

Mathematische Rechenmethoden

Version vom SS 2014^{*}

Universität Mainz

Fachbereich 08

Theorie der kondensierten Materie

Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

Mathematische Rechenmethoden 1

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektorrechnung

Vektoren und Vektorräume

Skalarprodukt

Vektorprodukt

Infinitesimalrechnung

Folgen und Reihen

Differenzieren

Potenzreihen

Integrieren

Differentialgleichungen

Vektoranalysis **Zusatz für Studierende Bachelor of Science**

Die Delta-Funktion

Partielle Differentialgleichungen

^{*}Elektronisch: Letzte Änderung am 11.07.2014

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/>)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com/examples>

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:	22
1.4.2.3	Euler-Formel	23
1.4.2.4	Rechenregeln	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen	24
1.4.3.1	Potenzen	25
1.4.3.2	Wurzeln	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich)	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich)	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen	27
2	Vektorrechnung	29
2.1	Vektoren	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	35
2.3.1	Definition und mathematische Struktur	35
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte	36
3	Infinitesimalrechnung	39
3.1	Folgen und Reihen	39
3.1.1	Folgen	39
3.1.2	Reihen	40
3.2	Differentialrechnung	42
3.2.1	Die Ableitung	42
3.2.2	Elementare Beispiele	44
3.2.3	Differentiationsregeln	46
3.2.4	Anwendungen der Differentiationsregeln	47
3.2.5	Tabelle wichtiger Ableitungen	48
3.2.6	Vektorwertige Funktionen	49

3.2.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen	49
3.2.6.2	Speziell Raumkurven	49
3.2.7	Extremwertaufgaben	51
3.3	Taylor-Entwicklung	55
3.3.1	Kurzer Abriss über Potenzreihen	55
3.3.2	Konstruktion der Taylor-Reihe	57
3.3.3	Anwendungen	59
3.4	Integralrechnung	62
3.4.1	Das Riemannsche Integral	62
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktion	63
3.4.3	Integrationsmethoden	65
3.4.4	Uneigentliche Integrale	68
3.4.5	Mehrfachintegrale	70
3.4.5.1	Beispiele	70
3.4.5.2	Polarkoordinaten	71
3.4.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante	73
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	77
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	78
4.1.1	Separable Differentialgleichungen	78
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen	79
4.2	Systeme von Differentialgleichungen	81
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	81
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	81
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	82
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten	85
5	Vektoranalysis	87
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung	87
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren	87
5.1.2	Felder	88
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral	88
5.1.4	Flächenintegral	89
5.2	Der Nabla-Operator	90
5.2.1	Skalare Felder und Gradient	90

5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation	91
5.2.3	Der Laplace-Operator	91
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge	92
5.3	Krummlinige Koordinaten	92
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme	92
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen	94
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme	96
5.4	Integralsätze	97
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz	97
5.4.1.1	Der Satz	97
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz	98
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene	99
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	100
6	Die Diracsche Delta-Funktion	103
6.1	Motivation und Einführung	103
6.2	Definition	104
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion	104
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen	104
6.3.2	Darstellung als Integral	106
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion	106
6.5	Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen	107
7	Die Fouriertransformation	109
7.1	Diskrete Fouriertransformation	110
7.1.1	Definition	110
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	111
7.2	Fourierintegral	112
7.2.1	Definition	112
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln	113
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten	114
7.2.4	Anwendungsbeispiele	116
7.2.4.1	Wellengleichung	116
7.2.4.2	Diffusionsgleichung	116
7.2.4.3	Greensche Funktion	116
7.3	Fourierreihe	118
7.3.1	Definition	118
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen	119

8	Partielle Differentialgleichungen	121
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik	121
8.1.1	Elliptischer Typ	122
8.1.2	Hyperbolischer Typ	122
8.1.3	Parabolischer Typ	123
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen	123
8.2.1	Laplace-Gleichung	124
8.2.1.1	Numerische Lösung	124
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen	124
8.2.2	Wellengleichung	126
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation	126
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz	127
8.2.3	Diffusionsgleichung	128
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten	128
8.2.3.2	Propagatordarstellung	129
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion	129
9	Orthogonale Funktionen	131
9.1	Allgemeiner Rahmen	131
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme	131
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem	132
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen	133
9.2	Legendre-Polynome	134
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung	134
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome	135
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome	136
9.2.4	Kugelflächenfunktionen	137
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung	139
A	Anhang: Matrizen	141
A.1	Beispiele von Matrizen	141
A.2	Elementare Begriffe	143
A.3	Rechnen mit Matrizen	143
A.4	Determinanten	145
A.5	Drehungen und Drehmatrizen	148
A.6	Das Eigenwertproblem	149
A.7	Funktionen von Matrizen	151

B	Anhang: Analytische Funktionen	153
B.1	Definitionen	153
B.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	154
B.3	Integralsätze	155
B.4	Taylor-Reihe und Laurent-Reihe	156

Kapitel 7

Die Fouriertransformation

Motivation:

In Kapitel 3.3: Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen $\Rightarrow$ Taylor-Reihe. $\leadsto$ kann für praktische Rechnungen sehr nützlich sein.

In diesem Kapitel fast noch wichtigere Entwicklung: Zerlegung in Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. $e^{i\omega t} \Rightarrow$ Fourierreihe oder Fourierintegral. Fülle von Anwendungen in Mathematik (Differentialgleichungen) und Technik (Elektrotechnik, Signalverarbeitung, Bildverarbeitung). Konkrete physikalische Bedeutung in vielen Bereichen der Physik (Optik, Akustik, Quantenmechanik, Streuung)

Beispiele:

- Lichtbrechung am Prisma bzw. Regenbogen:
Weißes Licht setzt sich aus einem Spektrum an reinen Farben / Wellenlängen zusammen. Diese werden durch das Prisma sichtbar gemacht $\leadsto$ entspricht einer *Fourierzerlegung*.
- Akustik
Geräusche $\hat{=}$ Dichteschwankungen der Luft $\delta\rho(t)$
 $\rightarrow$ Frequenzspektrum
Teilweise nimmt Ohr/Gehirn selbst Zerlegung in Frequenzen vor.
(Dreiklänge, Stimmengewirr etc.)
Teilweise wird Gemisch von Frequenzen als ein Ton mit bestimmter charakteristischer "Klangfarbe" wahrgenommen.
- Streuexperimente
Meßgrößen sind im Allgemeinen Fouriertransformierte von Korrelationsfunktionen.

7.1 Diskrete Fouriertransformation

Beginne mit dem mathematisch unproblematischsten Fall: Transformation eines endlichen Satzes von Zahlen (Datenpunkten).

Numerische Bedeutung: Datensätze im Computer sind immer endlich.

Für diskrete Fouriertransformationen gibt es ultraschnelle Algorithmen (Fast Fourier Transformation).

7.1.1 Definition

Gegeben Zahlenfolge $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}$.

Diskrete Fouriertransformierte:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i k j / N} a_j \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Inverse Transformation: Ursprüngliche Daten können zerlegt werden in

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} \hat{a}_k$$

Verbindung über Darstellung des Kronecker-Deltas

$$\delta_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i p n / N} e^{-2\pi i p m / N} \quad \text{für } n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

(Check: Erst Gleichung für δ_{nm} :

$$\begin{aligned} n \neq m: & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}})^p \\ &= \underbrace{(e^{2\pi i \frac{n-m}{N} N} - 1)}_{\text{Summe}} / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = (1 - 1) / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = 0 \\ n = m: & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} 1 = N \\ \Rightarrow & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = N \delta_{nm} \quad \checkmark. \end{aligned}$$

Nun inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{k j}{N}} \hat{a}_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} e^{-2\pi i k j' / N} a_{j'} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} a_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} e^{-2\pi i k j' / N}}_{\delta_{jj'}} = a_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bemerkung: Vorfaktoren $(1/\sqrt{N})$ in den Gleichungen für $\hat{a}_k$ bzw. a_j sind Konventionssache und von Anwendung zu Anwendung verschieden. Hier wurden sie so gewählt, dass die diskrete Fouriertransformation und die inverse Transformation symmetrisch sind. Eine andere häufige Wahl wäre z.B. $\hat{a}_k = \sum_j e^{-2\pi i k j / N} a_j$ und dementsprechend $a_j = \frac{1}{N} \sum_k e^{2\pi i k j / N} \hat{a}_k$.

Interpretation: Datensatz $(a_0, \dots, a_{N-1})$ wird durch "Frequenz-Anteile" $e^{i\omega_k j}$ charakterisiert mit $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$. Amplituden $\hat{a}_k$ zu kleinen Frequenzen enthalten Information über großräumige Datenstruktur (z.B. $k = 0 \leftrightarrow$ Mittelwert).

7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

Vorab: Von nun an Konvention: Periodische Fortsetzung.

Für $k \notin [0, \dots, N-1]$ definiere $\hat{a}_k := \hat{a}_{k \bmod N}$

Für $j \notin [0, \dots, N-1]$ definiere $a_j := a_{j \bmod N}$

(NB: $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{(k+lN)j}{N}} a_j \quad \forall l \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ Konvention ist konsistent. Dasselbe gilt für a_j).

(i) **Linearität:** $c_j = \alpha a_j + \beta b_j$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{c}_k = \alpha \hat{a}_k + \beta \hat{b}_k$.

(ii) **Translation:** $c_j = a_{j-n} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{c}_k = e^{-2\pi i kn/N} \hat{a}_k$

$$\begin{aligned} (\text{denn: } \hat{c}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_{j-n} = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(j-n)}{N}} a_{j-n} \\ &= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-n}^{N-1-n} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \\ &\quad | \quad a_j \text{ und } e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} \text{ sind periodisch modulo } N \\ &= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \hat{a}_k \quad \checkmark) \end{aligned}$$

(iii) **Symmetrien:**

$$\begin{aligned} a_j \text{ reell} \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{a}_0 \text{ reell, } \hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = \hat{a}_k^* \\ (\text{denn: } \hat{a}_{-k} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \right)^* = \hat{a}_k^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_j \text{ rein imaginär} \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{a}_0 = 0, \hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = -\hat{a}_k^* \\ (\text{analog}) \end{aligned}$$

(iv) **Parsevalsche Gleichung:**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} |a_j|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{a}_k|^2} \quad \text{bzw. allgemeiner} \quad \boxed{\sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k}$$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}} a_j^* b_{j'} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} a_j^* b_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}}}_{\delta_{jj'}} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j \quad \checkmark) \end{aligned}$$

(v) **Faltungssatz:** Für $c_l = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j}$ gilt $\hat{c}_k = \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k^*$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } \hat{c}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} c_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j} \underbrace{e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}}_{e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j}_{\hat{a}_k} \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} b_{l-j}}_{\sum_{l=-j}^{N-1-j} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sqrt{N} \hat{b}_k^*} = \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k^* \quad \checkmark) \end{aligned}$$

7.2 Fourierintegral

Betrachte nun statt diskreter Datenpunkte kontinuierliche Funktion $f(x)$.

Fourierintegral: Kontinuierliche Variante der diskreten Fouriertransformation.

7.2.1 Definition

Gegeben Funktion $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Eigenschaften (Dirichlet-Jordan):

- Absolut integrierbar: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$
- Hat in jedem endlichen Teilintervall nur endlich viele Sprungstellen, endlich viele Maxima und Minima und beschränkte Schwankung.

Dann ist:

Fouriertransformierte:
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Inverse Transformation:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Verbindung über Darstellung der Delta-Funktion

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ipy} e^{-ip'y}$$

(Check: Gleichung für Delta-Funktion: Siehe Kapitel 6.3.2)

Inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx' f(x') e^{ikx} e^{-ikx'} \\ &= \int dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} e^{-ikx'}}_{\delta(x-x')} = f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier wieder völliger Wildwuchs in der Literatur bezüglich Vorfaktoren! Deshalb: Immer überprüfen, über welche Gleichung die Fouriertransformation konkret definiert ist.

Verallgemeinerung auf d Dimensionen:

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d k \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

7.2.2 Eigenschaften und Rechenregeln

(Beweise völlig analog dem Fall der diskreten Fouriertransformationen)

(i) **Linearität:** $h(\vec{r}) = \alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \alpha \hat{f}(\vec{k}) + \beta \hat{g}(\vec{k})$

(ii) **Translation:** $h(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}} \hat{f}(\vec{k})$

(iii) **Symmetrien:** $f(\vec{r})$ reellwertig $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}^*(\vec{k})$
 $f(\vec{r})$ rein imaginär $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = -\hat{f}^*(\vec{k})$

(iv) **Parsevalsche Gleichung:** $\int d^d r |f(\vec{r})|^2 = \int d^d k |\hat{f}(\vec{k})|^2$

bzw. verallgemeinert

$$\int d^d r f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) = \int d^d k \hat{f}^*(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$$

(v) **Faltungssatz:** $h(\vec{r}) = \int d^d r' f(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$

Zusätzliche wichtige Eigenschaften

(vi) **Produkt:** $h(\vec{r}) = f(\alpha \vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}(\vec{k}/\alpha)$

(denn: $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d \vec{r} f(\alpha \vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$
 $\stackrel{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d \tau \underbrace{\frac{1}{|\alpha|^d}}_{\text{Jacobi-Determinante}} f(\vec{\tau}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\tau}/\alpha} \quad \checkmark$)

(vii) **Ableitungen:** $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i k_\alpha \hat{f}(\vec{k})$
 $h(\vec{r}) = \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n k_{\alpha_1} \dots k_{\alpha_n} \hat{f}(\vec{k})$

(denn: Für $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r})$ gilt
 $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \partial_\alpha f(\vec{r}) \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) \partial_\alpha (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}})$
 $= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) (-i k_\alpha) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i k_\alpha \hat{h}(\vec{k})$
 Höhere Ableitungen analog.)

(viii) **Momente:** $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k})$
 $h(\vec{r}) = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n \frac{\partial^n}{\partial k_{\alpha_1} \dots \partial k_{\alpha_n}} \hat{f}(\vec{k})$

(Herleitung: Analog zu (vii) wegen Symmetrie von Fouriertransformation und inverser Fouriertransformation, oder, für $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r})$

$$\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r \underbrace{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} r_\alpha}_{i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}} f(\vec{r}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k}) \quad \checkmark$$

Höhere Momente analog.)

7.2.3 Paare von Fourier-Transformierten

in einer Dimension

	$f(x)$	$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x)$	
(i) Delta-Funktion	$\delta(x)$	$1/\sqrt{2\pi}$	laut 6.3.2
(ii) Konstante	C	$C \sqrt{2\pi} \delta(x)$	laut 6.3.2
(iii) Kosinus Sinus	$\cos(\omega x)$ $\sin(\omega x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(k + \omega) + \delta(k - \omega) \right)$ $\sqrt{\frac{\pi}{2}} i \left(\delta(k + \omega) - \delta(k - \omega) \right)$	Euler- formel
(iv) Gaußkurve	$e^{-x^2/2\sigma^2}$	$\sigma e^{-k^2\sigma^2/2}$	siehe unten
(v) Lorentzkurve	$1/(x^2 + a^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ a } e^{- ka }$	siehe unten
(vi) Exponentialfunktion	$e^{-a x } \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2}$	Invers zu (v)
(vii) Rechteckfunktion	$\theta(a - x) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}$	Übungsaufgabe

Bemerkungen:

- Manche der obigen Funktionen erfüllen das Kriterium der absoluten Integrierbarkeit $\int dx |f(x)| < \infty$ *nicht!* (z.B. Konstante, Sinus, Kosinus). In diesem Fall kann man sich einfach einen infinitesimalen "Dämpfungsterm" $e^{-\epsilon|x|}$ im Integral dazudenken mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ (vgl. 6.3.2).

- Aus schmalen Peaks werden breite Peaks und umgekehrt.
Zum Beispiel Gaußfunktion: $f(x)$ hat Breite σ , $\hat{f}(k)$ hat Breite $1/\sigma$.

Generell gilt:
$$\left(\int dx x^2 |f(x)|^2 \right) \left(\int dk k^2 |\hat{f}(k)|^2 \right) \geq \frac{1}{4}$$

(ohne Beweis,

Spezialfall der Unschärferelation, Stoff von Theorie III).

Rechnungen zu (iv)-(vi)

Brauche Theorie der analytischen Funktionen (AnhangB)

Falls $f(z)$ analytisch (differenzierbar) innerhalb eines Gebietes G in der komplexen Ebene, das von einer Kurve C umschlossen wird, gilt:

– Cauchyscher Integralsatz: $\oint_C dz f(z) = 0$

– Cauchysche Integralgleichung: $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$ für $w \in G$

Dabei wird Kurve C gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Nun Rechnungen:

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad f(x) &= e^{-x^2/2\sigma^2} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2\sigma^2} \stackrel{\substack{\text{Quadratische} \\ \text{Ergänzung}}}{=} e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+ik\sigma^2)^2} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Substituiere } \tilde{x} = x + ik\sigma^2 \\ \text{Verschiebe Integrationsweg parallel zur reellen Achse} \\ \rightarrow \text{Wert des Integrals gleich, da keine Singularität überstrichen wird.} \end{array} \right. \\
 &= e^{-k^2\sigma^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2/2\sigma^2}}_{\sqrt{2\pi}\sigma} = \sigma e^{-k^2\sigma^2/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad f(x) &= e^{-a|x|} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a|x|} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{k^2+a^2}
 \end{aligned}$$

(v) Folgt im Prinzip aus (vi) wegen Symmetrie der Fouriertransformation und der inversen Fouriertransformation.

Alternative Herleitung: Betrachte $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left(\frac{1}{x-i|a|} - \frac{1}{x+i|a|} \right) \frac{1}{2i|a|} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{SchlieÙe Integrationsweg in komplexer Ebene über Halbkreis} \\ \text{im Unendlichen in oberer oder unterer Halbene} \\ k < 0: \text{Weg } C \text{ oben herum (über } i\infty), \text{ da } e^{-ikx} \sim e^{-iki\infty} \sim e^{-|k|\infty} = 0. \\ k > 0: \text{Weg } C' \text{ unten herum (über } -i\infty), \text{ da } e^{-ikx} \sim e^{iki\infty} \sim e^{-k\infty} = 0. \\ \text{Achtung: Damit Integral über } C' \text{ gegen den Uhrzeigersinn} \\ \text{läuft, dreht sich dabei Vorzeichen um!} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow k < 0: \hat{f}(k) &= \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_C dz e^{-ikz} \left(\frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_C dz \frac{e^{-ikz}}{z-i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag} \\
 k > 0: \hat{f}(k) &= -\frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{C'} dz e^{-ikz} \left(\frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_{C'} dz \frac{e^{-ikz}}{z+i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(-i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag}
 \end{aligned}$$

$$\text{Zusammen: } \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-|k|a|} \quad \checkmark$$

7.2.4 Anwendungsbeispiele

Neben ihrer physikalischen Bedeutung ist die Fouriertransformation sehr nützlich zum Lösen linearer Differentialgleichungen. (Das begründet natürlich ihre Bedeutung, da die wichtigsten Gleichungen in der Physik lineare Differentialgleichungen sind).

7.2.4.1 Wellengleichung

(Beispiel (k) in Kapitel 4)

Gesucht: Allgemeine Lösung $u(x, t)$ der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Im Fourierraum: $u(x) \rightarrow \hat{u}(k)$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \rightarrow -k^2 \hat{u}$; $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \hat{u}$: gewöhnliche Schwingungsgleichung

In Kapitel 4 gelöst (4.2.3)

Allgemeine Lösung: $\hat{u}(k, t) = a(k)e^{-i\omega t} + b(k)e^{i\omega t}$ mit $\omega = |k|c$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung im Realraum:

$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \{a(k)e^{i(kx-|k|ct)} + b(k)e^{i(kx+|k|ct)}\}$

entspricht linearer Überlagerung von Wellen $e^{i(kx \pm |k|ct)}$.

7.2.4.2 Diffusionsgleichung

(Beispiel (j) in Kapitel 4)

Gesucht: Lösung $\rho(x, t)$ der Gleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ im unbegrenzten Raum mit Anfangsbedingung $\rho(x, t=0) = \delta(x)$

Im Fourierraum: $\rho(x) \rightarrow \hat{\rho}(k)$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho \rightarrow -k^2 \hat{\rho}$; $\frac{\partial}{\partial t} \rho \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}$; $\delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -Dk^2 \hat{\rho}$ mit $\hat{\rho}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: entspricht Zerfallsgleichung

In Kapitel 4 gelöst (4.1.1)

Lösung: $\hat{\rho}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Dk^2 t}$

$\Rightarrow$ Lösung im Realraum:

$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikr} \hat{\rho}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$

entspricht zerfließender Gaußfunktion

7.2.4.3 Greensche Funktion

Häufige Problemstellung, z.B. in der Elektrodynamik (Theorie II):

Lösung der Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ in beliebigen Dimensionen.

Vorgehen: (hier)

Benutze Fouriertransformation, um auf geeigneten Ansatz zu kommen.

Benutze dann Gaußschen Satz, um das Problem zu lösen.

1. Schritt: Lösung der Gleichung im "Fourierraum" $\vec{k}$.

$$G(\vec{r}) \rightarrow \hat{G}(\vec{k}), \quad \Delta G(\vec{r}) \rightarrow -k^2 \hat{G}(\vec{k}), \quad \delta(\vec{r}) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}^d.$$

$$\Rightarrow -k^2 \hat{G}(\vec{k}) = 1/\sqrt{2\pi}^d \Rightarrow \hat{G}(k) = -1/(\sqrt{2\pi}^d k^2)$$

2. Schritt: Rücktransformation in "Ortsraum" $\vec{r}$.

Allgemeines Verfahren für Dimensionen $\boxed{d > 2}$

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{k^2} e^{ikr \cos \phi(\hat{k}, \hat{r})}$$

$$\quad | \quad \text{mit } \hat{k} = \vec{k}/k, \hat{r} = \vec{r}/r.$$

$$\quad | \quad d^d k = dk k^{d-1} d\Omega_d \text{ mit } \Omega_d: d\text{-dimensionaler Raumwinkel}$$

$$\stackrel{k'=kr}{=} -\frac{1}{(2\pi)^d} r^{2-d} \underbrace{\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \int d\Omega_d e^{ik' \cos(\theta)}}_{\text{unabhängig von } |r|} \propto r^{2-d}$$

Berechnung von $\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \int d\Omega_d \dots$ ist aufwendig.

Übernimm daher lieber $G(\vec{r}) \propto r^{2-d}$ als *Ansatz*.

Problem bei $d \leq 2$: $\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \dots$ divergiert bei $k' \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ Rücktransformation nicht zulässig.

Ausweg: Versuchen, ob Abschneiden von $\hat{G}(\vec{k})$ zum Erfolg führt:

Ersetze $\hat{G}(\vec{k})$ durch $\hat{G}_\epsilon(\vec{k}) = -1/(\sqrt{2\pi}^d (k^2 + \epsilon^2))$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$.

$$\boxed{d=1}: \hat{G}_\epsilon(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} / (k^2 + \epsilon^2) \xrightarrow{7.2.3(v)} G_\epsilon(x) = -\frac{1}{2\epsilon} e^{-|x|\epsilon}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\epsilon} + |x|/2 = \text{const.} + |x|/2.$$

NB: Die Differentialgleichung $\Delta G = \delta(x)$ definiert G bis auf eine Konstante (und eine konstante Steigung), deshalb darf const. abgezogen werden. Man zeigt leicht, dass $G(x) = |x|/2$ die Differentialgleichung $\Delta G = \frac{d^2}{dx^2} G = \delta(x)$ erfüllt (Übungsaufgabe).

$\boxed{d=2}$ Wähle x -Achse in Richtung $\vec{r}$

$$G_\epsilon(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + \epsilon^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos \phi}$$

$$\stackrel{k'=kr}{=} -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' \frac{k'}{k'^2 + (\epsilon r)^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik' \cos \phi}$$

| Integral dominiert vom Beitrag bei kleinen k'

$$\sim -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk' k'}{k'^2 + (\epsilon r)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \sim \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon r) = \text{const.} + \frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

Konstante kann wieder abgezogen werden.

$\Rightarrow$ Führt zu Ansatz $G(\vec{r}) \propto \ln(r)$.

(De facto ist $G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$ bereits die Lösung, siehe unten).

3. Schritt: Auswerten des Ansatzes aus dem 2. Schritt.

$$d > 2: \quad \text{Ansatz } G(\vec{r}) = C_d r^{2-d} \Rightarrow \nabla G(\vec{r}) = C_d (2-d) r^{1-d} \frac{\vec{r}}{r}$$

Integriere über Kugel um Ursprung mit beliebigem Radius.

$$\rightarrow \int_V d^d r \Delta G \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \nabla G = C_d (2-d) \Omega_d.$$

mit Ω_d : Oberfläche der d -dimensionalen Einheitskugel.

$$\text{Andererseits: } \int_V d^d r \Delta G \stackrel{!}{=} \int_V d^d r \delta(\vec{r}) = 1.$$

$$\Rightarrow C_d = -\frac{1}{(d-2)\Omega_d}, \quad G(\vec{r}) = -\frac{1}{(d-2)\Omega_d} r^{2-d}.$$

$$\begin{aligned}
d=2: \quad & \text{Ansatz } G(\vec{r}) = C_2 \ln(r) \Rightarrow \nabla G(\vec{r}) = C_2 \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r} \\
& \text{Verfahren wie oben} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\Omega_2} = \frac{1}{2\pi}, \quad G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \\
d=1: \quad & G(r) \text{ oben direkt berechnet: } G(x) = |x|/2.
\end{aligned}$$

7.3 Fourierreihe

Zum Abschluss und zur Vervollständigung:

Fouriertransformation von Funktionen auf *endlichen Intervallen* oder von *periodischen Funktionen* → **Fourierreihen**

7.3.1 Definition

Gegeben periodische Funktion $f(t+nT) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ mit Eigenschaften (Dirichlet-Bedingungen): Auf Intervall $[0:T]$ hat $f(t)$ nur endlich viele Sprungstellen und endlich viele Minima/Maxima. An jeder Unstetigkeitsstelle existiert linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert.

Dann läßt sich $f(t)$ schreiben als:

$$\text{Fourierreihe: } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

$$\text{mit Fourierkoeffizienten: } c_n = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) e^{-2\pi i n t / T}$$

($C \in \mathbb{R}$ beliebig).

Verbindung über

$$\delta_{nm} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt e^{-2\pi i n t / T} e^{2\pi i m t / T} \quad (*)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t / T} e^{-2\pi i n t' / T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t' + Tm) \quad (**)$$

(Check:

(*): Klar (einfach Integral ausrechnen!)

$$\begin{aligned}
(**): \text{ Betrachte } S_M &= \sum_{n=-M}^M (e^{2\pi i n t / T})^n = x^{-M} \sum_{n=0}^{2M} x^n \quad \text{mit } x := e^{2\pi i t / T} \\
&= \underbrace{x^{-M} \frac{x^{2M+1}-1}{x-1}}_{\text{geometrische Summe}} = \frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)} \quad x \text{ einsetzen}
\end{aligned}$$

im Grenzwert $M \rightarrow \infty$:

Interessant sind t -Werte mit $\sin(\pi t/T) \rightarrow 0 \Rightarrow t^* = mT$

Entwickle $t = mT + x, x \ll 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sin(\pi t/T) &\approx \pi \frac{x}{T} \cos(\pi m) = (-1)^m \pi \frac{x}{T} \\
\sin(\pi(2M+1)t/T) &= \sin(\pi m + \pi(2M+1)\frac{x}{T}) = (-1)^m \sin(\pi(2M+1)\frac{x}{T}) \\
\Rightarrow \frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)} &\approx \frac{\sin(\pi(2M+1)x/T)}{\pi x/T} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pi \delta(\pi \frac{x}{T}) = T \delta(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} T \sum_m \delta(t - mT) \quad \checkmark$$

Rest ergibt sich durch Einsetzen und Benutzen von (*) und (**).

Bemerkung: Fourierreihenentwicklung kann ohne weiteres auf nichtperiodische Funktionen angewendet werden, die nur in einem Intervall $[0 : T]$ definiert sind. Diese werden dann einfach periodisch fortgesetzt.

7.3.2 Darstellung in trigonometrischen Funktionen

Im Prinzip dieselbe Entwicklung, aufgespalten in Sinus- und Kosinus-Funktionen.

Definition: Gegeben eine *reelle* Funktion $f(t)$, die periodisch mit der Periode T ist und die Dirichlet-Bedingungen erfüllt. Sie kann dann geschrieben werden als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left\{ a_n \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + b_n \sin(2\pi n \frac{t}{T}) \right\}$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) = c_n + c_{-n} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) = i (c_n - c_{-n}) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) = 2c_0. \end{aligned}$$

Speziell $f(t)$ gerade $(f(t) = f(-t))$: Reine Kosinusreihe $(b_n = 0 \forall n)$
 $f(t)$ ungerade $(f(t) = -f(-t))$: Reine Sinusreihe $(a_n = 0 \forall n)$

Wichtigste weitere Eigenschaft: **Parseval-Gleichung**

$$\frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt |f(t)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$