

Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014^{*}

Universität Mainz

Fachbereich 08

Theorie der kondensierten Materie

Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

^{*}Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/>)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com/examples>

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:	22
1.4.2.3	Euler-Formel	23
1.4.2.4	Rechenregeln	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen	24
1.4.3.1	Potenzen	25
1.4.3.2	Wurzeln	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich)	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich)	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen	27
2	Vektorrechnung	29
2.1	Vektoren	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	35
2.3.1	Definition und mathematische Struktur	35
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte	36
3	Infinitesimalrechnung	39
3.1	Folgen und Reihen	39
3.1.1	Folgen	39
3.1.2	Reihen	40
3.2	Differentialrechnung	42
3.2.1	Die Ableitung	42
3.2.2	Elementare Beispiele	44
3.2.3	Differentiationsregeln	46
3.2.4	Anwendungen der Differentiationsregeln	47
3.2.5	Tabelle wichtiger Ableitungen	48
3.2.6	Vektorwertige Funktionen	49

3.2.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen	49
3.2.6.2	Speziell Raumkurven	49
3.2.7	Extremwertaufgaben	51
3.3	Taylor-Entwicklung	55
3.3.1	Kurzer Abriss über Potenzreihen	55
3.3.2	Konstruktion der Taylor-Reihe	57
3.3.3	Anwendungen	59
3.4	Integralrechnung	62
3.4.1	Das Riemannsche Integral	62
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktion	63
3.4.3	Integrationsmethoden	65
3.4.4	Uneigentliche Integrale	68
3.4.5	Mehrfachintegrale	70
3.4.5.1	Beispiele	70
3.4.5.2	Polarkoordinaten	71
3.4.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante	73
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	77
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	78
4.1.1	Separable Differentialgleichungen	78
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen	79
4.2	Systeme von Differentialgleichungen	81
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	81
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	81
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	82
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten	85
5	Vektoranalysis	87
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung	87
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren	87
5.1.2	Felder	88
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral	88
5.1.4	Flächenintegral	89
5.2	Der Nabla-Operator	90
5.2.1	Skalare Felder und Gradient	90

5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation	91
5.2.3	Der Laplace-Operator	91
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge	92
5.3	Krummlinige Koordinaten	92
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme	92
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen	94
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme	96
5.4	Integralsätze	97
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz	97
5.4.1.1	Der Satz	97
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz	98
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene	99
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	100
6	Die Diracsche Delta-Funktion	103
6.1	Motivation und Einführung	103
6.2	Definition	104
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion	104
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen	104
6.3.2	Darstellung als Integral	106
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion	106
6.5	Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen	107
7	Die Fouriertransformation	109
7.1	Diskrete Fouriertransformation	110
7.1.1	Definition	110
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	111
7.2	Fourierintegral	112
7.2.1	Definition	112
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln	113
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten	114
7.2.4	Anwendungsbeispiele	116
7.2.4.1	Wellengleichung	116
7.2.4.2	Diffusionsgleichung	116
7.2.4.3	Greensche Funktion	116
7.3	Fourierreihe	118
7.3.1	Definition	118
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen	119

8	Partielle Differentialgleichungen	121
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik	121
8.1.1	Elliptischer Typ	122
8.1.2	Hyperbolischer Typ	122
8.1.3	Parabolischer Typ	123
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen	123
8.2.1	Laplace-Gleichung	124
8.2.1.1	Numerische Lösung	124
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen	124
8.2.2	Wellengleichung	126
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation	126
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz	127
8.2.3	Diffusionsgleichung	128
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten	128
8.2.3.2	Propagatordarstellung	129
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion	129
9	Orthogonale Funktionen	131
9.1	Allgemeiner Rahmen	131
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme	131
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem	132
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen	133
9.2	Legendre-Polynome	134
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung	134
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome	135
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome	136
9.2.4	Kugelflächenfunktionen	137
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung	139
A	Anhang: Matrizen	141
A.1	Beispiele von Matrizen	141
A.2	Elementare Begriffe	143
A.3	Rechnen mit Matrizen	143
A.4	Determinanten	145
A.5	Drehungen und Drehmatrizen	148
A.6	Das Eigenwertproblem	149
A.7	Funktionen von Matrizen	151

B	Anhang: Analytische Funktionen	153
B.1	Definitionen	153
B.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	154
B.3	Integralsätze	155
B.4	Taylor-Reihe und Laurent-Reihe	156

Kapitel 5

Vektoranalysis

5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung

5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren

Grundbegriffe der linearen Algebra werden ab jetzt vorausgesetzt (siehe auch Anhang A).

Erinnerung an 2.1.2:

In der Physik werden physikalische Größen durch ihr Transformationsverhalten charakterisiert. Gegeben sei eine Drehung $\mathcal{D}$, die ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Rechtssystem) in ein anderes überführt. ($\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 1$, $\det(\mathcal{D}) = 1$).

Physikalischer Skalar:

Einzelne Zahl, bleibt unverändert. (z.B. Temperatur)

Physikalischer Vektor: (in d Dimensionen)

Satz von d Zahlen v_i (Koeffizienten), die sich unter einer Drehung $\mathcal{D}$ folgendermaßen transformieren: $v_i \rightarrow v'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} v_j$ bzw. in Vektorschreibweise $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \mathcal{D}\vec{v}$ (z.B. Geschwindigkeit, Kraft).

Physikalischer Tensor: (vollständigkeithalber)

Verallgemeinerung für Matrizen oder noch höherdimensionale Objekte (z.B. Trägheitstensor). Allgemein **Tensor nter Stufe** $t_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ transformiert sich gemäß $t_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_n} \mathcal{D}_{i_1 j_1} \mathcal{D}_{i_2 j_2} \dots \mathcal{D}_{i_n j_n} t_{j_1, \dots, j_n}$.

Bemerkungen:

- Wir beschränken uns hier absichtlich auf Drehungen mit $\det(\mathcal{D}) = 1$. Bei Spiegelungen mit $\det(\mathcal{D}) = -1$ ist das Verhalten nicht einheitlich! z.B. Punktspiegelung am Ursprung dreht das Vorzeichen von Ort $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ um. Aber: Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ändert Vorzeichen nicht. Solche Vektoren heißen auch **Pseudovektoren**.
- In der Relativitätstheorie kommt als 4. Dimension die Zeit hinzu. Drehung $\rightarrow$ Lorentztransformation. Man spricht dann von **Viererskalaren, Vierervektoren, Vierertensoren**.

5.1.2 Felder

Felder sind skalare, vektorielle oder tensorielle Funktionen vom Ort.

- **Skalarfeld** $\Phi(\vec{r})$ (z.B. Temperaturfeld, Potential)

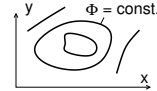
Transformationsverhalten unter Drehung $\mathcal{D}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathcal{D}\vec{r}$$

$$\Phi(\vec{r}) \rightarrow \Phi'(\vec{r}') = \Phi\left(\underbrace{\vec{r}}_{\substack{\text{alte} \\ \text{Koordinaten}}}\right) = \Phi(\mathcal{D}^{-1} \underbrace{\vec{r}'}_{\substack{\text{neue} \\ \text{Koordinaten}}})$$

Graphische Darstellung: "Höhenlinien"

Linien, auf denen Feld $\Phi(\vec{r})$ konstant ist.



- **Vektorfeld** $\vec{v}(\vec{r})$ (z.B. Geschwindigkeitsfeld, elektrisches Feld)

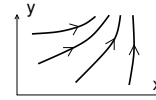
Transformationsverhalten unter Drehung $\mathcal{D}$:

$$\vec{v}(\vec{r}) \rightarrow \vec{v}'(\vec{r}') = \mathcal{D}\vec{v}(\mathcal{D}^{-1}\vec{r}')$$

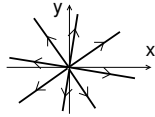
Graphische Darstellung: Feldlinien

– Richtung: $\vec{v}$

– Dichte senkrecht zur Richtung: $|\vec{v}|$



Beispiel:



– Richtung $\vec{v}$: radial nach außen

– Betrag $v \propto 1/r$ (zwei Dimensionen)
bzw. $v \propto 1/r^2$ (drei Dimensionen)

- **Tensorfelder** etc. (Objekte höherer Ordnung)

5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral

- **Raumkurve** C : (vgl. 3.2.6.2) Charakterisiert über geeignete Parametrisierung:

$C: \vec{r}(s), s \in [s_0 : s_1]$ (s : Laufparameter, $\vec{r}(s)$ vektorwertige Funktion)

Parameter s ist im Prinzip beliebig, könnte z.B. die Zeit sein. Die Funktion $\vec{r}(s)$ soll differenzierbar sein, d.h. jede Komponente $r_i(s)$ ist differenzierbar $\rightarrow$ **glatte** Kurve.

- **Infinitesimales Wegelement** auf Kurvenstück zu ds : $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds$

$\Rightarrow$ **Infinitesimales Längenelement**: $dl = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|$

- **Kurvenintegral erster Art**:

Wegintegral über skalares Feld $\Phi(\vec{r})$: $\int_C dl \Phi(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| \Phi(\vec{r})$

Speziell $\Phi(\vec{r}) \equiv 1 \Rightarrow$ Bogenlänge $L = \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| =: \int_C dl$

NB: Notation für geschlossene Kurven oft $\oint dl$

Beispiele:

Umfang eines Kreises: (Benutze Kreiskoordinaten (r, ϕ))

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0 : 2\pi], \quad \frac{d\vec{r}}{d\phi} = R \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = R \Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = 2\pi R.$$

Umfang einer Ellipse

Ellipsengleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; Sei $b > a$.

→ Einheitskreis, gestreckt um (a, b) in Richtung (x, y) .

→ Parametrisierung in Kreiskoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ b \sin \phi \end{pmatrix} = \vec{r}(\phi)$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} = b \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

mit $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$: Exzentrizität.

$$\Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = b \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} = bE(e, 2\pi).$$

• **Kurvenintegral zweiter Art:**

Wegintegral über Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$: $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$

Beispiel: Berechnung der physikalischen Arbeit W (Kraft mal Weg), wenn man einen "punktförmigen" Körper entlang eines bestimmten Weges $\vec{r}(t)$ bewegt. Kraft hängt vom Ort ab ($\vec{F}(\vec{r})$)

$$\Rightarrow dW = d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}); W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}).$$

5.1.4 **Flächenintegral**• **Fläche** O (i.A. gekrümmt):

Parametrisiert durch *zwei* Variablen (u, v) : $\vec{r}(u, v)$

• **Infinitesimales Flächenelement** zu du, dv :

Aufgespannt durch die beiden Vektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$.

→ Definiere vektoriell Flächenelement $d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$

– steht lokal senkrecht auf der Fläche O ,

– Betrag ist Flächeninhalt des Flächenelements: $dA = |d\vec{A}|$

• **Skalares Oberflächenintegral:**

Oberflächenintegral über skalares Feld $\Phi(\vec{r})$:

$$\int_O dA \Phi(\vec{r}) := \int du dv \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}_{\text{Flächenelement}} \Phi(\vec{r})$$

Speziell $\Phi(\vec{r}) \equiv 1 \Rightarrow$ Oberfläche $\int_O dA = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$

Beispiel: Oberfläche einer Kugel vom Radius R .

Parametrisiere mit Kugelkoordinaten (θ, ϕ) :

$$\vec{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin \theta \vec{r}$$

$$\Rightarrow A = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -R^2 2\pi \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

• **Vektorielltes Oberflächenintegral:**

Oberflächenintegral über Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$:

$$\int_O d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int du dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Beispiele:

- Berechnung des (elektrischen) Stroms I durch Draht aus der lokalen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$. Strom fließt durch Querschnittsfläche O des Drahts. Nur der Anteil senkrecht zur Fläche trägt zum Strom bei. (Dabei ist es egal, wie die Fläche O genau gelegt wird)
- Allgemeiner: Berechnung eines Flusses $\vec{J}$ aus einer Flussdichte $\vec{j}(\vec{r})$
 $\vec{J} = \int_O d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r})$ (unabhängig von der genauen Wahl der Oberfläche).

5.2 Der Nabla-Operator

In diesem Abschnitt wird ein wichtiges Symbol der Vektoranalysis eingeführt: Der Ableitungsvektor

$$\nabla \equiv \vec{\partial} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

oder allgemeiner, für Koordinatensystem in d Raumdimensionen mit 'orthonormierten' Basisvektoren $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ (orthonormiert: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$)

$$\nabla = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial_{x_i}$$

Im Folgenden werden wir Anwendungen des Nabla-Operators diskutieren, zunächst für den einfachsten Fall der kartesischen Koordinaten (x, y) (in 2 Dimensionen) bzw. (x, y, z) (in 3 Dimensionen).

5.2.1 Skalare Felder und Gradient

Gegeben skalares Feld $\Phi(\vec{r})$, z.B. Höhe $h(x, y)$. Dann ist:

- (i) **Gradient:** $\nabla \Phi = \vec{\text{grad}} \Phi$ ein Vektor in Richtung des **steilsten Anstieges** von Φ mit dem Betrag $|\nabla \Phi|$: Wert der Steigung.
- (ii) **Richtungsableitung:** $\vec{n} \cdot \nabla \Phi$ mit Einheitsvektor $|\vec{n}| = 1$ entspricht Ableitung in Richtung $\vec{n}$, d.h. $\vec{n} \cdot \nabla \Phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r}))$.

Begründung:

Zunächst (ii): Ableitung in Richtung $\vec{n}$ am Ort $\vec{r}$:

$$\frac{1}{\epsilon} (\Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r})) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \epsilon n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \epsilon n_z \right) = \vec{n} \cdot \nabla \Phi.$$

Dann (i): Richtung, in der Ableitung maximal wird, ist $\vec{n} \parallel \nabla \Phi$

Weitere Anwendung: **Totales Differential** der Funktion Φ

$$d\Phi = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = (\nabla \Phi) \cdot d\vec{r}.$$

Folgerung: Betrachte Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = \nabla\Phi$:

Für beliebige Kurve C zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ gilt:

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \cdot (\nabla\Phi) = \int_1^2 d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

hängt *nicht* vom Weg ab.

Speziell: $\oint d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Kurven.

5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation

Sei nun ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$. Dann ist

(i) $\nabla \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$: **Divergenz** von $\vec{v}(\vec{r})$.

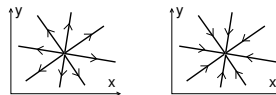
(ii) $\nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$: **Rotation** von $\vec{v}(\vec{r})$.

Interpretation : Etwas weniger offensichtlich als im Fall des Gradienten

(i) **Divergenz**: Feld "entsteht" oder "verschwindet".

Im Feldlinienbild:

Feldlinien entstehen
oder enden.



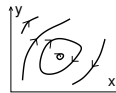
Begründung: Satz von Gauß (kommt noch, siehe 5.4.1)

Falls $\nabla \cdot \vec{v} = 0$: Alles, was reinfließt, fließt auch wieder raus $\rightarrow$ 'quellenfrei'.

(ii) **Rotation**: Feld hat im Raum "Wirbel".

Im Feldlinienbild:

geschlossene Feldlinien



Begründung: Satz von Stokes (kommt bald, siehe 5.4.3)

Falls $\nabla \times \vec{v} = 0$: Feld ist "wirbelfrei".

5.2.3 Der Laplace-Operator

Besonders häufig auftretende Konstruktion:

$$\text{div grad}\Phi = \nabla^2\Phi = \partial_{xx}\Phi + \partial_{yy}\Phi + \partial_{zz}\Phi =: \Delta\Phi$$

Bedeutung des Operators $\Delta = \nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$:

Linearer Differentialoperator mit hoher Symmetrie ($\pm x, \pm y, \pm z$ gleichwertig, de facto sogar isotrop).

$\Rightarrow$ Taucht in vielen wichtigen physikalischen Gesetzen auf (Schrödingergleichung, Diffusionsgleichung, Wellengleichung, siehe Kapitel 8).

5.2.4 Wichtige Zusammenhänge

- (a) $\boxed{\operatorname{Div} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0}$ (falls $\vec{v}$ zweimal differenzierbar)

$$\begin{aligned} \text{Rechnung: } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \stackrel{\substack{\text{Vertausche} \\ \text{Ableitungen}}}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_k v_j \\ &\stackrel{\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{kji} \partial_i \partial_k v_j \stackrel{k \leftrightarrow i}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Folgerung: Für Felder $\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$ (Vektorpotential) gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Anwendung: Elektrodynamik, siehe Theorie 1

- (b) $\boxed{\operatorname{Rot} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0}$ (falls Φ zweimal differenzierbar)

Rechnung: Analog (a)

Folgerung: Für **Potentialfelder** $\vec{v} = \nabla \Phi$ gilt automatisch $\nabla \times \vec{v} = 0$.
(Umgekehrt: Felder mit $\nabla \times \vec{v} = 0$ lassen sich im Allgemeinen als Potentialfelder schreiben. Mehr dazu in Theorie 1.)

- (c) Anwendung von ∇ auf Produkte von Feldern.

Produktregel wie üblich, z.B.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \cdot \vec{v} + \Phi \nabla \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \times (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \times \vec{v} + \Phi \nabla \times \vec{v} = -\vec{v} \times (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} (\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} \\ &\quad \text{mit } (\vec{v} \cdot \nabla) = (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

5.3 Krummlinige Koordinaten

5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme (x, y, z) bzw. $(x_1, \dots, x_d)$ sind nur eine mögliche Form, den Raum zu parametrisieren.

Alternative, gern benutzte Koordinatensysteme, sind z.B. Polarkoordinaten (vgl. 3.4.5.2)

$$2 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Kreiskoordinaten} (r, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x &= & r \cos \varphi \\ y &= & r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Zylinderkoordinaten} (\rho, \varphi, z) \quad \begin{pmatrix} x &= & \rho \cos \varphi \\ y &= & \rho \sin \varphi \\ z &= & z \end{pmatrix}$$

3 Dimensionen: **Kugelkoordinaten** (r, θ, φ)
$$\begin{pmatrix} x &= & r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= & r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Formalismus:

- (i) Definiere Koordinaten $(u_1, \dots, u_d)$ (in d Dimensionen) durch Vektorfunktion $\vec{r}(u_1, \dots, u_d) = (x_1(u_1, \dots, u_d), \dots, x_d(u_1, \dots, u_d))$.

Bedingung: Vektoren $\partial \vec{r} / \partial u_i$ sind linear unabhängig, das heisst

$$\begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial u_1 & \cdots & \partial x_1 / \partial u_d \\ \vdots & & \vdots \\ \partial x_d / \partial u_1 & \cdots & \partial x_d / \partial u_d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (Jacobi-Determinante).}$$

- (ii) **Koordinatenlinien** Kurven $\vec{r}(u_1, \dots, u_d)$, die dadurch definiert sind, dass man alle u_i bis auf eines festhält.

(Beispiel: Kugelkoordinaten – Längen- und Breitengrade)

- (iii) **Orthogonale Koordinaten** liegen dann vor, wenn die Koordinaten sich immer senkrecht schneiden $\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = 0$ für $i \neq j$.

Alle oben als Beispiele genannten Koordinatensysteme sind orthogonal.

z.B. Polarkoordinaten $\vec{r}(r, \phi) = r(\cos \phi, \sin \phi)$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0$$

Analog für Zylinder- und Kugelkoordinaten.

- (iv) **Basissysteme** krummliniger Koordinaten

Basisvektoren parallel zu Koordinatenlinien $\vec{b}_i \propto \partial \vec{r} / \partial u_i$.

Variieren von Ort zu Ort.

Speziell orthogonale Koordinaten:

Man kann lokal normierte **Orthonormalbasis** definieren:

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

Konkret: Gebräuchliche Koordinatensysteme

- Kreiskoordinaten (r, φ)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und $h_r = 1, h_\varphi = r$

- Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1$$

- Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

(v) Volumenelement (vgl. 3.4.5.3)

Über Jacobi-Determinante:

Volumenelement, das von $(du_1, \dots, du_d)$ aufgespannt wird, entspricht $dV = du_1 \dots du_d |\det(J)|$ mit der Jacobi-Matrix $J_{ij} = (\partial x_i / \partial u_j)$.

Speziell orthogonale Koordinaten: $\partial \vec{r} / \partial u_i$ stehen senkrecht aufeinander
 $\Rightarrow |\det J| = \prod_i |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}| = |h_1 \dots h_d|$

z.B. Polarkoordinaten: $dV = r \, dr \, d\varphi$

Zylinderkoordinaten $dV = \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$

Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen

Vektoren: $\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{v}) =: \sum_i \vec{e}_i v_i$

Nabla-Operator Analog: $\nabla = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \nabla)$

Erinnerung: $\vec{e} \cdot \nabla f(\vec{r})$ ist Ableitung von $f(\vec{r})$ in Richtung $\vec{e}$.

$$\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \nabla f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial u_i} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i}}$$

Laplace-Operator:

Kann im Einzelfall einfach durch Einsetzen berechnet werden.

Eleganter: Allgemeine Gleichung (in 3 Dimensionen)

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{h_i h_j}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right)}$$

bzw. ausgeschrieben

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right)}$$

Analog in 2 Dimensionen

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right)}$$

(Rechnung dazu:

Berechne zuerst $\nabla \cdot \vec{A}$ für beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \sum_k \vec{e}_k A_k \quad \text{mit} \quad A_k := (\vec{e}_k \cdot \vec{A}) \\
 | \quad \vec{e}_k &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) A_k \\
 | \quad \vec{e}_j &= h_j \nabla u_j \quad (\text{da} \quad h_j \nabla u_j = h_j \sum_i \underbrace{\vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u_j}{\partial u_i}}_{\delta_{ij}} = \vec{e}_j \sqrt{ }) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (h_i (\nabla u_i) \times h_j (\nabla u_j)) A_k = \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \nabla (h_i h_j A_k ((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \underbrace{((\nabla(h_i h_j A_k)))}_{(\vec{e}_i/h_i) \times (\vec{e}_j/h_j)} \underbrace{((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))}_{\nabla u_j (\nabla \times \nabla u_i) - \nabla u_i (\nabla \times \nabla u_j = 0)} + h_i h_j A_k \underbrace{\nabla((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))}_{\nabla u_j (\nabla \times \nabla u_i) - \nabla u_i (\nabla \times \nabla u_j = 0)} \\
 | \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= \sum_l \epsilon_{ijl} \vec{e}_l \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl}}_{\epsilon_{ijk}^2 \delta_{kl}} \nabla (h_i h_j A_k) \frac{\vec{e}_l}{h_i h_j} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{1}{h_i h_j} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \nabla (h_i h_j A_k)}_{\frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)
 \end{aligned}$$

Nun Laplace-Operator in drei Dimensionen:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Phi &= \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{\partial}{\partial u_k} [\nabla \Phi]_k \\
 \text{mit} \quad [\nabla \Phi]_k &:= \vec{e}_k \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}
 \end{aligned}$$

Zwei Dimensionen: Benutze Formel für drei Dimensionen mit virtueller Koordinate z , von der nichts abhängt ($\partial/\partial z = 0, h_z = 1$.)

5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme

2D Kreiskoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_r = 1, \quad h_\varphi = r$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

3D Zylinderkoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3D Kugelkoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

5.4 Integralsätze

Erinnerung: Hauptsatz der Integralrechnung in einer Dimension:

$$\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a)$$

Ziel dieses Kapitels: Verallgemeinerung(en) auf mehrere Dimensionen.

5.4.1 der Gaußsche Integralsatz

5.4.1.1 Der Satz

Satz: Sei V ein räumliches Gebiet mit Oberfläche ∂V , die sich aus endlich vielen regulären orientierbaren Flächenstücken zusammensetzt. Sei $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von V definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}}$$

Hier ist $\oint d\vec{A} \cdot \vec{F}$ das im Abschnitt 5.1.4 eingeführte vektorielle Oberflächenintegral, wobei der Normalenvektor nach außen zeigt.

Beweisskizze:

- 1) V sei achsenparalleler Quader der Seitenlängen a_x, a_y, a_z .
 Analysiere im Integral $\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \int_V dV (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)$ zunächst den Beitrag von $\partial_x F_x$.

$$\begin{aligned} \leadsto \int_V dV \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \underbrace{\int_0^{a_y} dy \int_0^{a_z} dz}_{=: \iint_{A_{yz}} dA} \underbrace{\left(\int_0^{a_x} dx \frac{\partial F}{\partial x} \right)}_{F_x(a_x, y, z) - F_x(0, y, z)} \\ &= \underbrace{\iint_{A_{yz}} dA \vec{e}_x \cdot \vec{F}(a_x, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = a_x} + \underbrace{\iint_{A_{yz}} dA (-\vec{e}_x) \cdot \vec{F}(0, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = 0} \end{aligned}$$

 Analog Beiträge von $\partial_y F_y$ und $\partial_z F_z$.
 Zusammen: Gaußscher Satz für Quader.
- 2) V sei nun beliebiges Gebiet. Setze es aus Quadern zusammen.
 - Volumenintegrale (linke Seite) addieren sich einfach auf.
 - Flächenintegrale (rechte Seite): Beiträge der "Zwischenwände" heben sich auf, da die Normalen entgegengesetzte Vorzeichen haben.
 - Die Beiträge an den *Oberflächen* des Gebietes werden von den gestückelt zusammengesetzten Quaderoberflächen korrekt approximiert wegen $d\vec{A} \cdot \vec{F} = \sum_i dA_i F_i$.

Bemerkung:

Der Beweis läßt sich ohne weiteres für beliebige (d) Dimensionen verallgemeinern. Dabei ist $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$ der d -dimensionale Nabla-Operator, und $d\vec{A}$ das infinitesimale "Flächen"-Element, das auf der $(d-1)$ -dimensionalen Oberfläche des Gebiets V senkrecht steht.

Anwendungsbeispiele**a) Kontinuitätsgleichung**

Betrachte Massefeld der Dichte $\rho(\vec{r}, t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Für Masse im Volumen M_V gilt:

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Andererseits: $\rho \vec{v}$ beschreibt Massenfluss, daher entspricht $\frac{\partial M_V}{\partial t}$ einem Nettofluss von Masse durch Oberfläche ∂V .

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} \stackrel{\text{Vorzeichen: d}\vec{A} \text{ zeigt nach außen}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\rho \vec{v}) \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} - \int_V dV \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Somit gilt $\int_V dV \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right\}$ für beliebige Gebiete V .

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ ("Massenerhaltung")

b) Feld einer Punktladung q

Betrachte elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ für $r \neq 0$.

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Kugelkoordinaten}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \stackrel{:=q}{=} 0 \text{ für } r \neq 0.$$

Andererseits: Betrachte Kugel mit Radius R , die den Ursprung enthält:

$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{\vec{e}_r \sin \theta d\theta d\varphi} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \frac{q}{R^2} = 4\pi q$$

Somit: $\nabla \cdot \vec{E}$ ist überall Null außer bei $r = 0$.

Aber: Integral über $\nabla \cdot \vec{E}$ ist ungleich Null.

$\rightarrow$ Diracsche Deltafunktion, siehe Kapitel 6.

5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz

1) Volumensatz: $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r}.$

Wähle $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$. Benutze $\nabla \vec{r} = 3$ (in 3 Dimensionen).

Es folgt: $\int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V dV (\nabla \vec{r}) = 3 \int_V dV = 3V$

2) Für Skalarfeld Φ , das auf einer Umgebung von V definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \Phi = \oint_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

(Denn: Betrachte beliebigen Vektor $\vec{a} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot (\vec{a} \Phi) = \vec{a} \cdot (\nabla \Phi).$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \int_V dV \nabla \Phi = \int_V dV \nabla \cdot (\vec{a} \Phi) \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\vec{a} \Phi) = \vec{a} \cdot \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

Also: $\vec{a} \cdot \left\{ \int_V dV \nabla \Phi - \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi \right\} = 0$. Da $\vec{a}$ beliebig folgt Behauptung.)

3) Für Vektorfeld $\vec{F}$, das auf einer Umgebung von V definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \times \vec{F} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}$$

(Analog 2) mit $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{F}).$)

4) Integralsatz von Green

Seien u und v zweimal differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von V . Dann gilt

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$$

(Denn: $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$
 $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$
 $\rightarrow$ Differenz: $u \Delta v - v \Delta u = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$. Rest folgt aus Gaußschem Satz.)

5) Koordinatenunabhängige Interpretation der Divergenz

Sei $\vec{r} \in V$ und $K_R \subset V$ Kugel um $\vec{r}$ mit Radius R .

Dann gilt für Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F} &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{K_R} dV \nabla \cdot \vec{F} \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung mit } \vec{r}^* \in K_R}{=} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}^*) V(K_R) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{V(K_R)} \underbrace{\oint_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F}}_{\text{Aus Volumeneinheit heraustretender Fluss}} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &\text{ ist die Quelldichte von } \vec{F} \text{ im Punkt } \vec{r}. \end{aligned}$$

5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene

Satz: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Rand ∂B , der aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht. Diese seien so parametrisiert, dass ∂B entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Sei $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von B definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_B dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Beweisskizze:

1) Betrachte zunächst *konvexe* Gebiete B .

Dann läßt sich ∂B aus zwei Funktionen $f_u(x_1)$ und $f_o(x_1)$ zusammensetzen, so dass für Punkte $(x_1, x_2) \in B$ gilt: $f_u(x_1) < x_2 < f_o(x_1)$. Für jedes $F_1(x_1, x_2)$ auf B gilt dann (mit $a = \min_{x_1}, b = \max_{x_1}$):

$$\begin{aligned} \int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= \int_a^b dx_1 \left(F_1(x_1, f_o(x_1)) - F_1(x_1, f_u(x_1)) \right) \\ &= - \underbrace{\int_b^a dx_1 F_1(x_1, f_o(x_1))}_{\text{Folge oberer Begrenzung}} - \underbrace{\int_a^b dx_1 F_1(x_1, f_u(x_1))}_{\text{Folge unterer Begrenzung}} \\ &= - \oint_{\partial B} dx_1 F_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \oint_{\partial B} dx_2 F_2(x_1, x_2)$.

Daraus folgt $\int_B dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \oint_{\partial B} (dx_1 F_1 + dx_2 F_2)$.

- 2) Sei B nun ein beliebiges Gebiet mit stückweise glattem Rand. Kann aus konvexen Gebieten zusammengesetzt werden..
- Flächenintegrale (rechte Seite) summieren sich auf.
 - Linienintegrale (linke Seite): Beiträge der Trennungslinien im Inneren von B heben sich auf, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

Folgerung: Flächensatz

Mit $\vec{F} = (-x_2, x_1)$ folgt aus dem Greenschen Satz

$$\underbrace{\int_B dx_1 dx_2}_{\text{Fläche von } B} = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen a und b

Randkurve ist gegeben durch: $\{(x_1, x_2) : (x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = 1\}$.

→ Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\Rightarrow dx_1 = -a \sin t dt, \quad dx_2 = b \cos t dt$$

→ Ellipsenfläche:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \oint_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) = \pi ab.$$

5.4.3 Der Integralsatz von Stokes

Satz: Sei S eine zweiseitige stückweise reguläre Fläche mit (überschneidungsfreiem) geschlossenem Rand ∂S . Die Fläche sei orientiert und der Rand werde so durchlaufen, dass der Umlaufsinn mit der Flächennormalen auf S eine Rechtsschraube bildet. Sei weiterhin $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von S definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F})$$

Beweisskizze:

- 1) Betrachte zunächst Flächen S , deren Projektion auf die (x_1, x_2) -Ebene umkehrbar eindeutig ist, d.h. sie lassen sich durch eine Funktion von (x_1, x_2) parametrisieren: $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$.

Die Projektionsfläche von S auf die (x_1, x_2) -Ebene werde mit D bezeichnet und ihr Rand ∂D .

Das vektorielle Flächenelement (vgl. 5.1.4 ist

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right) dx_1 dx_2.$$

Somit folgt für das Flächenintegral (rechte Seite des Stokes-Satzes)

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \int_D dx_1 dx_2 \\ &\quad \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \right) \end{aligned}$$

Das vektorielle Linienelement auf ∂S (vgl. 5.1.3) ist

$$d\vec{r} = (dx_1, dx_2, \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2).$$

Damit folgt für das Linienintegral (linke Seite des Stokes-Satzes)

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\partial S} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) \\ &= \oint_{\partial D} \left(\underbrace{(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_1})}_{=: G_1(x_1, x_2)} dx_1 + \underbrace{(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2})}_{=: G_2(x_1, x_2)} dx_2 \right)\end{aligned}$$

Für das Integral über ∂D gilt Greenscher Satz in der Ebene:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} (G_1(x_1, x_2) dx_1 + G_2(x_1, x_2) dx_2) &= \int_D dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \right). \\ \text{mit } \frac{\partial}{\partial x_1} G_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{F}_2 + \tilde{F}_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}), \text{ wobei } \tilde{F}_i(x_1, x_1) = F_i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \\ &\quad \mid \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{F}_i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (i = 2, 3) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_2} G_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in das Linienintegral gibt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_D dx_1 dx_2 \\ &\quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)\end{aligned}$$

Das entspricht genau dem Flächenintegral.

- 2) Allgemeine Flächen S werden wieder stückweise aus Flächen zusammengesetzt, die sich wie in 1) umkehrbar eindeutig auf die (x_1, x_2) -Ebene, die (x_2, x_3) -Ebene oder die (x_1, x_3) -Ebene projizieren lassen.

Folgerung: Koordinatenunabhängige Interpretation der Rotation

Sei $\vec{r} \in S$ und $S_R \subset S$ die Fläche, die von Kugel um $\vec{r}$ mit Radius R aus S ausgeschnitten wird. Sie habe die Oberfläche $A(S_R)$ und Randkurve ∂S_R .

Dann gilt für Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$

$$\oint_{\partial S_R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_R} d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung mit } \vec{r}^* \in S_R}{=} A_{S_R} (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}^*},$$

wobei $\vec{n}(\vec{r})$ der lokale Normalenvektor ist ($\vec{n} = d\vec{A}/dA$).

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}} = \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A_{S_R}} \oint_{\partial S_R} \vec{F} \cdot \vec{r}}_{\text{Zirkulation des Vektorfeldes (pro Flächeneinheit für Flächenstück senkrecht zu } \vec{n})}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}): \quad \text{Wirbelstärke von } \vec{F} \text{ um die Achse } \vec{n}.$$