Institut für Physik SS 2014

Friederike Schmid

"Mathematische Rechenmethoden" / "Mathematische Rechenmethoden 1"
Probeklausur

Der Umfang der Probeklausur ist etwas größer als der Umfang der tatsächlichen Klausur. In der Probeklausur gibt es 10 Aufgaben mit maximal 105 Punkten. Dafür hätten Sie im Ernstfall 3.5 Stunden Zeit, und Sie müßten in dieser Zeit die Hälfte der Punktzahl erreichen.

Im Ernstfall haben Teilnehmer an der Klausur "Rechenmethoden" am 8.8.2014 180 Minuten Zeit, um 8 Aufgaben zu lösen (maximal 160 Punkte, Mindestpunktzahl 80 Punkte). Teilnehmer an der Klausur "Rechenmethoden 1" am 8.8.2014 haben 120 Minuten Zeit, um 6 Aufgaben zu lösen (maximal 120 Punkte, Mindestpunktzahl 60 Punkte). Teilnehmer an der gemeinsamen Klausur am 1.8.2014 "Rechenmethoden 1" mit "Experimentalphysik 1" haben 40 Minuten Zeit, um 4 kleinere Aufgaben zu lösen (maximal 20 Punkte, Mindestpunktzahl 10 Punkte).

Für Teilnehmer an der Klausur "Rechenmethoden 1" sind nur die Aufgaben 1-7 der Probeklausur relevant.

Aufgabe 1) **Komplexe Zahlen** (6+4 Punkte)

a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \sqrt{1-i}$. Berechnen Sie
(i) den Betrag und das Argument von z
(ii) den Realteil und den Imaginärteil von z
(iii) die Zahl z^*/z

b) Berechnen Sie $(i\frac{\pi}{2})\exp(i\frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 2) **Vektorrechnung** (3+2+2+3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

b) Berechnen Sie den von $(\vec{a},\vec{b})$ eingeschlossenen Winkel.

c) Berechnen Sie die von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Fläche und das von $(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ aufgespannte Volumen.

d) Welche der folgenden Vektorenmengen sind linear unabhängig: $(\vec{a},\vec{e}), (\vec{a},\vec{b},\vec{c}), (\vec{b},\vec{c},\vec{d})$?

Aufgabe 2) Vektorrechnung II (5+5 Punkte)

a) Berechnen Sie $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\, \delta_{ij}$.

b) Berechnen Sie $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijk}$.

Aufgabe 4) Differentialrechnung (4+6 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hôpital den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{\mathrm{e}^x - 1}$

b) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^{xy} + x^2 - y^2)$.
– Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.
– Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f$.
– $y(x)$ sei implizit gegeben durch $f(x,y) \equiv 0$. Leiten Sie einen Ausdruck (eine Differentialgleichung) für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ her.

Aufgabe 5) Taylorentwicklung (4+2+4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \exp(-\sin(x))$

a) Entwickeln Sie $f(x)$ bis zur zweiten Ordnung um den Punkt $x = \pi/2$.

b) Verwenden Sie das Ergebnis von a), um näherungsweise den Wert von $f(2.)$ bis zur zweiten Nachkommastelle zu bestimmen.
Hinweis: $1/\mathrm{e} \approx 0.368,\ \pi = 3.141$.

c) Entwickeln Sie $g(x,y) = x\,\mathrm{e}^{xy}$ in eine Taylor-Reihe um $(x = 0, y = 0)$ bis zur 4. Ordnung.
(Tipp: Multiplizieren Sie die Potenzreihen für e^{xy} und $\cos(x)$).

Aufgabe 6) Integralrechnung (5+5 Punkte)

a) Berechnen Sie das dreidimensionale Integral

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\; xyz$$

.

b) Berechnen Sie das dreidimensionale Integral $\int_G \mathrm{d}V\, x^2$ über das Gebiet
$G = \{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$.
Hinweis: Benutzen Sie Kreiskoordinaten.

Aufgabe 7) Differentialgleichungen (5+5 Punkte)

a) Lösen Sie die Differentialgleichung erster Ordnung $xy'(x) - y(x) = x^2 \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = \pi$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung $\ddot{x}(t) = -4\dot{x}(t) - 4x$.
Lösen Sie sie dann speziell für $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$.

Aufgabe 8) Nabla-Operator (4+6 Punkte)

a) Gegeben Sei das Vektorfeld $\vec{W}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin(x) \\ 2x^2yz \\ x+\cos(y) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\nabla \cdot \vec{W}$ und $\nabla \times \vec{W}$.

b) Berechnen Sie ∇r^α und Δr^α in drei Raumdimensionen für $\vec{r} \neq 0$ und $\alpha \neq 0$.

Aufgabe 9) Kurven-Integral (5+5 Punkte)

Ein durchhängendes Seil wird durch die Funktion $y(x) = 0$, $z(x) = \cosh(x)$ beschrieben. Es ist an den Punkten $x = \pm 1$ befestigt.

a) Berechnen Sie die Länge des Seils.

b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{W}(\vec{r})$ entlang des Seils für das Vektorfeld $\vec{W} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$

Hinweis: $\sinh(1.) = 1.17, \cosh^3(1.) = 3.67$.

Aufgabe 10) Flächenintegral und Gaußscher Satz (10+6 Punkte)

Ein Körper wird durch die Flächen $z = 0$ und $z = 1 - (x^2 + y^2)$ begrenzt (er ist also ein umgedrehtes Paraboloid). Ein Vektorfeld werde gegeben durch $\vec{W} = \begin{pmatrix} x \\ yz \\ z \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{W}(\vec{r})$

a) direkt

b) über ein Volumenintegral mit Hilfe des Gaußschen Satzes

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten.