Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014*

Universität Mainz
Fachbereich 08
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid†

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

*Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

†03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/>)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com/examples>

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:	22
1.4.2.3	Euler-Formel	23
1.4.2.4	Rechenregeln	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen	24
1.4.3.1	Potenzen	25
1.4.3.2	Wurzeln	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich)	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich)	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen	27
2	Vektorrechnung	29
2.1	Vektoren	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	35
2.3.1	Definition und mathematische Struktur	35
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte	36
3	Infinitesimalrechnung	39
3.1	Folgen und Reihen	39
3.1.1	Folgen	39
3.1.2	Reihen	40
3.2	Differentialrechnung	42
3.2.1	Die Ableitung	42
3.2.2	Elementare Beispiele	44
3.2.3	Differentiationsregeln	46
3.2.4	Anwendungen der Differentiationsregeln	47
3.2.5	Tabelle wichtiger Ableitungen	48
3.2.6	Vektorwertige Funktionen	49

3.2.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen	49
3.2.6.2	Speziell Raumkurven	49
3.2.7	Extremwertaufgaben	51
3.3	Taylor-Entwicklung	55
3.3.1	Kurzer Abriss über Potenzreihen	55
3.3.2	Konstruktion der Taylor-Reihe	57
3.3.3	Anwendungen	59
3.4	Integralrechnung	62
3.4.1	Das Riemannsche Integral	62
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktion	63
3.4.3	Integrationsmethoden	65
3.4.4	Uneigentliche Integrale	68
3.4.5	Mehrfachintegrale	70
3.4.5.1	Beispiele	70
3.4.5.2	Polarkoordinaten	71
3.4.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante	73
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	77
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	78
4.1.1	Separable Differentialgleichungen	78
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen	79
4.2	Systeme von Differentialgleichungen	81
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	81
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	81
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	82
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten	85
5	Vektoranalysis	87
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung	87
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren	87
5.1.2	Felder	88
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral	88
5.1.4	Flächenintegral	89
5.2	Der Nabla-Operator	90
5.2.1	Skalare Felder und Gradient	90

5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation	91
5.2.3	Der Laplace-Operator	91
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge	92
5.3	Krummlinige Koordinaten	92
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme	92
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen	94
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme	96
5.4	Integralsätze	97
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz	97
5.4.1.1	Der Satz	97
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz	98
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene	99
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	100
6	Die Diracsche Delta-Funktion	103
6.1	Motivation und Einführung	103
6.2	Definition	104
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion	104
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen	104
6.3.2	Darstellung als Integral	106
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion	106
6.5	Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen	107
7	Die Fouriertransformation	109
7.1	Diskrete Fouriertransformation	110
7.1.1	Definition	110
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	111
7.2	Fourierintegral	112
7.2.1	Definition	112
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln	113
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten	114
7.2.4	Anwendungsbeispiele	116
7.2.4.1	Wellengleichung	116
7.2.4.2	Diffusionsgleichung	116
7.2.4.3	Greensche Funktion	116
7.3	Fourierreihe	118
7.3.1	Definition	118
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen	119

8	Partielle Differentialgleichungen	121
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik	121
8.1.1	Elliptischer Typ	122
8.1.2	Hyperbolischer Typ	122
8.1.3	Parabolischer Typ	123
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen	123
8.2.1	Laplace-Gleichung	124
8.2.1.1	Numerische Lösung	124
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen	124
8.2.2	Wellengleichung	126
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation	126
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz	127
8.2.3	Diffusionsgleichung	128
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten	128
8.2.3.2	Propagatordarstellung	129
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion	129
9	Orthogonale Funktionen	131
9.1	Allgemeiner Rahmen	131
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme	131
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem	132
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen	133
9.2	Legendre-Polynome	134
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung	134
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome	135
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome	136
9.2.4	Kugelflächenfunktionen	137
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung	139
A	Anhang: Matrizen	141
A.1	Beispiele von Matrizen	141
A.2	Elementare Begriffe	143
A.3	Rechnen mit Matrizen	143
A.4	Determinanten	145
A.5	Drehungen und Drehmatrizen	148
A.6	Das Eigenwertproblem	149
A.7	Funktionen von Matrizen	151

B Anhang: Analytische Funktionen	153
B.1 Definitionen	153
B.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	154
B.3 Integralsätze	155
B.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe	156

Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Typische Gleichungen der Physik: Gleichungen, in denen Funktionen und deren Ableitungen vorkommen (d.h. Aussagen über Beziehungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen).

Typische Fragestellung: Lösung solcher Gleichungen finden.

Beispiele

(a) Radioaktiver Zerfall: Teilchenzahl $N(t)$	$\dot{N} = -kN$
(b) Kräftefreie Bewegung (1 Dimension: $x(t)$)	$\ddot{x} = 0$
(c) Bewegung im Schwerfeld	$\ddot{x} = -g$
(d) Bewegung mit Reibung	$\ddot{x} = -\eta\dot{x}$
(e) Bewegung mit Reibung im Schwerfeld	$\ddot{x} = -\eta\dot{x} - g$
(f) Schwingungsgleichung	$\ddot{x} = -\omega^2 x$
(g) Schwingungsgleichung mit Reibung	$\ddot{x} = -\omega^2 x - \eta\dot{x}$
(h) Getriebene Schwingung	$\ddot{x} = -\omega^2 x - \eta\dot{x} + f \cos(\Omega t)$
(i) Pendel, Winkel $\phi(t)$	$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin(\phi)$
(j) Diffusionsgleichung $\rho(x, t)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$
(k) Wellengleichung $u(x, t)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
(l) Laplace-Gleichung $u(x, y, z)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Charakterisierung/Klassifizierung

- **Gewöhnliche** Differentialgleichung: Eine Variable ((a)-(i))
↔ **Partielle** Differentialgleichung: Mehrere Variablen ((j)-(l))
- **Ordnung** der Differentialgleichung: Höchste vorkommende Ableitung
((vi): erste Ordnung; alle anderen Beispiele: zweite Ordnung)

- **Lineare** Differentialgleichung: Funktion und Ableitungen tauchen nur linear auf. (Alle Beispiele außer (vii))
- Besonders einfacher Spezialfall der linearen Differentialgleichung: Konstante Koeffizienten: $a + by(x) + cy'(x) + dy''(x) + \dots = 0$.

Hier nun im Folgenden: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Partielle Differentialgleichungen evtl. andiskutiert am Ende der Vorlesung,
ansonsten ausgiebig in den Vorlesungen der theoretischen Physik.

4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Problemstellung:

Differentialgleichung: $y'(x) = f(x, y)$

Anfangsbedingung: $y(x_0) = y_0$ mit Definitionsbereich $(x, y) \in D$.

Satz von Picard:

Falls $f(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig, ist die Lösung eindeutig.
(hinreichende Bedingung).

Beispiel: Gleichung $y' = x\sqrt{y}$ mit $y(0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}, y \geq 0$)

Lösungen: $y \equiv 0$ und $y = x^4/16$ nicht eindeutig.

Hintergrund: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ nicht stetig bei $y = 0$.

Falls Definitionsbereich so eingeschränkt wird, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig (z.B. $y > 0$),
wird die Lösung eindeutig.

Nun: Diskutiere Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.
Es gibt kein allgemeines Lösungsverfahren, aber gute Verfahren für viele wichtige Spezialfälle.

4.1.1 Separable Differentialgleichungen

Funktion $f(x, y) = a(x)b(y)$ faktorisiert.

Lösungsverfahren:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = dx a(x) \Rightarrow \int_{y_0}^y dy'/b(y') = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

→ Lösung durch Integration, gibt implizite Gleichung $y \leftrightarrow x$.

Beispiele:

(i) $y'(x) = a(x) \Rightarrow y = \int_{x_0}^x dx' a(x') + y_0$ (einfaches Integral)

(ii) $y'(x) = -\lambda y \rightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda dx \rightarrow \ln\left(\frac{dy}{dy_0}\right) = -\lambda(x - x_0)$
 $\Rightarrow y = y_0 e^{-\lambda(x-x_0)}$

(iii) $y'(x) = \alpha \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x} \rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$
 $\Rightarrow y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$

Physikalische Anwendungen:

- (a) (Radioaktiver Zerfall) $\dot{N} = -kN$
entspricht dem Beispiel (ii) $\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
- (b) (Kräftefreie Bewegung) $\ddot{x} = 0$
Schritt 1: Setze zunächst $\dot{x} = v \Rightarrow$
Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = 0$
entspricht dem Beispiel (i) $\Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t dt' \dot{v} = v_0$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen in $\dot{x} = v(t) \Rightarrow \dot{x} = v_0$
entspricht wieder (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' v_0 = x_0 + v_0(t - t_0)$
- (c) (Bewegung im Schwerfeld) $\ddot{x} = -g$: geht analog!
Schritt 1: Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -g$
entspricht (i) $\Rightarrow v(t) = v_0 - \int_{t_0}^t dt' g = v_0 - g(t - t_0)$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen: $\dot{x} = v_0 - g(t - t_0)$
entspricht (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' [v_0 - g(t - t_0)]$
 $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$
- (d) (Bewegung mit Reibung) $\ddot{x} = -\eta\dot{x}$: wieder analog!
Schritt 1: Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -\eta v$
entspricht Beispiel (ii) $\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen: $\dot{x} = v_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
entspricht (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t dt' v_0 e^{-\eta(t-t_0)}}_{-\frac{1}{\eta}v_0 \exp(-\eta(t-t_0))|_{t_0}^t}$
 $\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\eta}(1 - e^{-\eta(t-t_0)})$

Bemerkung: Die freien Konstanten x_0, y_0, t_0, v_0 etc. heißen **Integrationskonstanten**. Mehr dazu gleich.

4.1.2 Lineare Differentialgleichungen

Funktion $f(x, y)$ linear in y : $f(x, y) = a(x)y + b(x)$

Homogener Fall: $b(x) = 0$

$\rightarrow$ separable Gleichung: $\frac{dy}{y} = a(x) dx \Rightarrow y = \alpha \exp(\int_{x_0}^x dx' a(x'))$

Allgemeine Lösung: $y = \alpha e^{A(x)}$

$A(x)$: Stammfunktion zu $a(x)$ ($A'(x) = a$)

α : beliebig $\rightarrow$ Eindimensionale Schar von Lösungen

Tatsächliche Lösung wird durch Anfangsbedingung festgelegt
($\alpha = y_0 e^{-A(x_0)}$).

Physikalische Anwendungen: Alle in 4.1.1 diskutierten Anwendungen.

Inhomogener Fall: $b(x) \neq 0$

Vorab: Kennt man eine Lösung y_I von $y' = ay + b$, so kann man daraus durch Addition der Lösungen y_H des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ($y'_H = ay_H$) eine Schar von Lösungen konstruieren.

(Mit $y'_I = ay_I + b$ gilt für beliebige $y = y_I + \alpha y_H$:

$$y' = y'_I + \alpha y'_H = ay_I + b + \alpha ay'_H = ay + b)$$

Man braucht also nur eine Lösung zu finden.

Erstes Verfahren: Raten

(zum Beispiel $a, b = \text{const.}$, $y' = ay + b \Rightarrow y_I \equiv -b/a$ ist eine Lösung).

Zweites, systematisches Verfahren: "Variation der Konstanten"

Ansatz: $y(x) = \alpha(x) e^{A(x)}$

$$\rightarrow y' = e^A(\alpha A' + \alpha') \stackrel{!}{=} ay + b = A' \alpha e^A + b$$

$$\rightarrow \alpha' = b e^{-A} \Rightarrow \text{Einfache Integration } \alpha(x) = \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')}$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle inhomogene Lösung: } y_I(x) = e^{A(x)} \int dx' b(x') e^{-A(x')}$$

$\Rightarrow$ Allgemein: (mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$)

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)} \left[\int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')} + C \right]}$$

mit $C = y_0 e^{-A(x_0)}$.

Beispiel: $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x^3} =: ay + b$ mit $a = \frac{2}{x}, b = \frac{1}{x^3}$.

Homogene Lösung: Bereits berechnet (4.1.1, Bsp. (iii))

$$\rightarrow y_H = \alpha x^2 \quad (\supseteq \quad y_H = \alpha e^A \text{ mit } A = 2 \ln(x))$$

Inhomogene Lösung: Obige Formel einsetzen mit $A = 2 \ln(x)$

oder mit Ansatz: $y_I(x) = \alpha(x) x^2$ durchrechnen.

$$\rightarrow y'_I = 2 \alpha x + \alpha' x^2 \stackrel{!}{=} 2\frac{y_I}{x} + \frac{1}{x^3} = 2 \alpha x + \frac{1}{x^3}$$

$$\rightarrow \alpha' x^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \alpha' = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \alpha(x) = -\frac{1}{4x^4}$$

$$\rightarrow y_I = \alpha x^2 = -\frac{1}{4x^2}$$

Allgemeine Lösung: $y = -\frac{1}{4x^2} + Cx^2$

Physikalische Anwendung: Eingangsbeispiel (e)

Bewegung mit Reibung im Schwerfeld $\ddot{x} = -\eta \dot{x} - g$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 = 0$

– Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -\eta v - g$

– Zugehörige homogene Gleichung: $\dot{v} = -\eta v$ wurde bereits gelöst

$$\rightarrow v = v_0 e^{-\eta(t-t_0)} =: A e^{-\eta t}$$

– Inhomogene Lösung: Diesmal mit Raten $\rightarrow v_I = -g/\eta$

$$\rightarrow \text{Allgemeine inhomogene Lösung: } v = -\frac{g}{\eta} + A e^{-\eta(t-t_0)}$$

– Berücksichtige Anfangsbedingung $v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{g}{\eta}(e^{-\eta t} - 1)$

– Schließlich noch aufintegrieren: $x(t) = \int_0^t dt' v(t')$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{g}{\eta} t + \frac{g}{\eta^2}(1 - e^{-\eta t})$$

($\frac{g}{\eta}$: Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell erreicht).

4.2 Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

1) Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemeine Form: $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$

bzw. Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Allgemeine Lösung hat die Form $\mathbf{y} = \mathbf{F}(x, C_1, \dots, C_n)$, wobei $(C_1, \dots, C_n)$ freie Konstanten. $\Rightarrow n$ -dimensionale Schar von Lösungen.

Konkrete Lösung (konkreten Werte von C_i) wird durch die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ festgelegt.

Hinreichende Bedingung für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (bei vorgegebenen Anfangsbedingungen): $\mathbf{f}(x)$ stetig und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig.

2) Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Form: $y^{(n)}(x) = \tilde{f}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

Reduktion auf ein n -dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung durch Definition $y_1(x) = y(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Differentialgleichungssystem: } & y'_1(x) = y_2(x) \\ & y'_2(x) = y_3(x) \\ & \vdots \\ & y'_{n-1}(x) = y_n(x) \\ & y'_n(x) = \tilde{f}(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

bzw. vektoriell $\Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \tilde{f}(x, \mathbf{y}))$

Analog zu oben gilt dann: Allgemeine Lösung hat die Form $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{F}}(x, C_1, \dots, C_n)$ mit freien Integrationskonstanten C_i .

Fazit: Beide Probleme (Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung) sind im Prinzip äquivalent.

Man erhält eine n -dimensionale Schar von Lösungen.

3) Systeme von Differentialgleichungen n -ter Ordnung

lassen sich natürlich genauso auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zurückführen.

4.2.2 Lineare Differentialgleichungssysteme

Nach 4.2.1 genügt es, Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu betrachten. $\rightarrow$ Form $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ mit $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$: $n \times n$ -Matrix

Wieder Unterscheidung: **Homogener** Fall und **inhomogener** Fall

1) Allgemeine Aussagen zum homogenen Fall: (Gleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$.)
(ohne Beweis: Mehr dazu in Vorlesungen der Mathematik)

- Falls $a_{ij}(x)$ stetig in einem Intervall $x \in [x_0, x_1]$, ist die Differentialgleichung lösbar für beliebige Anfangsbedingungen (hinreichende Bedingung).
- **Superpositionsprinzip:** Mit $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})$ ist auch jede Linearkombination $\mathbf{y} = \sum \alpha_k \mathbf{y}^{(k)}$ Lösung des homogenen Systems.
- Lösungen $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\sum \alpha_k \mathbf{y}^{(k)}(x) \equiv 0$ auf dem Intervall $x \in [x_0, x_1]$ automatisch folgt: $\alpha_k = 0 \forall k$.
Falls $a_{ik}(x)$ stetig ist, hat das Differentialgleichungssystem genau n linear unabhängige Lösungen.
- **Fundamentalsystem:** Satz n linear unabhängiger Lösungen $\mathbf{y}^{(k)}$
Spannt die **Fundamentalmatrix** auf: $Y(x) = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)})$

2) Allgemeine Aussagen zum inhomogenen Fall: ($\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$)

Lösungsverfahren analog dem eindimensionalen Fall

- Finde zuerst Schar der Lösungen zum zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}'_H = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_H$
 $\rightarrow n$ unabhängige Lösungen $y_H = \sum_k \alpha_k \mathbf{y}^{(k)} = y_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Finde dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung,
z.B. durch Variation der Konstanten
 $\rightarrow$ Ansatz $\mathbf{y}_I = \sum_k \alpha_k(x) \mathbf{y}^{(k)}(x)$
- Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:
 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_I + \mathbf{y}_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

4.2.3 Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Betrachte nun speziell lineare Differentialgleichungen n ter Ordnung der Form $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) + b(x)$ mit konstanten Koeffizienten a_k .

1) Homogener Fall

Homogene Gleichung $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \Rightarrow y^{(n)} - \sum a_k y^{(k)} = 0$

Schreibe um $\left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{d}{dx} \right)^k \right] y = 0$.

Faktorisiere: $\left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right) \right] y = 0$.

NB: Hier wird der Fundamentalsatz der Algebra ausgenutzt (1.4.1). Das Polynom n ter Ordnung $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ lässt sich eindeutig in Linearfaktoren $(x - \lambda_k)$ zerlegen, d.h. $P(x) = \prod_k (x - \lambda_k)$, mit reellen oder komplexen Nullstellen λ_k .

Wir werden unten sehen: Jeder Faktor $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right)$ liefert eine unabhängige homogene Lösung.

$\rightarrow$ Lösungen können nach Art der Nullstellen klassifiziert werden.

- Einfache reelle Nullstelle λ_k
 → liefert Lösung y_k mit $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_k = 0 \Rightarrow y_k = e^{\lambda_k x}$.
- Einfache komplexe Nullstelle $\lambda_k = p_k + iq_k$
 → analog: liefert Lösung $y_k = e^{(p_k+iq_k)x}$: komplex!
 Konstruktion reeller unabhängiger Lösung wie folgt:
 Mit λ_k ist auch $\lambda_k^* = p_k - iq_k$ Nullstelle und $y_k^* = e^{(p_k-iq_k)x}$ Lösung
 (da $P(\lambda_k^*) = (P(\lambda_k))^* = 0$)
 → zugehöriger Satz von komplexen unabhängigen Lösungen y_k, y_k^*
 kann durch Linearkombination zu einem neuen Satz von zwei
reellen unabhängigen Lösungen zusammengesetzt werden:
 $\Rightarrow y_{k,1} = \frac{1}{2}(y_k + y_k^*) = e^{p_k x} \cos(q_k x) = e^{p_k x} \sin(q_k x)$
 $y_{k,2} = \frac{1}{2i}(y_k - y_k^*) = e^{p_k x} \cos(q_k x) = e^{p_k x} \sin(q_k x)$
- Mehrfache Nullstelle λ_k , z.B. r -fache Nullstelle
 → Konstruiere r zugehörige unabhängige Lösungen
 1. Lösung: $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,1} = 0 \Rightarrow y_{k,1} = e^{\lambda_k x}$
 2. Lösung: $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)^2 y = 0$ wird auch erfüllt für Funktionen $y_{k,2}$ mit
 $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,2} = y_{k,1} = e^{\lambda_k x}$
 (dann ist $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)^2 y_{k,2} = (\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,1} = 0$
 | Inhomogene Gleichung, Lösung gemäß 4.1.2 (Übungsaufgabe)
 $\Rightarrow y_{k,2} = x e^{\lambda_k x}$
 $\vdots$
 r -te Lösung: $y_{k,r} = x^{r-1} e^{\lambda_k x}$

Fazit: Man erhält n unabhängige Lösungen $y_{k,r}(x)$,
 Bilden Fundamentalsystem.

Allgemeine Lösung: $y(x) = \sum_k \sum_{r=1}^{n_k} c_{k,r} x^{r-1} e^{\lambda_k x}$,
 wobei n_k : Vielfachheit der k -ten Nullstelle λ_k .

Physikalische Anwendungen:

- (b) (Freies Teilchen): $\ddot{x} = 0$ bzw. $\frac{d^2}{dt^2} x = (\frac{d}{dt} - 0)(\frac{d}{dt} - 0)x = 0$
 → zweifache Nullstelle bei $\lambda = 0$
 → Unabhängige Lösungen: $x_1(t) = e^{0t} = 1$, $x_2(t) = t e^{0t} = t$
 → Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 + c_2 t$ (bzw. $(x_0 + v_0 t)$)
- (d) (Freier Fall mit Reibung): $\ddot{x} + \eta \dot{x} = 0$
 bzw. $(\frac{d^2}{dt^2} + \eta \frac{d}{dt}) x = (\frac{d}{dt} - 0)(\frac{d}{dt} + \eta) x = 0$
 → Einfache Nullstellen bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\eta$
 → Unabhängige Lösungen: $x_1(t) = e^{0t} = 1$, $x_2(t) = e^{-\eta t}$
 → Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 + c_2 e^{-\eta t}$
- (f) (Schwingungsgleichung): $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
 bzw. $(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2) x = (\frac{d}{dt} + i\omega)(\frac{d}{dt} - i\omega) x = 0$
 → Einfache Nullstellen bei $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$
 → Unabhängige Lösungen: $x_{1,2}(t) = e^{\pm i\omega t}$

oder alternativ Satz von reellen unabhängigen Lösungen:

$$\rightarrow \hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \cos(\omega t), \quad \hat{x}_2(t) = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = \sin(\omega t)$$

$\rightarrow$ Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

(g) (Schwingungsgleichung mit Reibung): $\ddot{x} + \eta \dot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\text{bzw. } \left(\frac{d^2}{dt^2} + \eta \frac{d}{dt} + \omega^2\right) x = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) x = 0$$

$\rightarrow$ Nullstellen bei $\lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega^2}$

$\Rightarrow$ Verhalten wird durch $\Delta := \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega^2$ bestimmt!

Fall 1: $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm i\sqrt{|\Delta|}$ komplex

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t), \quad x_2(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$$

$\rightarrow$ Schwingungsfall

Fall 2: $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\Delta}$ reell

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\Delta})t}, \quad x_2(t) = e^{-(\frac{\eta}{2} - \sqrt{\Delta})t}$$

$\rightarrow$ überdämpfter Fall bzw. Kriechfall

Fall 3: $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\eta}{2}$ ist doppelte Nullstelle

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t}, \quad x_2(t) = t e^{-\frac{\eta}{2}t}$$

$\rightarrow$ kritisch gedämpfter Fall bzw. aperiodischer Grenzfall

2) Inhomogener Fall

$$\text{Form: } y^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b(x)$$

Verfahren wie Kapitel 4.1.2.

– Finde eine spezielle Lösung y_I .

– Addiere Schar von homogenen Lösungen darauf.

Partikuläre Lösung z.B. wieder über Variation der Konstanten,

d.h. Ansatz $y_I = \sum_k \sum_r c_{kr}(x) e^{\alpha_k x} x^{r-1}$.

Physikalische Anwendung: Eingangsbeispiel (h)

$$\text{Getriebene Schwingung } \ddot{x} + \eta \dot{x} + \omega^2 x = f \cos(\Omega t)$$

– Homogener Fall: $\ddot{x}_H + \eta \dot{x}_H + \omega^2 x_H = 0$ bereits gelöst (oben 1 g))

Betrachte hier speziell Schwingungsfall, d.h. $\Delta = \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega^2 < 0$

$\rightarrow$ Allgemeine Lösung: $x_H(t) = Ae^{-\frac{\eta}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t) + Be^{-\frac{\eta}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$

– Inhomogener Fall: Suche nach spezieller Lösung $x_I(t)$:

Rate: $x_I(t)$ folgt treibender Kraft (evtl. phasenverschoben)

$\rightarrow$ Ansatz: $x_I(t) = A \cos(\Omega t - \phi)$ (mit Phasenverschiebung ϕ)

$$\text{Setze Ansatz ein in } \ddot{x}_I + \eta \dot{x}_I + \omega^2 x_I = f \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow -A\Omega^2 \cos(\tau) - \eta A\Omega \sin(\tau) + \omega^2 \cos(\tau) = f \cos(\Omega t) \text{ mit } \tau := \Omega t - \phi$$

$$\text{Nutze } \cos(\Omega t) = \cos(\tau + \phi) = \cos(\tau) \sin(\phi) - \sin(\tau) \cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \cos(\tau)[A(\omega^2 - \Omega^2) - f \cos(\phi)] + \sin(\tau)[- \eta A\Omega f \cos(\phi) + f \sin(\phi)] = 0$$

Gilt in einem Intervall von τ . $\cos(\tau)$ und $\sin(\tau)$ sind linear unabhängig

$\rightarrow$ Ausdrücke in Klammern [...] müssen verschwinden.

$$\Rightarrow f \cos(\phi) = A(\omega^2 - \Omega^2) \text{ und } f \sin(\phi) = A\Omega\eta$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) = \Omega\eta/(\omega^2 - \Omega^2) \text{ und } A^2 = f^2/[(\Omega\eta)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2]$$

$$\Rightarrow \text{Lösung ist } x_I(t) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega\eta)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}} \cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{\Omega\eta}{\omega^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

– Allgemeine Lösung: $x(t) = x_I(t) + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

4.2.4 Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten

Hier braucht man Konzepte der linearen Algebra (sollte in Mathe für Physiker mittlerweile drangekommen sein, sonst siehe Anhang Matrizen).

Diskutiere nur homogenen Fall.

Form: $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{y}(x)$ mit $\mathbf{A} \equiv \text{const.}$

Ansatz: $\mathbf{y}^{(j)} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{(j)}$

$\rightarrow \lambda_j \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x} = \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{u}^{(j)}$: Eigenwertgleichung!

Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$.

$\rightarrow n$ Nullstellen, reell oder komplex, können auch aufeinanderfallen.

Reelle Eigenwerte λ_j , Eigenvektor $\mathbf{u}^{(j)} \rightarrow \mathbf{y}^{(j)}(x) = \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x}$.

Komplexe Eigenwerte: Falls λ_j Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{u}^{(j)}$, dann ist auch λ_j^* Eigenwert mit Eigenvektor $\mathbf{u}^{(j)*}$ (Check: Einsetzen).

$\rightarrow$ Aus $\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x}$ und $\mathbf{y}^{(j)*} = \mathbf{u}^{(j)*} e^{\lambda_j^* x}$

können reelle Lösungen zusammengesetzt werden.

Entartete Eigenwerte: λ_j (r -fach entartet)

Falls es r unabhängige zugehörige Eigenvektoren gibt (d.h. Dimension des Eigenraums zu λ_j ist r), liefert das r unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{(j)}$.

Falls die Dimension des Eigenraums kleiner als r ist, müssen zusätzliche Lösungen konstruiert werden.

Sei λ_j z.B. zweifach entartet, es gibt aber nur einen linear unabhängigen Eigenvektor $\mathbf{u}^{(j)}$.

Ansatz: $\mathbf{y}^{(j,1)} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{y}^{(j,2)} = e^{\lambda_j x} (\mathbf{u}^{(j)} x + \mathbf{v})$.

Einsetzen: $e^{\lambda_j x} (\lambda_j \mathbf{v} + \mathbf{u}^{(j)} + \lambda_j x \mathbf{u}^{(j)}) \stackrel{!}{=} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(j,2)} = e^{\lambda_j x} (x \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} + \mathbf{A} \mathbf{v})$

$\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}^{(j)}$.

Diese Gleichung hat eine Lösung $\mathbf{v}$ (ohne Beweis).

$\Rightarrow$ Man erhält zwei linear unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{(j,1)}$, $\mathbf{y}^{(j,2)}$.

Höhere Entartungen: Analoges Verfahren.

Allgemein erhält man r linear unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{(j,\nu)}$. Jede der n Komponenten von $\mathbf{y}^{(j,\nu)}$ ist ein Polynom vom Grad höchstens r .