(\lambda) - \vec{V}(\lambda_0)| < \epsilon\ \forall|\lambda - \lambda_0| < \delta$

2) Differentiation wie gehabt:
$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\vec{V}(\lambda+\Delta\lambda)-\vec{V}(\lambda)}{\Delta\Lambda}$, falls Grenzwert existiert.
Es gilt: $\frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda) + \vec{b}(\lambda)) = \frac{d\vec{a}}{d\lambda} + \frac{d\vec{b}}{d\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(f(\lambda)\,\vec{a}(\lambda)) &= \frac{df}{d\lambda}\,\vec{a}(\lambda) + f\,\frac{d\vec{a}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda)\cdot\vec{b}(\lambda)) &= \frac{d\vec{a}}{d\lambda}\cdot\vec{b}(\lambda) + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda)\times\vec{b}(\lambda)) &= \frac{d\vec{a}}{d\lambda}\times\vec{b}(\lambda) + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{d\lambda} \end{aligned}\right\}\ \text{Varianten der Produktregel}$$

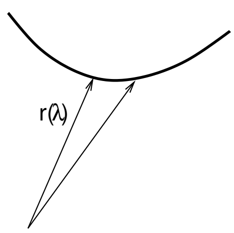
Beispiele: Ort $\vec{r}(t)$ (Trajektorie)
$\to$ Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt}$.

Aufgaben

- Gegeben sei die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Teilchens. Berechnen Sie die Ableitung nach der Zeit $f'(t)$ für die Funktionen $f(t) = \vec{r}(t)^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$, $f(t) = |\vec{r}|$, $f(t) = 1/|\vec{r}|$, $f(t) = \exp(-|\vec{r}|/a)$.
- Betrachten Sie ein Teilchen mit der Trajektorie $\vec{r}(t) = A(t)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ t \end{pmatrix}$
  - Zeichnen Sie die Trajektorie für die Fälle $A(t)$ =konstant und $A(t) = at$.
  - Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung.
- Betrachten Sie ein Teilchen mit der Trajektorie $\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{e} + \sin(\omega t)\vec{e}'(t)$ mit $\vec{e}' = (\vec{e}\times\vec{n}(t))/|\vec{e}\times\vec{n}(t)|$, $\vec{e}$ konstant, $\vec{e}$ und $\vec{n}(t)$ Einheitsvektoren ($|\vec{e}| = |\vec{n}(t)| \equiv 1$).
  - Berechnen Sie die Geschwindigkeit
  - Betrachten Sie speziell den Fall, dass $\vec{n}$ immer senkrecht auf $\vec{e}$ steht. Berechnen Sie dafür auch noch die Beschleunigung.

3.2.6.2 Speziell Raumkurven

Beispiel: durchhängende Leine



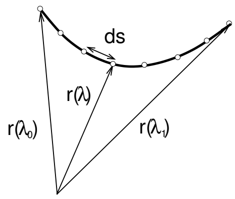
1) Parametrisierung

Raumkurve wird beschrieben durch vektorwertige Funktion $\vec{r}(\lambda)$, wobei Skalar λ alle Werte in einem vorgegebenem Intervall $[\lambda_0, \lambda_1]$ einnimmmt.

Falls λ so gewählt werden kann, dass $\vec{r}(\lambda)$ differenzierbar ist und $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \neq 0$ für alle λ, spricht man von einer **glatten** Kurve.

Im Folgenden setzen wir bei glatten Kurven voraus, dass die Parametrisierung $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\lambda} \neq 0 \;\forall\; \lambda$ erfüllt.

2) Bogenlänge



Gegeben glatte Kurve $\vec{r}(\lambda)$

Frage: Länge der Kurve?
→ Setzt sich zusammen aus infinitesimalen Stücken der Länge $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$.

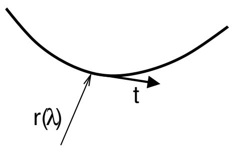
Länge ergibt sich aus Summe dieser infinitesimalen Stücke, d.h. Integral
$\Rightarrow\; L = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathrm{d}s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\mathrm{d}\vec{r}| = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}s}$.
(Integral: bekannt aus der Schule, sonst siehe 3.4).

Analog kann man Bogenlänge $s(\lambda)$ des Teils der Kurve zwischen λ_0 und λ bestimmen. $s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}s}$.
$s(\lambda)$ wächst wegen $\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}s} \neq 0$ streng monoton mit λ an.
$\Rightarrow$ eindeutig umkehrbar ($\lambda(s)$).

→ man kann statt λ auch s zur Parametrisierung der Kurve verwenden:
$\vec{r}(\lambda) \to \vec{r}(\lambda(s)) = \vec{r}(s)$. → **natürliche Parametrisierung**.

3) Tangentenvektor

Gegeben glatte Kurve $\vec{r}(\lambda)$
Tangentenvektor $\vec{t}$:
Einheitsvektor in Richtung $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\lambda}$
$\Rightarrow\; \vec{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\lambda|}$; speziell $\lambda = s$: $\boxed{\vec{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}}$

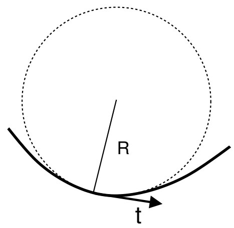


4) Krümmung und Torsion

- **Krümmung** κ: Änderung von $\vec{t}$ mit s: $\boxed{\kappa = |\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}|}$,

  $R = 1/\kappa$ ist **Krümmungsradius**.

  Definiere **Normalenvektor**: $\boxed{\vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\vec{t}/\mathrm{d}s|} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}}$
  zeigt in Richtung Krümmungsradius.
  NB: $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{t}$ (da $|\vec{t}| = 1$).



- **Schmiegeebene**:
  Krümmung anschaulich: Kreis, der sich an Raumkurve schmiegt.
  Ebene, in der dieser Kreis liegt, heißt Schmiegeebene.
  Charakterisiert durch Vektor $\vec{b}$, der senkrecht darauf steht.
  → **Binormalenvektor** $\boxed{\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}}$
  (Kreuzprodukt, da $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{t}$ und $\vec{n}$ stehen muss.)

- **Torsion** τ: Änderung der Schmiegeebene, bzw. $\vec{b}$, entlang s: $\boxed{\tau = |\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s}|}$,
  $\sigma = 1/\tau$ heißt **Torsionsradius**.

5) Begleitendes Dreibein

Die Vektoren $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ aus 3) und 4) bilden zusammen ein orthogonales Rechtsstem. Sie können als ein entlang der Kurve mitbewegtes Koordinatensystem benutzt werden.

Änderung der Vektoren als Funktion von S: **Frenetsche Formeln**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} &= \kappa\vec{n} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} &= -\tau\vec{n} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} &= \tau\vec{b} - \kappa\vec{t} \end{aligned}}$$

Aufgaben

- Beweisen Sie die Frenetschen Formeln
  (Hinweis: Zeigen Sie erst und benutzen Sie dann $\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}\vec{t} + \vec{n}\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = 0$).
- Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} \cos(a\lambda) \\ \sin(a\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - Bestimmen Sie den Tangentenvektor $\vec{t}(\lambda)$ als Funktion von λ
  - Bestimmen Sie das Bogenlängenelement $\mathrm{d}s$
  - Bestimmen Sie die Krümmung als Funktion von λ im Grenzfall $\lambda \gg 1$.

3.2.7 Extremwertaufgaben

Wichtige Anwendung von Ableitungen:
Bestimmung der Extrema (Maxima, Minima, Sattelpunkte) einer Funktion.

Gegeben: Mehrdimensionale Funktion $f(x_1...x_n)$.

Gesucht: Extrema dieser Funktion in kompaktem (n-dimensionalem) Gebiet Ω.

NB: Die Extrema können in dem Gebiet liegen oder auf dessen Rand $\partial\Omega$. Diese Fälle müssen separat behandelt werden. Weiterhin könnte es auch sein, dass noch eine Nebenbedingung erfüllt sein muss (z.B. Maximierung der Funktion auf dem Rand).

1) Extrema im Inneren des Gebietes

(ohne Nebenbedingungen)

Lokalisierung der Extrema:

Am Extremum muss in jeder Richtung die Steigung Null sein:
$\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen verschwinden: $\partial f/\partial x_i = 0$ für alle i.
Folgerung: Differential verschwindet in alle Richtungen,
$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = 0 \quad \forall\, \mathrm{d}x_i$.
Damit ist noch nicht klar, was für eine Art Extremum man hat
(Maximum, Minimum, Sattelpunkt?)

Klassifizierung der Extrema:

Die Funktion $f(x_1, \cdots, x_n)$ habe ein Extremum bei $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$.

Betrachte Zuwachs Δf von f bei kleiner Verschiebung $(\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$.

$(\Delta f = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \cdots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n))$

Vorgriff Kapitel 3.2 (Taylor-Reihen): Zuwachs ist gegeben durch

$$\Delta f = \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_n}}_{0 \text{ laut Voraussetzung}} + \frac{1}{2} \underbrace{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big|_{\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_n}}_{=: H_{ij}} \Delta x_i \, \Delta x_j + \text{Rest},$$

Rest geht bei $\Delta x_i \to 0$ schneller als $(\Delta x)^3$ nach Null

$\rightsquigarrow$ Art des Extremums wird von <u>zweiten Ableitungen</u> bestimmt, genauer gesagt der **Hesse-Matrix** $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

– Minimum: Falls H_{ij} positiv definit,
  d.h. $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j > 0$ für jede Wahl von $(\Delta x_1, \cdots \Delta x_n)$.

– Maximum: Falls H_{ij} negativ definit,
  d.h. $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j < 0$ für jede Wahl von $(\Delta x_1, \cdots \Delta x_n)$.

– Sattelpunkt: Falls H_{ij} indefinit,
  d.h. es gibt sowohl Richtungen $(\Delta x_1, \cdots \Delta x_n)$ mit
  $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j > 0$ als auch mit $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j < 0$.

Alle anderen Fälle: Unbestimmt
(z.B. wenn H_{ij} nur positiv semidefinit, d.h.
$\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j \geq 0$, aber $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \, \Delta x_j = 0$ kommt vor.)
In diesem Fall müssen höhere Ableitungen berechnet werden.

Formale Bestimmung am besten über "Eigenwerte" von H_{ij}
(siehe MRM2, Mathe für Physiker oder Anhang))

– Alle Eigenwerte positiv: Maximum
– Alle Eigenwerte negativ: Minimum
– Negative und Positive Eigenwerte: Sattelpunkt

2) <u>Extrema am Rand</u>

Eventuell wird die Funktion erst am Rand maximal oder minimal.

Beispiele:

- $f(x,y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf dem Gebiet $|x| < 1, |y| < 1$ hat Maximum im Inneren des Gebietes $(x = y = 0)$ und Minima an den Kanten $(x = \pm 1, y = \pm 1)$
- $f(x,y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf dem Gebiet $x > 1$ hat Maximum am Rand (bei $x = 1, y = 0$) und kein Minimum (bzw. eines im Unendlichen)

$\to$ Dort muss dann nicht mehr für alle i gelten, dass $\partial f / \partial x_i$.

Differential $\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ muss nur für Verschiebungen $(\mathrm{d}x_1, \cdots \mathrm{d}x_n)$ *entlang* des Randes verschwinden.

Manchmal muss $\mathrm{d}f$ am Extremum überhaupt nicht verschwinden,
z.B. wenn das Extremum an einer Ecke des Randes ist
oder bei eindimensionalen Funktionen $f(x)$ am Rand.

$\to$ Verhalten am Rand muss separat ausgewertet werden, Maxima und Minima müssen mit Extrema im Inneren des Gebietes verglichen werden.

NB: Die Beschränkung auf den "Rand" stellt Nebenbedingung dar.
Frage: Wie bestimmt man Extrema, wenn es Nebenbedingungen gibt? → nächster Abschnitt.

3) Umgang mit Nebenbedingungen

Fragestellung Maximiere/Minimiere $f(x_1, ..., x_n)$ unter den Nebenbedingungen $g_\alpha(x_1, ..., x_n) = 0$.

Beispiele:

i) Maximiere $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf der Geraden $y = x + 1$
$\Rightarrow$ Nebenbedingung $g(x, y) = y - x - 1 = 0$.

ii) Bestimme Quader mit maximaler Fläche, den man in die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ einschreiben kann.
→ zu maximierende Funktion: $f(x, y, z) = 4xyz$ (mit $x, y, z > 0$)
Nebenbedingung: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Verschiedene Lösungsansätze.

- Elimination von Variablen: Nutze die Gleichungen $g_\alpha \equiv 0$, um Variablen zu eliminieren.

Unsere Beispiele:

i) $g(x, y) = y - x - 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$
Setze ein: $f(x, y) = f(x, x + 1) = \exp(-(x^2 + (x + 1)^2) = \exp(-2x^2 - 2x - 1)$.
Extremum: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, x) = 0 \Rightarrow x = -1/2 \Rightarrow y = x + 1 = 1/2$ ✓
(ist auch tatsächlich Maximum!)

ii) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Setze ein: $f(x, y, z) = f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Extremum: $\partial f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})\partial x = 0, \partial f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})\partial y = 0$
Lösung mühsam ohne Symmetrie-Annahmen (z.B. $x = y = z$)

$\Rightarrow$ Naheliegend, leider oft mühsam

- **Methode der Lagrange-Parameter**

Im allgemeinen eleganter.

Vorüberlegung:

Der Satz Nebenbedingungen $g_\alpha \equiv 0$ definiert eine Hyperfläche im Raum (z.B. in den obigen Beispielen: (i) die Gerade $y = x + 1$ und (ii): Die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Betrachte infinitesimale Verschiebungen $(\mathrm{d}\tilde{x}_1, ...\mathrm{d}\tilde{x}_n)$ *innerhalb* dieser Hyperfläche

Wegen $g_\alpha = 0$ auf der Hyperfläche gilt für diese:
$\sum_i \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \mathrm{d}\tilde{x}_i = 0 \quad \forall \alpha$

Wir suchen Punkte $(x_1, \cdots, x_n)$ in der Hyperfläche mit
$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\tilde{x}_i = 0$ für alle $(\mathrm{d}\tilde{x}_1, \cdots \mathrm{d}\tilde{x}_n)$
(Kein Zuwachs für Verschiebungen in der Hyperfläche).
Wir müssen *nicht* $\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0 \, \forall (\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)$ fordern.
(Diese Bedingung wäre zu streng.)

Trick: Führe freie Variablen λ_g ein.
Bestimme Lösungen von $\mathrm{d}(f - \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha) = 0 \, \forall \, (\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)$.
→ Liefert eine ganze Schar von Lösungen $(x_1, \cdots, x_n)$.
Suche darunter die Lösung, die in der Hyperfläche liegt.
→ Diese erfüllt dann auch $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\tilde{x}_i = 0$ für alle $(\mathrm{d}\tilde{x}_1, \cdots \mathrm{d}\tilde{x}_n)$

$\Rightarrow$ Rezept:

- Definiere $I(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n) - \sum_\alpha \lambda_\alpha\, g_\alpha(x_1,...,x_n)$
- Finde Extrema von I.
  $\Rightarrow$ Schar von Lösungen $x_i(\lambda_i)$ mit $\mathrm{d}I = 0 \quad \forall\, i$.
  $(\mathrm{d}I = \sum_i \mathrm{d}x_i \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}\right\})$
- Wähle aus dieser Schar die, die die Nebenbedingungen erfüllen.

Illustriert an unseren Beispielen:

i) $I = f(x,y) - \lambda g(x,y) = \exp(-(x^2+y^2)) - \lambda(y-x-1)$
– $\frac{\partial I}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2xe^{-(x^2+y^2)}$
$\frac{\partial I}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2ye^{-(x^2+y^2)}$
$\Rightarrow x = -y$
– Kombiniere mit Nebenbedingung $y = x+1 \quad \Rightarrow (x,y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

ii) $I = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = 4xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$
– $\frac{\partial I}{\partial x} = 4yz - 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2yz/x$
$\frac{\partial I}{\partial y} = 4xz - 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2xz/y$
$\frac{\partial I}{\partial z} = 4xy - 2\lambda z \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2xy/z$
$\Rightarrow xy/z = yz/x = zx/y = \lambda/2 \quad \Rightarrow x^2yz = xy^2z = xyz^2 \quad \Rightarrow x = y = z.$
– Kombiniere mit Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Geometrische Interpretation:

Fasse $\partial\mathbf{f} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ und $\partial\mathbf{g} = (\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n})$ als Vektoren auf, ebenso $\mathrm{d}\mathbf{x} = (\mathrm{d}x_1, \cdots \mathrm{d}x_n)$. Dann ist $\mathrm{d}f = \partial\mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$

Forderung an Extrema: $\partial\mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}} = 0$ für alle $\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}$ in der durch $g_\alpha = 0$ definierten Hyperfläche $\Rightarrow$ $\partial\mathbf{f}$ steht senkrecht auf Hyperfläche.

Ebenso stehen die Vektoren $\partial\mathbf{g}_\alpha$ senkrecht auf der Hyperfläche und sind idealerweise linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Es gibt λ_α mit $\partial\mathbf{f} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial\mathbf{g}$,

$\Rightarrow$ Für Extrema können λ_α gefunden werden mit $\partial\mathbf{f} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial\mathbf{g} = 0$. Für diese gilt $\mathrm{d}(f - \sum_\alpha g_\alpha) = (\partial\mathbf{f} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial\mathbf{g}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ für alle $\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Aufgaben

- Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie mit Hilfe der Hesse Matrix deren Art: $f(x,y) = xy - xy^2$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^4$,
- Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = x\exp(-(x^2+y^2)/a^2)$ auf dem Kreis $x^2+y^2 = 1$
- Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x+y$ mit der Nebenbedingung $4x^2+y^2 = 20$.
- Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders, den man in das Ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ einschreiben kann.

3.3 Taylor-Entwicklung

Eine wichtige Anwendung der Differentiation:

Darstellung von Funktionen als **Potenzreihen**: $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}$

(Alternative Darstellung unendlich oft differenzierbarer Funktionen)

Beispiele für eine Darstellung als Potenzreihe

- Geometrische Reihe $f(x) = 1/(1-x) = \sum_k x^k$ (bereits bekannt!)
- Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = \sum_k \frac{1}{k!} x^k$ (wird unten gezeigt)

Fragen:

(i) Was bringt das?

Beispiel Exponentialfunktion

– Man kann sie überhaupt erst mal ausrechnen!

– Man kann sie nähern, wenn's nicht genau sein muss.

(z.B. $\exp(x) \approx 1 + x$)

(ii) Wann geht das? (d.h., wann gibt es eine Potenzreihendarstellung?)

(iii) Wie kommt man an die Koeffizienten a_k?

(iv) Praktisch gesehen: Wie rechnet man mit solchen Reihen?

(Addition, Multiplikation, Differentiation)

Werden von rückwärts beantwortet.

Zuerst: Allgemeine Eigenschaften von Potenzreihen

3.3.1 Kurzer Abriss über Potenzreihen

Potenzreihe: Funktion der Form $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

(x komplex, a_k reell oder komplex).

1) Konvergenz:

Erste Frage: Für welche x konvergiert eine solche Reihe überhaupt?

Antwort: Es gibt einen **Konvergenzradius** R, so dass gilt:

- Für $|x| < R$: Die Reihe ist **absolut konvergent**
  d.h. schon $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergiert.
- Für $|x| > R$: Die Reihe konvergiert nicht.
- Für $|x| = R$: Die Reihe konvergiert oder divergiert.

(Beweis in zwei Schritten:

(i) Wenn $P(x_0)$ konvergiert, dann ist $P(x)$ absolut konvergent für $|x| < |x_0|$

denn: $P(x_0)$ konvergent $\Rightarrow$ $a_k x_0^k$ beschränkt $\Rightarrow$ $\exists C$ mit $|a_k x_0^k| < C \ \forall k$

$\Rightarrow$ Für $q := |\frac{x}{x_0}| < 1$ gilt: $|a_k x^k| = |a_k x_0^k| |\frac{x}{x_0}|^k \le C q^k$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \le C \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{C}{1-q}$ konvergiert.

(ii) Wenn $P(x_1)$ divergiert, dann divergiert $P(x)$ für $|x| > |x_1|$

(denn: wenn $P(x)$ konvergent wäre, dann nach (i) auch $P(x_1)$.)

(i) und (ii) zusammengenommen $\Rightarrow$ Es existiert ein Konvergenzradius. ✓)

Bemerkung: Sofern die Reihe konvergiert, ist sie bei $|x| = R$ auch stetig

(**Abelscher Grenzwertsatz**).

Berechnung des Konvergenzradius oft ganz einfach:

- **Quotientenkriterium**: $\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|}$
  (falls Grenzwert existiert)

  (Beweis: Nimm an $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ existiert.
  $\xi = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists k_0 > 0 : \xi'' := \xi - \delta < |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < \xi' := \xi + \delta \, \forall \, k > k_0$
  Sei nun $\xi|x| < 1$. Wähle δ so, dass $\xi'|x| < 1 \Rightarrow \exists q$ mit $\xi'|x| < q < 1$
  $\Rightarrow |a_{k+1}x^{k+1}| < |a_k x^k| q < |a_{k_0}| q^{k-k_0} \; \forall \, k > k_0$. Schätze $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k$ ab.
  $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k < |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} = |a_{k_0}| \frac{1}{1-q}$ konvergiert.
  Sei $\xi|x| > 1$. Wähle δ so, dass $\xi''|x| > 1 \Rightarrow \exists Q$ mit $\xi''|x| > Q > 1$
  $\Rightarrow |a_{k+1}x^{k+1}| > |a_k x^k| Q > |a_{k_0}| Q^{k-k_0} \; \forall \, k > k_0$.
  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k > \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k > |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^{\infty} Q^{k-k_0}$ divergiert.)

- **Wurzelkriterium**: $\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|}}$
  (falls Grenzwert existiert)

  (Beweis: Nimm an $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert.
  $\xi = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists k_0 > 0 : \xi'' := \xi - \delta < \sqrt[k]{|a_k|} < \xi' := \xi + \delta \, \forall \, k > k_0$
  Sei nun $\xi|x| < 1$. Wähle δ so, dass $\xi'|x| < 1 \Rightarrow \exists q$ mit $\xi'|x| < q < 1$
  $\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}|x| < \xi'|x| < q < 1 \; \forall k > k_0$. Schätze $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k$ ab.
  $\Rightarrow |a_k||x|^k < q^k \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k < \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert.
  Sei $\xi|x| > 1$. Wähle δ so, dass $\xi''|x| > 1 \Rightarrow \exists Q$ mit $\xi''|x| > Q > 1$
  $\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}|x| > \xi''|x| > Q > 1 \; \forall \, k > k_0$
  $\Rightarrow |a_k||x|^k > Q^k \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k||x|^k > \sum_{k=k_0}^{\infty} Q^k$ divergiert.)

Beispiele:

- Geometrische Reihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \cdot x^k$, d.h. $a_k = 1 \, \forall k$
  $\Rightarrow R = 1$ nach beiden Kriterien.
- Exponentialfunktion: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, d.h. $a_k = \frac{1}{k!}$
  Quotientenkriterium: $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{1}{k+1}| = 0$
  $\Rightarrow R = \infty$
- Harmonische Reihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, d.h. $a_k = \frac{1}{k}$
  Quotientenkriterium: $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{k}{k+1}| = 1$
  $\Rightarrow R = 1$

Fehlerabschätzung: Wann kann man eine Reihe abbrechen?
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Betrachte Restglied $R_n(x) = P(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

- **Lagrangesches Abschätzung**: $|R_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max_{|t|<|x|} f(t)$.
- Praktische Abschätzung mittels geometrischer Reihe
  Falls $|a_{k+1}| < |a_k|$ für $k > n$ und $|x| < 1$, folgt $|R_n(x)| \le a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Aufgaben

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihen
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^k}{(k+m)^n} x^k$ für festes $n, m \in \mathbb{N}$
$\sum_{k=1}^{\infty} n! x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+9^n} x^n$, $\sum_{k=1}^{\infty} n^n x^n$

2) Rechnen mit Potenzreihen

- Addieren, Subtrahieren: Gliedweise
  $\sum a_k x^k \pm \sum b_k x^k = \sum (a_k \pm b_k) x^k$
- Multiplizieren: Nur bei *absolut konvergenten* Reihen erlaubt. Dann wird ausmultipliziert wie bei Polynomen. Ebenso kann man dividieren, sofern nicht durch Null geteilt wird.
  (Im Allgemeinen wird sich dabei der Konvergenzradius ändern).
- Substitution: *Absolut konvergente* Reihen können ineinander substituiert werden.
  (Im Allgemeinen wird sich dabei der Konvergenzradius ändern).
- Differentiation: Gliedweise.
  $f(x) = \sum a_k x^k \quad \rightarrow \quad f'(x) = \sum_k a_k k x^{k-1}$ etc.
- Eindeutigkeit Wenn $\sum a_k x^k \equiv \sum b_k x^k$ auf einem Intervall um $x = 0$, dann ist $a_k = b_k \; \forall k$.
  $\Rightarrow$ erlaubt Koeffizientenvergleich.

  Äquivalent: $\sum c_k x^k \equiv 0$ auf einem Intervall $\Rightarrow c_k = 0 \; \forall k$.
  (Folgt letztlich daraus, dass alle Ableitungen Null sind.)
  NB: Interpretation innerhalb der **linearen Algebra**:
  Potenzreihen bilden unendlichdimensionalen Vektorraum,
  Funktionen x^k bilden linear unabhängige Basis.

3.3.2 Konstruktion der Taylor-Reihe

Methode, Potenzreihen für Funktionen zu konstruieren. Funktioniert für sehr viele Funktionen $f(x)$.
Beantwortet Eingangsfrage (iii) ("Wie kommt man an die Koeffizienten?")

1) Taylor-Entwicklung um $x = 0$ **(MacLaurin-Reihe)**

Funktion $f(x)$ sei unendlich oft differenzierbar.
Setze an: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$
\begin{array}{rlccccccccl}
\Rightarrow & f(x) & = & a_0 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 & + & a_3 x^3 & + \cdots \Rightarrow f(0) = a_0 \\
 & f'(x) & = & & & a_1 & + & 2a_2 x & + & 3a_3 x^2 & + \cdots \Rightarrow f'(0) = a_1 \\
 & f''(x) & = & & & & & 2a_2 & + & 6a_3 x & + \cdots \Rightarrow f''(0) = 2a_2 \\
 & \vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Allgemein: $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!} x^{k-n} = n! a_n + \cdots \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n$

$\Rightarrow$ Taylor-Reihe $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$.

NB: Falls $f(x)$ unendlich oft differenzierbar und nur im Reellen bekannt, kann man so $f(x)$ für komplexe Zahlen verallgemeinern ("analytische Fortsetzung").

2) Anwendungsbeispiele

- Geometrische Reihe

$$\left.\begin{array}{lclclcl} f(x) & = & (1-x)^{-1} & \Rightarrow & f(0) & = & 1 \\ f'(x) & = & (1-x)^{-2} & & f'(0) & = & 1 \\ f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} & & f''(0) & = & 2 \\ f'''(x) & = & 2\cdot 3(1-x)^{-4} & & f'''(0) & = & 2\cdot 3 \\ & \vdots & & & & & \\ f^{(n)}(x) & = & n!(1-x)^{-n} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & n! \end{array}\right\} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Rekonstruiere $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$!

- Exponentialfunktion

$$\left.\begin{array}{lclclcl} f(x) & = & e^x & \Rightarrow & f(0) & = & 1 \\ f'(x) & = & e^x & \Rightarrow & f'(0) & = & 1 \\ & \vdots & & & & & \\ f^{(n)}(x) & = & e^x & \Rightarrow & f^{(n)}(0) & = & 1 \end{array}\right\} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$\Rightarrow \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ wie behauptet!

3) Gültigkeit der Taylor-Entwicklung

- Wann kann man Taylor-Reihen bilden?

  Notwendige Bedingung: $f(x)$ bei $x = 0$ unendlich oft differenzierbar.

  Achtung: Diese Bedingung ist nicht hinreichend.

  Berühmtes Gegenbeispiel $f(x) = \exp(-1/x^2)$. Bei $x = 0$ unendlich oft differenzierbar, aber $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$.

  $\Rightarrow$ Taylorreihe wäre identisch Null.

  (Hintergrund: $f(x)$ kann bei $x \to 0$ nicht in die komplexe Ebene erweitert werden: $\lim_{r\to 0} \exp(-1/(ir)^2) \to \infty$ divergiert.)

- In welchem Gebiet ist Taylor-Reihe gültig?

  Antwort: Innerhalb des Konvergenzradius.

  Achtung: Nicht notwendig deckungsgleich mit dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion $f(x)$

  Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ist definiert im zusammenhängenden Gebiet $x \in]-\infty, 1[$, aber Taylorreihe $\sum x^k$ nur für $|x| < 1$.

4) Erweiterung: Taylor-Reihe um beliebigen Punkt x_0

Nachteile der MacLaurin-Reihe bei großen $|x|$:

- Für große x muss man immer mehr Terme mitnehmen, um eine gute numerische Genauigkeit zu erzielen
- Eventuell konvergiert die Reihe gar nicht mehr.

Ausweg: Bilde Taylor-Reihe um anderen Punkt x_0.

Schreibe $f(x) = f(x_0 + h) =: \hat{f}(h)$, entwickle $\hat{f}(h)$ nach $h = x - x_0$

NB: Ableitungen $\hat{f}^{(n)}(h) = f^{(n)}(x_0)$

$\Rightarrow$ Taylor-Reihe $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$.

5) Erweiterung: Taylor-Reihen in mehreren Variablen

Beispiel: Funktion von zwei Variablen $f(x,y)$, entwickelt um (x_0,y_0).

Potenzreihe: $f(x,y) = a_{00} + a_{10}(x-x_0) + a_{01}(y-y_0)$
$+ a_{20}(x-x_0)^2 + a_{11}(x-x_0)(y-y_0) + a_{02}(y-y_0)^2$
$= \sum_{ij} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$

Koeffizienten a_{ij} sind wieder eindeutig.
Ergeben sich als partielle Ableitungen: $a_{00} = f(x_0,y_0)$,
$a_{10} = \frac{\partial}{\partial x} f|_{(x_0,y_0)}$, $a_{01} = \frac{\partial}{\partial y} f|_{(x_0,y_0)}$,
$a_{20} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f|_{(x_0,y_0)}$, $a_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f|_{(x_0,y_0)}$, $a_{02} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f|_{(x_0,y_0)}$, etc.

$\Rightarrow$ Taylor-Reihe: $f(x,y) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!}\big[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\big]^i\big[(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\big]^j f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$

Kann mit $(a+b)^n = \sum_i \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$ umgeschrieben werden als

$f(x,y) = \sum_n \frac{1}{n!}\big[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\big]^n f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$

Verallgemeinerung für Funktion $f(x_1,\cdots x_M)$ von M Variablen x_j
Entwicklung um $(a_1,\cdots a_M)$

$$\boxed{f(x_1,\cdots,x_M) = \sum_n \frac{1}{n!}\big[\sum_{j=1}^M (x_j-a_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\big]^n f(x_1,\cdots x_M)\Big|_{(a_1,\cdots,a_M)}}$$

3.3.3 Anwendungen

1) Exponentialfunktion: Wie gehabt

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

2) Hyperbolische Funktionen: Summen/Differenzen von $e(x)$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

3) Trigonometrische Funktionen: über Taylor-Entwicklung

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

(Rechnung für $\sin(x)$:

$$\left.\begin{array}{lcl}
f(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos(x) & & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin(x) & & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos(x) & & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin(x) & & f^{(4)}(0) = 0 \\
 & \vdots & \\
f^{(4n)}(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f^{(4n)}(0) = 0 \\
f^{(4n+1)}(x) = \cos(x) & & f^{(4n+1)}(0) = 1 \\
f^{(4n+2)}(x) = -\sin(x) & & f^{(4n)}(0) = 0 \\
f^{(4n+3)}(x) = -\cos(x) & & f^{(4n)}(0) = -1
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_{2n} = \dfrac{f^{(2n)}(0)}{n!} = 0 \\ a_{2n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n!} \end{array}$$

Rechnung für $\cos(x)$:

$$\left.\begin{array}{lll} f(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin(x) & & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin(x) & & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) & & f^{(4)}(0) = 1 \\ & \vdots & \\ f^{(4n)}(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4n)}(0) = 1 \\ f^{(4n+1)}(x) = -\sin(x) & & f^{(4n+1)}(0) = 0 \\ f^{(4n+2)}(x) = -\cos(x) & & f^{(4n)}(0) = -1 \\ f^{(4n+3)}(x) = \sin(x) & & f^{(4n)}(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a_{2n} & = (-1)^n \dfrac{1}{n!} \\ a_{2n+1} & = 0 \end{array}$$

Folgerung: Liefert endlich den Beweis des Eulerschen Satzes

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n}}_{(-1)^n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n+1}}_{(-1)^{n+1}/i} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Vergleich mit $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$:

$\Rightarrow$ $\boxed{\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)}$ ✓

4) Logarithmus:

Funktion $\ln(x)$ lässt sich um $x = 0$ nicht Taylor-entwickeln (divergiert).
Aber: Entwicklung um $x_0 = 1$ möglich.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

(Rechnung

$$\left.\begin{array}{lll} f(x) = \ln(1+x) & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = (1+x)^{-1} & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} & & f'''(0) = 2 \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^n\,(n-1)! \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$)

Bemerkungen:

- Konvergenzradius ist $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n+1}{n}| = 1$
  Macht Sinn, da $\ln(1+x)$ bei $x = 1$ divergiert.
- Mit $x \to 1$ kann man den Wert von $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$ bestimmen:
  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \ln(1+1) = \ln(2)$

5) Potenzen: x^α (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig)

Analog 4): Für allgemeine α ist Entwicklung um $x = 0$ i.A. nicht möglich, da x^α nicht beliebig oft differenzierbar
$\to$ Entwicklung um $x = 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \text{ mit } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

(Rechnung :

$$\left.\begin{array}{lll} f(x) = (1+x)^\alpha & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & & f''(0) = -1 \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1}{n!} = \binom{\alpha}{n}$)

Speziell $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahl $\to \binom{N}{n} = 0$ für $n > N$)
$\Rightarrow$ Potenzreihe bricht ab.
Man erhält bekannte Formel $(1+x)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k$.

6) Tabelle:

Taylor-Reihe bis zur Ordnung x^2 für wichtige Funktionen:

- $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2$
- $\sin(x) \approx x$
- $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$

Aufgaben

Berechnen Sie die Taylorreihe um $x = 0$ von
- $f(x) = \exp(-x^2)$ (Gaußkurve)
- $f(x) = 1/(1-x^2)$

Berechnen Sie die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe von
- $\tan(x)$
- $e^x \sin(x)$ (multiplizieren der Reihen für e^x und $\sin(x)$
- $e^{\sin(x)}$

Berechnen Sie die Taylor-Reihe von
- $\exp(x)$ um den Punkt $x_0 = 10$
- $\sin(x)$ um den Punkt $x_0 = \pi$

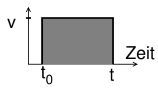
Lösen Sie näherungsweise die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2x} = x$

3.4 Integralrechnung

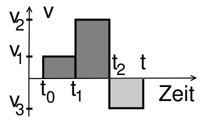
Erinnerung: Einleitendes Beispiel bei der Differentialrechnung (Kapitel 3.2.1):
Wagen, der entlang gerader Straße fährt.
Gegeben Weg $s(t)$ → Geschwindigkeit $v(t)$?

Betrachte nun umgekehrtes Problem: $v(t)$ gegeben (z.B. vom Tacho)
→ Wie kann man daraus Strecke $s(t)$ berechnen (z.B. Kilometerzähler)

Graphisch

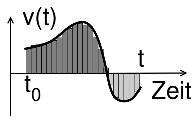
- Wenn v konstant ist: 

→ $s(t) = v(t - t_0)$
$\widehat{=}$ Fläche

- Wenn v sich ab und zu abrupt ändert: 

→ $s(t) = v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t - t_2)$
$\widehat{=}$ Fläche – Fläche

- Beliebiger Verlauf $v(t)$:
→ Annäherung durch viele infinitesimale Stufen
$\widehat{=}$ Fläche unter der Kurve des Teils $v(t) > 0$
– Fläche über der Kurve des Teils $v(t) < 0$
(Fläche mit Vorzeichen)

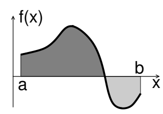


Führt zum sogenannten **Riemannschen Integral**

Allgemeine Aufgabenstellung: Berechnung der Fläche unter einer Kurve
Unser Beispiel zeigt, dass das so etwas wie eine "inverser Ableitung" ist.
→ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

3.4.1 Das Riemannsche Integral

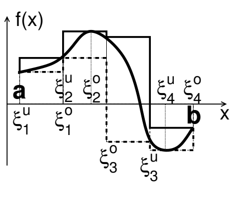
Gegeben reelle Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.
Aufgabe: Berechnung der Fläche F unter der Kurve $f(x)$
(ggf. mit negativen Beiträgen für $f(x) < 0$).



1) Konstruktion des Integrals

- Zerlege Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle der Breite $\Delta x = (b - a)/n$.
→ Teilintervalle ν: $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ mit $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x$.

- Lege in jedem Teilintervall x-Werte ξ_ν fest, so dass:
$x = \xi_\nu^{(o)}$: Wert, an dem $f(x)$ maximal wird.
$x = \xi_\nu^{(u)}$: Wert, an dem $f(x)$ minimal wird.



- Berechne $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_n)\,\Delta x$ jeweils für $\xi_\nu^{(o)}$ und $\xi_\nu^{(u)}$.
→ Obersumme $S_n^{(o)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu^{(o)})\,\Delta x$
Untersumme $S_n^{(u)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu^{(u)})\,\Delta x$
⇒ $S_n^{(u)} < F$ (gesuchte Fläche) $< S_n^{(o)} \quad \forall\, n$

- Bilde Grenzwert $n \to \infty$.
  $f(x)$ heißt Riemann-integrierbar, falls die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} S_n^{(o)}$ und $\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)}$ existieren und $\lim_{n\to\infty} S_n^{(o)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)}$.
  Dann ist die Fläche $F = \lim_{n\to\infty} S_n^{(o,u)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)})\, \Delta x$.

Notation: $\boxed{F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)}$.

2) Riemann-Integrierbarkeit

Es gilt: Falls $f(x)$ auf $[a,b]$ stückweise stetig ist (d.h. stetig auf endlich vielen Teilintervallen) und beschränkt, dann ist $f(x)$ Riemann-integrierbar.
(anschaulich klar. Beweis weggelassen.)

3) Eigenschaften des Integrals

- Linearität: $\int_a^b \{Af(x) + Bg(x)\}\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + B\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Intervall-Addition: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Ungleichungen:
  (i) Wenn $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a,b]$
  Dann folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
  (ii) Dreiecksungleichung: $\underbrace{|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x|}_{\text{entält negative Flächen}} \le \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\text{alle Flächen positiv}}$.
  (iii) Wenn $m \le f(x) \le M\ \ \forall\, x \in [a,b]$
  Dann folgt: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$
- Umkehrung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
  (denn: dann sind in dem Ausdruck $\lim_{nto\infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)})\,\Delta x$ die Größen $\Delta x = x_\nu - x_{\nu-1}$ negativ.)

4) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f(x)$ stetig in $[a,b]$, so existiert ein $\bar{\xi} \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\bar{\xi})$.

3.4.2 Hauptsatz und Stammfunktion

Aus dem Beispiel Geschwindigkeit war schon ersichtlich: Integrieren ist irgendwie invers zum Differenzieren. Das soll nun spezifiziert werden (in zwei Teilen).

1) Gegeben eine stetige Funktion $f(x)$. Definiere $\boxed{F_{x_0}(y) = \int_{x_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Dann gilt: $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_{x_0}(y) = f(y)}$.

(Beweisskizze: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{x_0}^y f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y}\big[\int_{x_0}^{y+\Delta y} f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^y f(x)\mathrm{d}x\big]$
$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_y^{y+\Delta y} f(x)\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung}} \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\Delta y\, f(\bar{\xi}) \underbrace{=}_{f \text{ stetig}} f(y)$)

Wähle $\bar{\xi} \in [y, y+\Delta y]$ so, dass $\int_y^{y+\Delta y} f(x)\mathrm{d}x = \Delta y f(\bar{\xi})$

2) Gegeben eine differenzierbare Funktion $f(x)$

Dann gilt: $\boxed{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) =: f(x)\Big|_a^b}$.

(Beweisskizze: $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^n \Delta x\, f'(\xi_\nu) \underbrace{=}_{\substack{\text{Mittelwertsatz der Differentialrechnung:}\\ \text{Wähle } \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu] \text{ so, dass } f'(\xi_\nu)\Delta x = f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^n \Delta x \frac{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})}{\Delta x}$

$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x_0) \underbrace{=}_{x_n = b,\; x_0 = a} f(b) - f(a)$.)

Zusammen: **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Fazit: Um das Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, muss man die **Stammfunktion** von $f(x)$ kennen, d.h. die Funktion $F(x)$ mit $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)}$.

Dann ist $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b}$.

Bemerkungen:

- Stammfunktion ist natürlich nicht eindeutig. Mit $F(x)$ ist auch $F(x)+c$ Stammfunktion zu $f(x)$ für jede beliebige Konstante c.
  Aber: an dem Wert von $F(x)|_a^b$ ändert das nichts.
- Wegen des Hauptsatzes kann man Integrale auch dazu benutzen, Stammfunktionen zu ermitteln (über $F(y) = \int^y f(x)\,\mathrm{d}x$).
  Deshalb unterscheidet man zwischen

  unbestimmten Integralen: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
  → keine expliziten Integrationsgrenzen angegeben.
  Es wird nur allgemein nach Stammfunktion gesucht.

  bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
  → explizite Integrationsgrenzen.
  Gesucht wird konkreter Wert eines Integrals.

Beispiele
- $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)$ (+ Konstante)
- $\int_0^b \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_a^b = -\cos(b) + \cos(a)$

Aufgaben

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an:
$f(x) = x^3$, $f(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$,
$f(x) = \sinh(x)$ $f(x) = 2^x$, $f(x) = (x+2)\sin(x^2+4x-6)$

Bestimmen Sie die folgenden Integrale
$\int x^n\,\mathrm{d}x$, $\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
$\int_0^1 \mathrm{d}x/(1+x^2) (\rightsquigarrow \pi/4)$, $\int_0^a \mathrm{d}x/x^{1-a}$ mit $a > 0$ ($\rightsquigarrow a^{a-1}$)

3.4.3 Integrationsmethoden

Vorab: Es gibt leider kein Patentrezept, ein Integral zu knacken.
Anders als beim Differenzieren: Man kann für (fast) jede differenzierbare Funktion einen expliziten Ausdruck für die Ableitung herleiten. Für Integrale ist das oft nicht möglich.

Hier: Ein paar Tricks, mit denen man Integrale manchmal doch knacken kann.

1) Differentiationstabelle rückwärts lesen
bzw. Stammfunktion erraten.

2) Lineare Zerlegung

Ausnutzen von $\int \{Af(x) + Bg(x)\}\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\,\mathrm{d}x + B\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiele

(i) $\int_0^1 (1-x^2)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-2x^2+4x^4)\mathrm{d}x$
$= \int_0^1 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = 1 - 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(\phi)\mathrm{d}\phi \underbrace{=}_{\text{Symmetrie}} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\phi)\mathrm{d}\phi \underbrace{=}_{\text{Trick}} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{[\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)]}_{1}\mathrm{d}\phi$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{4}$

(iii) Partialbruchzerlegung

Gesucht sei z.B. $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$

$\leadsto$ Zerlege $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad (= \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)})$

$\Rightarrow\ A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B) \stackrel{!}{=} 1\ \forall x$

$\Rightarrow\ A+B=0,\quad 2A+B=1 \ \Rightarrow\ A=1,\ B=-1$

$\Rightarrow\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \int_0^1 \frac{1}{x+2}$
$= \ln(x+1)\big|_0^1 - \ln(x+2)\big|_0^2 = \ln(4/3).$

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_{-1}^1 (1+2x^3)^3 \mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{x(1-x)}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$
$\left(\ \leadsto \frac{38}{7},\ (6\ln(\frac{3}{2})-1),\ (\frac{\pi}{4}-\ln(2))\ \right)$

3) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

Voraussetzung: $f(x)$, $g(x)$ differenzierbar.

Dann gilt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}$.

(denn: $f(x)g(x)\big|_a^b = \int_a^b \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x)g(x)\big] = \int_a^b \mathrm{d}x\big[f'(x)g(x)\big] + \int_a^b \mathrm{d}x\big[f(x)g'(x)\big]$)

Beispiele

(i) $\int_0^y \mathrm{d}x\ \underbrace{x}_{f}\ \underbrace{\mathrm{e}^{x}{}'}_{g} = x\,\mathrm{e}^x\big|_0^y - \int_0^y \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x\big|_0^y - \mathrm{e}^x\big|_0^y = \mathrm{e}^x(x-1)\big|_0^y$

(ii) $\int_1^y \mathrm{d}x \ln(x) = \int_1^y \mathrm{d}x \cdot \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f} = x \ln x\Big|_1^y - \int_1^y \mathrm{d}x x \frac{1}{x} = x(\ln(x)-1)\Big|_1^y$

($\rightarrow$ Stammfunktion von $\ln(x)$ ist $x(\ln(x)-1)$)

(iii) $\int_0^y \mathrm{d}x \underbrace{\sin(x)}_{f} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'} = \sin(x)\mathrm{e}^x\Big|_0^y - \int_0^y \mathrm{d}x \underbrace{\cos(x)}_{f} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'}$

$$= \sin(x)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^y - \cos(x)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^y - \int_0^y \mathrm{d}x\, \sin(x)\,\mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow \int_0^y \sin(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x)-\cos(x))\Big|_0^y$$

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^y \mathrm{d}x x \sin(x)$, $\int_0^y \mathrm{d}x x^2 \cos(x)$, $\int_0^y \mathrm{d}x x \ln(x)$, $\int_0^y \mathrm{d}x x^3 \mathrm{e}^{x^2}$, $\int_0^y \mathrm{d}x x \sinh(x)$

Zeigen Sie

- $\int \mathrm{d}x\, f'(x) x^n = f(x)x^n - n \int \mathrm{d}x\, f(x)\, x^{n-1}$
- $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x} x^n = n!$ (z.B. mittels vollständiger Induktion)

4) **Substitution** (Umkehrung der Kettenregel)

Idee: Austausch der Integrationsvariablen $x \rightarrow u$ in $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Voraussetzung: $x \leftrightarrow u$ hängen in umkehrbarer und stetig differenzierbarer Weise voneinander ab.
($u = g(x)$, $x = g^{-1}(u) = x(u)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x'(u)$ ist stetig).

Dann gilt: $\boxed{\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(x_a)}^{g(x_b)} x'(u)\, f(x(u))\,\mathrm{d}u = \int_{u_a}^{u_b} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\, f(x(u))\,\mathrm{d}u}$.

(denn: Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$,
also $F(x) = \int_a^x \mathrm{d}x'\, f(x')$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$
$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = f(x(u)) \cdot x'(u) \;\Rightarrow\; F(x(u)) = \int \mathrm{d}u\, f(x(u))\, g'(u)$ ✓)

Beispiele

(i) $\int_1^5 \mathrm{d}x \sqrt{2x-1}$ | Setze $u = 2x-1 \Rightarrow x(u) = \frac{1}{2}(u+1)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2}$

$$= \int_{2\cdot 1-1}^{2\cdot 5-1} \mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\sqrt{u} = \int_1^9 \mathrm{d}u\, \frac{1}{2}\sqrt{u} = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{26}{3}$$

(ii) $\int \mathrm{d}t\, \cos(\omega t) \underbrace{=}_{u=\omega t} \int \mathrm{d}u\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\, \cos(u) \underbrace{=}_{\mathrm{d}t/\mathrm{d}u = 1/\omega} \frac{1}{\omega}\, \sin(u) = \frac{1}{\omega}\, \sin(\omega t)$

(iii) $\int_0^b \mathrm{d}t\, t\, \mathrm{e}^{-\alpha t^2} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha b^2} \mathrm{e}^{-u} = -\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{\alpha b^2} = \frac{1}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha b^2})$
(mit $u = \alpha t^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2\alpha t$ bzw. $\mathrm{d}u = 2\alpha t \mathrm{d}t$)

(iv) $\int \mathrm{d}x \tan(x) = \int \mathrm{d}x \sin(x) \frac{1}{\cos(x)} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(u) = -\ln(\cos(x))$
(mit $u = \cos(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$ bzw. $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$)

Man sieht: Eine geeignete Substitution zu finden erfordert Intuition.
– geht nicht "von alleine"!

Aufgaben

Zeigen Sie mit der Methode der Substitution: $\int_C^x \mathrm{d}x' \frac{1}{x'+\alpha} = \ln(x'+\alpha) + \text{const}$

Berechnen Sie
$\int_0^r \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2x/a}$, $\int_{-a}^a \mathrm{d}x\, \cosh(\frac{x}{A})$, $\int_{-a}^a \mathrm{d}x\, \sinh(\frac{x}{A})$, $\int \mathrm{d}x \sqrt{x \pm b}$, $\int_{-1}^1 \mathrm{d}z/\sqrt{az-b}$,
$\int_0^1 \mathrm{d}x \sqrt{1-x^2}$, (Tip: Substitution $x = \sin(\phi)$, Lösung ist $\frac{\pi}{4}$), $\int_0^r \mathrm{d}x \sqrt{r^2-x^2}$,
$\int \mathrm{d}t\, \dot{x}(t)$, $\int \mathrm{d}t\, x(t)\dot{x}(t)$

Berechnen Sie
$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\sin(\phi)}{\cos^2(\phi)+1}$, $\int \mathrm{d}x\, x\sqrt{x^2 \pm a}$, $\int \mathrm{d}x\, \frac{x}{1+x^2}$

Zeigen Sie

- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)\, g^n(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1}\Big|_{x_a}^{x_b}$
- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)/g(x) = \ln|g(x)|\Big|_{x_a}^{x_b}$
- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)\, \sqrt[n]{g(x)} = \frac{n}{n+1}\, \sqrt[n]{g(x)} g(x)\Big|_{x_a}^{x_b}$
- Bestimmen Sie die analoge Formel für $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)/g^n(x)$

5) Integralfunktionen

Bei manchen Funktionen läßt sich das Integral nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken → Integral definiert neue Funktion

Beispiele:

- **Error-Funktion**: $\mathrm{Erf}(y) = \int_0^y \exp(-x^2)\, \mathrm{d}x$.
- **Elliptische Integrale**: $F(k,\phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}}\, \mathrm{d}\psi$,
  $E(k,\phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}\, \mathrm{d}\psi$.
- **Integralsinus**: $\mathrm{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$.
- **Integralcosinus**: $\mathrm{Ci}(y) = -\int_y^\infty \frac{\cos(x)}{x}\, \mathrm{d}x$.
- **Integralexponentialfunktion**: $\mathrm{Ei}(y) = -\int_{-\infty}^y \frac{\exp(x)}{x}\, \mathrm{d}x$.
- **Integrallogarithmus**: $\mathrm{li}(y) = -\int_0^y \frac{1}{\ln(x)}\, \mathrm{d}x \;(y \neq 1)$.
  $\mathrm{Li}(y) = -\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}\, \mathrm{d}x \;(y > 1)$.
  NB: Im Falle $\mathrm{li}(y)$, $y > 1$ wird über den Pol bei $x = 1$ im Sinne eines Cauchyschen Hauptwertes integriert, siehe 3.4.4.

6) Hilfsmittel

- Formelsammlungen, Integraltafeln, z.B.
  - Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik
  - Abramowitz, Stegun, Handbook of Mathematical Functions
  - Gradshteyn, Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products
- Symbolische Programme, z.B. MATHEMATICA, MAPLE
  Achtung: Teilweise fehlerhaft, vor allem wenn die Lösung Integralfunktionen beinhaltet. → Ergebnisse gegenchecken, z.B. durch Vergleich mit der numerischen Lösung für ausgewählte Zahlen.

7) Numerische Lösung (intelligent " Kästchen zählen")

Aufgaben

Berechnen Sie
(i) $\int \mathrm{d}x\, \sqrt{1+x^2}$,
(ii) $\int \mathrm{d}x\, \frac{x}{1+x^4}$,
(iii) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$,
(iv) $\int \mathrm{d}x\, \ln(1+x^2)$,
(v) $\int \mathrm{d}x\, \arcsin(x)$

(Lösungswege: (i) Substitution $x = \sinh(u)$, (ii) Substitution $u = x^2$, (iii) Partialbruchzerlegung, (iv) Partielle Ableitung von $\int dx \cdot 1 \cdot \ln(1+x^2)$, (v) Partielle Ableitung von $\int dx \cdot 1 \cdot \arcsin(x)$

Lösungen: (i) $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arsinh}(x))$, (ii) $\frac{1}{2}\mathrm{artanh}(x^2)$, (iii) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \ln(2))$, (iv) $\ln(1+x^2)(x - \frac{1}{2})$, (v) $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$)

3.4.4 Uneigentliche Integrale

Bis jetzt: Lästige Einschränkungen für das Integral:
1) Intervallgrenzen endlich
2) Integrand $f(x)$ beschränkt

Manchmal kann man Integrale im Grenzwert auch ausrechnen, wenn Einschränkungen nicht zutreffen → "Uneigentliche Integrale".

1) Uneigentliche Integrale erster Art: Integrationsgrenze unendlich

- Definition
  Obere Grenze: $\int_a^\infty dx\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$
  Untere Grenze: $\int_{-\infty}^b dx\, f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx\, f(x)$
  Beide Grenzen: $\int_{-\infty}^\infty dx\, f(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b dx\, f(x)$
  Cauchy-Hauptwert: $P\int_{-\infty}^\infty dx\, f(x) := \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a dx\, f(x)$
  (falls $\int_{-\infty}^\infty dx\, f(x)$ nicht existiert,
  existiert vielleicht wenigstens der Hauptwert $P\int_{-\infty}^\infty dx\, f(x)$).
- Beispiele
  (i) $\int_0^\infty dx\, e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b dx\, e^{-x} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} - e^0) = 1$
  (ii) $\int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, \frac{1}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\frac{b}{a}) \to \infty$
  (iii) $\int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, x^{-(1+\alpha)} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha}(a^{-\alpha} - b^{-\alpha})$
  $$\Rightarrow \boxed{\int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \begin{cases} a^{-\alpha}/\alpha & : \alpha > 0 \\ \infty & : \alpha \le 0 \end{cases}}$$
  (iv) $\int_{-\infty}^\infty dx\, \frac{x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b dx\, \frac{x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} [\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)]$
  → divergiert auf beiden Seiten.
  Aber: Hauptwert $P\int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{1+x^2} = 0$ existiert.
  (v) $\int_{-\infty}^\infty dx\, x$ existiert nicht, aber $P\int_{-\infty}^\infty dx\, x = 0$ existiert.

Vergleichskriterien:

Kriterien, mit denen man abschätzen kann, ob ein Integral überhaupt konvergiert.

a) Absolute Konvergenz
Falls $\int_a^\infty dx\, |f(x)|$ konvergiert, konvergiert auch $\int_a^\infty dx\, f(x)$.

b) Konvergente Majorante
$|f(x)| \le M(x)\ \forall x$ und $\int dx\, M(x)$ konvergiert. Dann konvergiert $\int dx\, |f(x)| \le \int dx\, M(x)$,
und damit auch $\int dx\, f(x)$.

c) Divergente Minorante

$f(x) \geq m(x) \geq 0 \;\forall\; x$ und $\int \mathrm{d}x\, m(x)$ divergiert.
Dann divergiert auch $\int \mathrm{d}x\, f(x)$.

Beispiel: Abschätzung der Konvergenz von $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2}$:

$x^2 > (x-1)\;\forall x \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-(x-1)}$

Wegen $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-(x-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}} < \infty$ konvergiert auch $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2}$.

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x/(1+x^2)$, $\int_{-\infty}^{-2/\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(1/x)}{x^2}$, $\int_{-\infty}^\infty x^n$, $P\int_{-\infty}^\infty x^n$

2) Uneigentliche Integrale zweiter Art:

Integrand unbeschränkt an einem Punkt x_0 ("divergiert", "hat Singularität").

(Beispiel: $1/x$ divergiert am Punkt $x_0 = 0$).

Definition:

Singularität an der unteren Grenze: $\int_{x_0}^{b>x_0} \mathrm{d}x f(x) = \lim_{\eta\to 0^+} \int_{x_0+\eta}^b \mathrm{d}x f(x)$.

Singularität an der oberen Grenze: $\int_{a<x_0}^{x_0} \mathrm{d}x f(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x f(x)$.

Intervall $[a,b]$ schließt Singularität ein:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{\substack{\eta\to 0^+\\ \epsilon\to 0^+}} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\, f(x) + \int_{x_0+\eta}^b \mathrm{d}x\, f(x)\right]$$

Cauchyscher Hauptwert:

$$P\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{\eta\to 0^+} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\, f(x) + \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\, f(x)\right]$$

Beispiele:

(i) $\int_0^b \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^b \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \lim_{\eta\to 0^+} \ln|x|\Big|_0^b = \lim_{\eta\to 0^+} \ln|b/\eta| \to -\infty$

(ii) $\int_{-b}^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{x}$ existiert dann natürlich auch nicht,
aber $P\int_{-b}^b \mathrm{d}x \frac{1}{x} = 0$ existiert.

(iii) $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} = \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^{1+\alpha}} = \lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{\alpha}(\eta^{-\alpha} - b^{-\alpha})$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} = \begin{cases} \infty & : \;\alpha \geq 0 \\ -b^{-\alpha}/\alpha & : \;\alpha < 0 \end{cases}}$$

Vergleichskriterien

Analog den uneigentlichen Integralen erster Art.
– Falls $\int \mathrm{d}x\, |f(x)|$ konvergiert, dann auch $\int \mathrm{d}x\, f(x)$.
– Majorantenkriterium/Minorantenkriterium analog

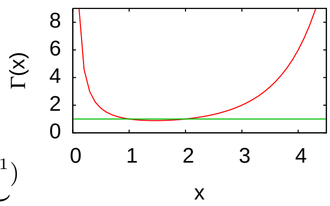
Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^1 \mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2}$, $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \tan(x)$, $\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \tan(x)$, $P\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \tan(x)$,

3) Wichtige uneigentliche Integrale

Gaußintegral: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (Herleitung siehe 3.4.5).

Gamma-Funktion: $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \quad (x > 0)$



- $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} = 1$ (siehe 1) Beispiel (i))
- $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
  (da $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} t^x = \underbrace{-t^x \mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + x \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}}_{\Gamma(x)}$)

  $\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$
  $\Gamma(x)$ interpoliert Fakultät.
- Weiterer spezieller Wert:
  $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-1/2} \mathrm{e}^{-x} \overset{(y=\sqrt{x})}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \mathrm{e}^{-y^2} = \sqrt{\pi}$.

Beta-Funktion: $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t \quad (x > 0, y > 0)$
Es gilt: $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

Elliptische Integrale:
$F(k,\phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}} \mathrm{d}\psi = \int_0^{\sin\phi} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,
$E(k,\phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}\, \mathrm{d}\psi = \int_0^{\sin\phi} \mathrm{d}x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}$,
Vollständige elliptische Integrale: $\mathrm{K} = F(k,\pi/2), \mathrm{E} = E(k,\pi/2)$.

3.4.5 Mehrfachintegrale

Mit den vorher behandelten Methoden kann man auch komplizierte Probleme lösen, z.B. verschachtelte Integrale.

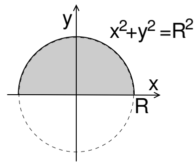
Wichtige Anwendung: Berechnung von Volumina

3.4.5.1 Beispiele

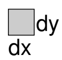
(i) Fläche A eines Kreises des Radius R

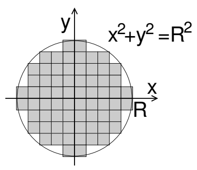
Erste Lösung: Fläche des Halbkreises über Einfachintegral

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$
$\Rightarrow A/2 = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \sqrt{R^2-x^2} = 2 \underbrace{\int_0^R \mathrm{d}x \sqrt{R^2-x^2}}_{R^2 \frac{\pi}{4} \text{ lt. Übungsaufgabe}} = 2R^2 \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow A = \pi R^2$



Zweite Lösung: Alternative Sichtweise: – Integriere (d.h. summiere) über infinitesimale Flächenelemente $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$





$$A = \iint_{\text{Kreis}} \mathrm{d}A = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, 2\sqrt{R^2-x^2} = 4\int_0^R \mathrm{d}x\, 2\sqrt{R^2-x^2} = \pi R^2$$

(ii) Volumen V einer Kugel des Radius R

Integriere über infinitesimale Volumenelemente $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

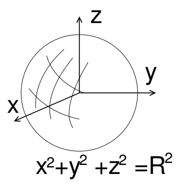
$$V = \iiint_{\text{Kugel}} \mathrm{d}V = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z$$

$$= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\, 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

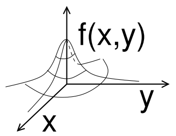
$$= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x 4 \underbrace{\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\, 2\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}}_{(R^2-x^2)\frac{\pi}{4}\ \text{lt. Übungsaufgabe}}$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, (R^2-x^2)$$

$$= \pi(2R^3 - R^2 \tfrac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}) = \pi R^3(2-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$



(iii) Volumen unter einer Gaussglocke



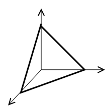
$$\iint_{\infty} \mathrm{d}A\, f(x,y) := \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)$$

$$= \iint_{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2}$$

$$= \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2}}_{\text{Nachschlagen: } \sqrt{\pi}} \Big]^2 = \sqrt{\pi}^2 = \pi.$$

Aufgaben

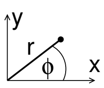
- Berechnen Sie die Funktion $f(x,y)$ auf dem Gebiet G
  $f(x,y) = 1$ auf $G = \{(x,y) : 2 \le x \le 3, x^2 \le y \le x^3\}$
  $f(x,y) = y\sqrt{1-x^2}$ auf $G = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$
- Berechnen Sie das Volumen eines rechtwinkligen Dreiecks der Seitenlänge 3cm
  $V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y$
- Berechnen Sie das Volumen eines dreidimensionalen Simplex der Seitenlänge a:
  $V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z$
- Berechnen Sie das Volumen eines d-dimensionalen Simplex der Seitenlänge 1



3.4.5.2 Polarkoordinaten

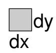
Bis jetzt: Koordinaten (x,y,z) ("**kartesische Koordinaten**").
Oft ist es bequemer, andere Integrationsvariablen zu benutzen.
Dann muss man die Form des Flächenelementes $\mathrm{d}A$ bzw. Volumenelementes $\mathrm{d}V$ anpassen (analog Substitution, siehe 3.4.3 4): $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\, x'(u)$)
Wichtigster Fall: Polarkoordinaten.

1) Zwei Dimensionen: **Kreiskoordinaten** (r,ϕ)

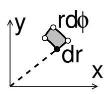


$$\begin{matrix} x = r\ \cos(\phi) \\ y = r\ \sin(\phi) \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} r \in [0,\infty[\\ \phi \in [0,2\pi[\end{matrix}$$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ entspricht der infinitesimalen Fläche $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



$\mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi$ entspricht der infinitesimalen Fläche $\mathrm{d}A = \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\phi$



Also: Für $f(x,y) = f(x(r,\phi), y(r,\phi)) =: \bar{f}(r,\phi)$ folgt:
$$\iint \mathrm{d}A\, f(x,y) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int r\mathrm{d}r \int \mathrm{d}\phi\, \bar{f}(r,\phi)$$

Beispiele:

(i) Kreisfläche: $A = \iint_{\text{Kreis}} \mathrm{d}A = \underbrace{\int_0^R \mathrm{d}r\, r}_{R^2/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{2\pi} = \pi R^2.$

(ii) Volumen unter Gaussglocke:

$$\iint_\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, \mathrm{e}^{-r^2}}_{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}|_0^\infty = \frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{2\pi} = \pi$$

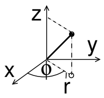
NB: Das beweist endlich auch $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

(wegen $\iint_\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2}\right]^2$ (siehe 3.4.5.1, Beispiel (iii))

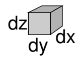
Aufgaben

- Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreisrings mit innerem Durchmesser r_1 und äußerem Durchmesser r_2.
- Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kegels der Höhe h und Grundfläche A.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche des Gebiets $G = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

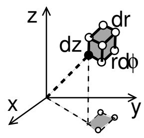
2) Drei Dimensionen: **Zylinderkoordinaten** (r, ϕ, z)



$$\begin{array}{lll} x = r\,\cos(\phi) & & r \in [0, \infty[\\ y = r\,\sin(\phi) & \text{mit} & \phi \in [0, 2\pi[\\ z = z & & z \in]-\infty, \infty[\end{array}$$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \,\widehat{=}\,$ infinitesimales Volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 

$\mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi, \mathrm{d}z \,\widehat{=}\,$ infinitesimales Volumen $\mathrm{d}A = \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}z$

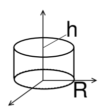


Also: Für $f(x,y,z) = f(x(r,\phi), y(r,\phi), z) =: \bar{f}(r,\phi,z)$ folgt:

$$\iiint \mathrm{d}V\, f(x,y,z) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\mathrm{d}z\, f(x,y,z) = \int r\mathrm{d}r \int \mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\, \bar{f}(r,\phi,z)$$

Beispiel:

Volumen eines Zylinders der Höhe h und des Radius R

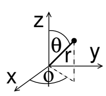


$$\iint_{\text{Zylinder}} \mathrm{d}V = \underbrace{\int_0^R r\mathrm{d}r}_{\frac{r^2}{2}|_0^R = \frac{R^2}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h \mathrm{d}z}_{h} = \pi R^2\, h$$

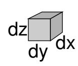
Aufgaben

- Berechnen Sie das Volumen des Metalls eines 1m langen Rohres mit Innenradius $r_1 = 3$cm und Aussenradius $r_2 = 3.2$cm.
- Das Trägheitsmoment θ eines Körpers der Dichte ρ bezüglich der z-Achse ist gegeben durch: $\theta = \rho \iiint \mathrm{d}V\ (x^2 + y^2)$. Hier wird natürlich über den Körper integriert.
  - Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders der Länge L und des Radius R bezüglich der Symmetrieachse.
  - Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel des Radius R.

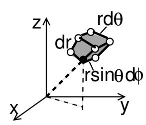
3) Drei Dimensionen: **Kugelkoordinaten** (r, θ, ϕ)



$$\begin{array}{lll} x = r\,\sin(\theta)\,\cos(\phi) & & r \in [0, \infty[\\ y = r\,\sin(\theta)\,\sin(\phi) & \text{mit} & \theta \in [0, \pi] \\ z = r\,\cos(\theta) & & \phi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \,\widehat{=}\,$ infinitesimales Volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 

$\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi \,\widehat{=}\,$ infinitesimales Volumen $\mathrm{d}A = \mathrm{d}r r\mathrm{d}\theta r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi$



Also: Für $f(x,y,z) = \bar{f}(r,\theta,\phi)$ folgt:

$$\iiint \mathrm{d}V f(x,y,z) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\mathrm{d}z f(x,y,z) = \int r^2\mathrm{d}r \int \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\phi \bar{f}(r,\theta,\phi)$$

Beispiel:

Volumen einer Kugel des Radius R

$$\iint_{\text{Kugel}} \mathrm{d}V = \underbrace{\int_0^R r^2 \mathrm{d}r}_{\frac{r^3}{3}|_0^R = \frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_0^\pi \sin(\theta)\mathrm{d}\theta}_{-\cos(\theta)|_0^\pi = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Aufgaben

- Berechnen Sie das Volumen einer Hohlkugel mit innerem Radius r_1 und äußerem Radius r_2.
- Berechnen Sie das Integral über $f(x,y,z) = \mathrm{e}-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ über den gesamten Raum.
- Gegeben sei ein Vektor $\vec{k}$. Berechnen Sie $\iiint_{|\vec{r} \le R} \mathrm{d}V \, \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$.
  Hinweis: Legen Sie die z-Achse in Richtung $\vec{k}$.

3.4.5.3 Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante

Betrachte nun allgemeiner das Problem, dass Integrationsvariablen in mehrdimensionalen Integralen durch andere Variablen substituiert werden sollen.

Ausgangspunkt: Variablen $x_1 \cdots x_n$ $\quad \rightarrow$ Vektor $\vec{x}$
n-dimensionales Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

Ziel: Neue Integrationsvariablen $\xi_1 \cdots \xi_n$
Bestimme für $(\mathrm{d}\xi_1, \cdots, \mathrm{d}\xi_n)$ neue Form des Volumenelements $\mathrm{d}V$

Volumenelement wird aufgespannt durch Vektoren $(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi_2}, \cdots, \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi_n})$

$\rightarrow$ definieren zusammen **Jacobi-Matrix** J mit $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$

Vorgriff auf lineare Algebra (MRM 2, MfP)

Das von n Vektoren $\{\vec{b}^{(i)}\}$ im n-dimensionalen Raum aufgespannte Volumen ist (bis auf ein Vorzeichen) durch die Determinante der Matrix $B = (\vec{b}^{(1)} \dots \vec{b}^{(n)})$ (d.h. $B_{ij} = b_i^{(j)}$) gegeben.

Konkret:

Zwei Dimensionen: $\det(B) = B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12}$
(sieht man z.B., wenn man die Vektoren $\vec{b}^{(1)}$ und $\vec{b}^{(2)}$ in eine dritte Dimension einbettet: $\hat{b}^{(i)} = (b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, 0)$
$\Rightarrow$ Aufgespannte Fläche: $|\hat{b}^{(1)} \times \hat{b}^{(2)}| = (b_1^{(1)}b_2^{(2)} - b_2^{(1)}b_1^{(2)})$ ✓)

Drei Dimensionen: $\det(B) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \, B_{i1} \, B_{j2} \, B_{k3}$
(entspricht Spatprodukt: $\det(B) = (b^{(1)}b^{(2)}b^{(3)}) = (b^{(1)} \cdot (b^{(2)} \times b^{(3)}))$)

Höhere Dimensionen: Siehe Anhang Matrizen

Fazit: Für Funktionen $f(x_1, \cdots x_n) = \bar{f}(\xi_1 \cdots \xi_n)$ gilt

$$\iint \mathrm{d}V f(\vec{x}) = \iint \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n f(\vec{x}) = \iint \mathrm{d}\xi_1 \cdot \mathrm{d}\xi_n \, |\det(J)| \, \bar{f}(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

mit $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ und der **Jacobi-Determinante** $\det(J)$

Beispiele: (Verifizierung anhand der Polarkoordinaten)

1) Kreiskoordinaten $(x,y) \to (r,\phi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\phi) \\ r\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\ \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \det(J) = r\cos^2(\phi) + r\sin^2(\phi) = r$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \quad \checkmark$$

2) Zylinderkoordinaten $(x,y,z) \to (r,\phi,z)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\phi) \\ r\ \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\ \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\ \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \quad \checkmark$$

3) Kugelkoordinaten $(x,y,z) \to (r,\theta,\phi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \sin(\theta)\ \cos(\phi) \\ r\ \sin(\theta)\ \sin(\phi) \\ r\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

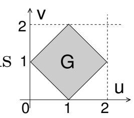
$$\det(J) = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \quad \checkmark$$

Aufgaben

- Betrachten Sie den Variablenwechsel $(x,y) \to (u,v)$ mit $x = \frac{1}{2}(u-v)$ und $y = \frac{1}{2}(u+v)$. Um was für eine Art Transformation handelt es sich hier?
  - Berechnen Sie die Jacobi-Determinante zu dieser Transformation
  - Benutzen Sie die Transformation zur Berechnung des Integrals $\iint_G \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \frac{(u-v)^2}{u+v}$ über dem nebenstehend schraffierten Gebiet G.



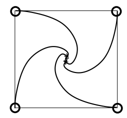
- Betrachten Sie den Variablenwechsel $(x,y) \to (u,v)$ mit $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ und $y = uv$ (parabolische Koordinaten). Berechnen Sie die Jacobi-Determinante zu dieser Transformation. Berechnen Sie dann mit Hilfe von parabolischen Koordinaten das Integral $\int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\infty \mathrm{d}v \frac{u^2+v^2}{1+(u^2-v^2)^2} \mathrm{e}^{-2uv}$.
- Versuchen Sie, die Kugelkoordinaten auf d Dimensionen zu verallgemeinern, und berechnen Sie damit das Volumen einer Kugel des Radius R in d Dimensionen (d.h., das Volumen des Gebiets $G = \{(x_1, \cdots x_n) :\ \sum_1^d x_j^2 \le R^2\}$).

Abschlussaufgaben zum Thema Infinitesimalrechnung

1) Ein Auto fährt die Hälfte einer Strecke mit 50 km/h. Wie schnell muss es die andere Hälfte fahren, um eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h zu erzielen?

2) Man stelle sich vor, eine Reihe von n Ziegelsteinen sei übereinander gestapelt, ohne umzufallen. Das Zentrum des untersten Ziegelsteins sei bei $x = 0$. Wie weit kann der oberste Ziegelstein im Grenzfall $n \to \infty$ maximal von $x = 0$ weg stehen?

3) Vier Mäuse sitzen an den Ecken eines quadratischen Zimmers. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laufen alle gleichzeitig und gleich schnell los. Dabei läuft jede Maus zu jedem Zeitpunkt in Richtung ihres rechten Nachbarn. Irgendwann treffen sie sich alle in der Mitte. Welche Strecke haben sie bis dahin zurückgelegt?



Lösungen 1): Unendlich schnell; 2): Unendlich weit (harmonische Reihe); 3): Die Seitenlänge des Zimmers (Mäuse laufen immer senkrecht zueinander und aufeinander zu, bis sie sich erreicht haben.)