

# Mathematische Rechenmethoden

---

Version vom SS 2014\*

Universität Mainz  
Fachbereich 08  
Theorie der kondensierten Materie  
Prof. Dr. Friederike Schmid†

## Mathematische Rechenmethoden für Physiker

### Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

---

\*Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

†03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

## Literatur

**K. Hefft** Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/> )

**W. Nolting** Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

**S. Großmann** Mathematischer Einführungskurs für die Physik

**K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz** Mathematik für Physiker 1

**C. Lang, N. Pucker** Mathematische Methoden in der Physik

**M. L. Boas** Mathematical Methods in the Physical Sciences

**WolframAlpha** <http://www.wolframalpha.com/examples>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegendes</b>	<b>1</b>
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen . . . . .	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit . . . . .	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit . . . . .	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen: . . . . .	22
1.4.2.3	Euler-Formel . . . . .	23
1.4.2.4	Rechenregeln . . . . .	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen . . . . .	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen . . . . .	24
1.4.3.1	Potenzen . . . . .	25
1.4.3.2	Wurzeln . . . . .	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich) . . . . .	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich) . . . . .	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>29</b>
2.1	Vektoren . . . . .	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung . . . . .	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung . . . . .	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume . . . . .	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt) . . . . .	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur . . . . .	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol . . . . .	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) . . . . .	35
2.3.1	Definition und mathematische Struktur . . . . .	35
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol . . . . .	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Infinitesimalrechnung</b>	<b>39</b>
3.1	Folgen und Reihen . . . . .	39
3.1.1	Folgen . . . . .	39
3.1.2	Reihen . . . . .	40
3.2	Differentialrechnung . . . . .	42
3.2.1	Die Ableitung . . . . .	42
3.2.2	Elementare Beispiele . . . . .	44
3.2.3	Differentiationsregeln . . . . .	46
3.2.4	Anwendungen der Differentiationsregeln . . . . .	47
3.2.5	Tabelle wichtiger Ableitungen . . . . .	48
3.2.6	Vektorwertige Funktionen . . . . .	49

3.2.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen . . . . .	49
3.2.6.2	Speziell Raumkurven . . . . .	49
3.2.7	Extremwertaufgaben . . . . .	51
3.3	Taylor-Entwicklung . . . . .	55
3.3.1	Kurzer Abriss über Potenzreihen . . . . .	55
3.3.2	Konstruktion der Taylor-Reihe . . . . .	57
3.3.3	Anwendungen . . . . .	59
3.4	Integralrechnung . . . . .	62
3.4.1	Das Riemannsche Integral . . . . .	62
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktion . . . . .	63
3.4.3	Integrationsmethoden . . . . .	65
3.4.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	68
3.4.5	Mehrfachintegrale . . . . .	70
3.4.5.1	Beispiele . . . . .	70
3.4.5.2	Polarkoordinaten . . . . .	71
3.4.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>77</b>
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	78
4.1.1	Separable Differentialgleichungen . . . . .	78
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	79
4.2	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	81
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . . .	81
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	81
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	82
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>87</b>
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung . . . . .	87
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren . . . . .	87
5.1.2	Felder . . . . .	88
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral . . . . .	88
5.1.4	Flächenintegral . . . . .	89
5.2	Der Nabla-Operator . . . . .	90
5.2.1	Skalare Felder und Gradient . . . . .	90

5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation . . . . .	91
5.2.3	Der Laplace-Operator . . . . .	91
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge . . . . .	92
5.3	Krummlinige Koordinaten . . . . .	92
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	92
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen . . . . .	94
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme . . . . .	96
5.4	Integralsätze . . . . .	97
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz . . . . .	97
5.4.1.1	Der Satz . . . . .	97
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz . . . . .	98
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene . . . . .	99
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Die Diracsche Delta-Funktion</b>	<b>103</b>
6.1	Motivation und Einführung . . . . .	103
6.2	Definition . . . . .	104
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion . . . . .	104
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen . . . . .	104
6.3.2	Darstellung als Integral . . . . .	106
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion . . . . .	106
6.5	Verallgemeinerung für höhere ( $d$ ) Dimensionen . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Die Fouriertransformation</b>	<b>109</b>
7.1	Diskrete Fouriertransformation . . . . .	110
7.1.1	Definition . . . . .	110
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation . . . . .	111
7.2	Fourierintegral . . . . .	112
7.2.1	Definition . . . . .	112
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln . . . . .	113
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten . . . . .	114
7.2.4	Anwendungsbeispiele . . . . .	116
7.2.4.1	Wellengleichung . . . . .	116
7.2.4.2	Diffusionsgleichung . . . . .	116
7.2.4.3	Greensche Funktion . . . . .	116
7.3	Fourierreihe . . . . .	118
7.3.1	Definition . . . . .	118
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen . . . . .	119

<b>8</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>121</b>
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik . . . . .	121
8.1.1	Elliptischer Typ . . . . .	122
8.1.2	Hyperbolischer Typ . . . . .	122
8.1.3	Parabolischer Typ . . . . .	123
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen . . . . .	123
8.2.1	Laplace-Gleichung . . . . .	124
8.2.1.1	Numerische Lösung . . . . .	124
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen . . . . .	124
8.2.2	Wellengleichung . . . . .	126
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation . . . . .	126
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz . . . . .	127
8.2.3	Diffusionsgleichung . . . . .	128
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten . . . . .	128
8.2.3.2	Propagatordarstellung . . . . .	129
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Orthogonale Funktionen</b>	<b>131</b>
9.1	Allgemeiner Rahmen . . . . .	131
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme . . . . .	131
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem . . . . .	132
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen . . . . .	133
9.2	Legendre-Polynome . . . . .	134
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung . . . . .	134
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome . . . . .	135
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome . . . . .	136
9.2.4	Kugelflächenfunktionen . . . . .	137
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .	139
<b>A</b>	<b>Anhang: Matrizen</b>	<b>141</b>
A.1	Beispiele von Matrizen . . . . .	141
A.2	Elementare Begriffe . . . . .	143
A.3	Rechnen mit Matrizen . . . . .	143
A.4	Determinanten . . . . .	145
A.5	Drehungen und Drehmatrizen . . . . .	148
A.6	Das Eigenwertproblem . . . . .	149
A.7	Funktionen von Matrizen . . . . .	151

<b>B Anhang: Analytische Funktionen</b>	<b>153</b>
B.1 Definitionen . . . . .	153
B.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen . . . . .	154
B.3 Integralsätze . . . . .	155
B.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe . . . . .	156

# Kapitel 6

## Die Diracsche Delta-Funktion

### 6.1 Motivation und Einführung

Theoretische Physik:

Begriffe des "Massenpunktes" und der "Punktladung".  
Dagegen: "Massendichte" und "Ladungsdichte"

Frage: Wie kann man diese beiden Konzepte verheiraten?

Heuristische Lösung: Eine Funktion  $\delta(x)$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 && \text{für } x \neq 0 \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) &= 1 && \text{für alle } \epsilon > 0 \end{aligned}$$

(genauere Definition siehe 6.2)

→ Massenpunkt bei  $\vec{r}_0$  entspricht dann einfach der Dichteverteilung  
 $\rho(\vec{r}, t) = m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = m \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$

Probleme:

- $\delta$ -Funktion ist eine ziemlich seltsame Funktion
- Integrierbarkeit? ( $\lim_{\text{Untersumme}} \neq \lim_{\text{Obersumme}}$ !)

Aber:

- Physiker ignorieren das!  
Funktion ist einfach "sehr scharf" gepeakt, d.h. so scharf, wie man es für die konkrete Anwendung braucht. (Peak schmaler als jede andere Längenskala im System).
- Mathematiker haben mittlerweile eine saubere Theorie der  $\delta$ -Funktion und ähnlicher Konstrukte konstruiert: Die Distributionentheorie.

Historie

- ~ 1920: Einführung der  $\delta$ -Funktion durch Dirac  
(im Kontext der Quantenmechanik)
- ~ 1950: U. Schwartz, Theorie der Distributionen  
(erhielt dafür die Fields-Medaille)

Heute wird  $\delta$ -Funktion in der Physik praktisch überall verwendet. Un-  
erlässlich zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte, aber auch  
zur Behandlung mathematischer Probleme, z.B. Fouriertransformation  
(Kapitel 7), inhomogene Differentialgleichungen (Kapitel 8.2.4)  
u.v.a.

## 6.2 Definition

Zunächst in einer Dimension.

$\delta$ -Funktion muss offenbar gemeinsam mit Integral definiert werden.

### Formale Definition

$\delta$  definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} C_\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\longrightarrow \int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) := f(x_0) \quad \text{für } a < x_0 < b \end{aligned}$$

im Raum  $C_\infty$  der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$   
nach  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Damit ist  $\delta(x)$  strenggenommen keine Funktion. Diese Subtilität kann in der  
Praxis aber in den allermeisten Fällen ignoriert werden. Als Physiker kann man  
sich unter  $\delta(x)$  eine "normale" Funktion mit einem Peak vorstellen, der so  
schmal und hoch ist, wie man es eben braucht.

## 6.3 Darstellungen der Delta-Funktion

### 6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen

Ziel:

- Bessere Veranschaulichung
- Gleichungen für  $\delta$ -Funktion für praktische Anwendungen
- Umgekehrt: Aussagen über Grenzverhalten bestimmter Funktionen

Allgemeine Form:  $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$  oder  $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$ ,

wobei  $\delta_n(x)$  bzw.  $\delta_\epsilon(x)$  differenzierbare (glatte) Funktionen sind, typi-  
scherweise mit den Eigenschaften  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  und  $\lim \delta_{n,\epsilon}(x) = 0$   
für  $x \neq 0$ .

Konkrete Darstellungen (Beweis von  $\int dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  weiter unten).

$$(i) \quad \delta_\epsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(iii) \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$(iv) \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2, \quad n \rightarrow \infty$$

$$(v) \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{x} \right), \quad n \rightarrow \infty$$

Bemerkungen:

- (ii), (iii) mit Vorsicht zu benutzen, da  $\delta_{n,\epsilon}(x)$  als Funktion von  $x$  im Unendlichen sehr langsam abfällt.  
Daher ist z.B.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 = \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} \approx \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rightarrow \infty$   
obwohl  $\int dx \delta(x) x^2 = 0$  sein sollte.  
Problem tritt nicht auf, wenn man Integrationsgrenzen endlich wählt.  
 $(\int_{-M}^M dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \ll M).$
- In Darstellung (v) verschwindet  $\delta_n(x)$  strenggenommen nicht für  $x \neq 0, n \rightarrow \infty$ . Aber: oszilliert so schnell, dass Beiträge zu Integralen verschwinden. Diese Darstellung ist in der Praxis besonders wichtig.

Beweise von  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  in den Darstellungen (i)–(v)

(i) folgt aus  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \sqrt{\pi}$  (3.4.5) nach Substitution  $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\epsilon}$ .

(ii) folgt aus  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{1+\tau^2} = \pi$  (B) nach Substitution  $\tau = x/\epsilon$ .

(iii) Analog (ii) mit  $\epsilon = 1/n$ .

(v) Zeige zunächst  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \pi$ . Rest folgt nach Substitution  $\tau = \pi x$ .

Benutze dazu Theorie analytischer Funktionen (siehe Anhang B).

Falls  $f(z)$  analytisch innerhalb eines Gebietes  $G$  in der komplexen Ebene, das von einer Kurve  $C$  umschlossen wird, dann gilt:

$$\oint_C dz f(z) = 0 \quad (\text{Cauchyscher Integralsatz})$$

$$\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w) \quad \text{für Punkte } w \in G$$

(Cauchysche Integralgleichung).

Dabei wird Kurve  $C$  in  $\oint_C$  gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau - i\epsilon} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} - \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} \right)$$

$$= \left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} = \oint_C dz \frac{e^{iz}}{z - i\epsilon} \quad \text{mit } C: \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber obere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Oberer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{i(i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \\ = 2\pi i e^{i(i\epsilon)} = 2\pi i e^{-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i \\ \text{Cauchysche} \\ \text{Integralgleichung} \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} = - \oint_{C'} dz \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} \quad \text{mit } C': \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber untere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Unterer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{-i(-i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \\ = 0 \\ \text{Cauchyscher} \quad \text{da } \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} \text{ analytisch innerhalb von } C' \\ \text{Integralsatz} \quad \text{(einziger Pol } z_0 = i\epsilon \text{ liegt au\ss erhalb von } C') \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi \quad \checkmark.$$

(iv) Zeige  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 = \pi$ . Rest folgt nach Substitution  $\tau = \pi x$ .

$$\text{Betrachte } I = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \right)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau \cos \tau}{\tau} = 2I - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau} \stackrel{\tau' = 2\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left( \frac{\sin \tau'}{\tau'} \right) = \pi \quad \text{nach (v)} \quad \checkmark$$

### 6.3.2 Darstellung als Integral

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}$$

(Begründung:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{k=-n}^n = \frac{1}{2\pi ix} (e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$$

entspricht Grenzwert (v) in 6.3.1.

$$\begin{aligned} \text{Alternativ: } \delta_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \epsilon|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx e^{-\epsilon x} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon - ik} + \frac{1}{\epsilon + ik} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

entspricht Grenzwert (ii) in 6.3.1.)

## 6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion

Zusammenstellung der wichtigsten Regeln

(i) •  $\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$   
für alle stetigen "Testfunktionen"  $f$  (laut Definition).

(ii) •  $\delta(x) = 0$  für  $x \neq 0$   
•  $x \cdot \delta(x) = 0$  (denn:  $\int dx x \delta(x) f(x) = 0 \quad \forall f(x)$ )  
•  $\delta(x - y) f(x) = \delta(x - y) f(y)$  (denn:  $\int dx \delta(x - y) f(x) = f(y) = \int dx \delta(x - y) f(y)$ )

(iii) •  $\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i)$  (Beweis folgt am Ende des Abschnitts)  
•  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$  (Folgerung mit  $\phi(x) = ax$ .)

(iv) "Stammfunktion" :

•  $\int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \theta(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 1/2 & : x = 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$  : Heaviside-Funktion

Umgekehrt:  $d\theta/dx = \delta(x)$ .

(v) "Ableitungen" :

•  $\int_a^b dx \delta'(x - x_0) f(x) = \begin{cases} -f'(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$   
für alle differenzierbaren Testfunktionen  $f$   
(denn:  $\delta_a^b f(x) \delta'(x - x_0) = \underbrace{[\delta(x - x_0) f(x)]_a^b}_{0} - \int_a^b dx f'(x) \delta(x - x_0) = -f'(x_0)$ ).

•  $\int_a^b dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$   
für alle  $n$ -fach differenzierbaren Testfunktionen  $f$  (denn: analog)

(vi) Symmetrien :

•  $\delta(-x) = \delta(x)$ :  $\delta(x)$  ist gerade (Folgerung aus (iii-b) mit  $a = -1$ .)  
•  $\delta'(-x) = -\delta'(x)$  (Kettenregel)  
•  $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$  (Kettenregel)

Nachtrag: Beweis von (iii): 
$$\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} f(x_i) \delta(x - x_i)$$

Zerlege  $\phi(x)$  in monotone Teilstücke  $I_\alpha = [x_{\alpha-1}, x_\alpha]$ .

In jedem Teilstück ist  $\phi$  umkehrbar. Umkehrfunktion  $g_\alpha(\phi)$  ist definiert im Intervall zwischen  $\phi_{\alpha-1} := \phi(x_{\alpha-1})$  und  $\phi_\alpha := \phi(x_\alpha)$ .

⇒ Für stetige Testfunktionen  $f(x)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_\alpha \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} dx \delta(\phi(x)) f(x) \\ &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \sum_\alpha \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_\alpha} d\phi \frac{1}{|\phi'(x)|_{x=g_\alpha(\phi)}} \delta(\phi) f(g_\alpha(\phi)). \end{aligned}$$

Nur Teilstücke, auf denen Nullstelle liegt, tragen zum Integral bei.

Jedes Teilstück hat maximal eine Nullstelle  $x_i$ .

Beitrag, falls  $\phi$  monoton steigt ( $\phi_{\alpha-1} < \phi_\alpha, \phi'(x) > 0$ )

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_\alpha} \frac{d\phi}{\phi'(x)} \delta(\phi) f(g_\alpha(\phi)) = f(x_i) \frac{1}{\phi'(x_i)} \stackrel{\phi' > 0}{=} f(x_i) / |\phi'(x_i)|$$

Beitrag, falls  $\phi$  monoton fällt ( $\phi_{\alpha-1} > \phi_\alpha, \phi'(x) < 0$ )

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_\alpha} d\phi \dots \stackrel{\text{Sortiere}}{=} = - \int_{\phi_\alpha}^{\phi_{\alpha-1}} d\phi \dots = - \frac{f(x_i)}{\phi'(x_i)} \stackrel{\phi' < 0}{=} f(x_i) / |\phi'(x_i)|.$$

Integrationsgrenzen

Zusammen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} f(x_i) / |\phi'(x_i)| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i) f(x) \quad \text{für alle Testfunktionen } f. \checkmark \end{aligned}$$

## 6.5 Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen

Ortsvektoren  $\vec{r} = (x_1, \dots, x_d)$ .

$$\delta^d(\vec{r} - \vec{r}^0) = \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0) \dots \delta(x_d - x_d^0)$$

mit Integraldarstellung 
$$\delta(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int d^d k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$