Institut für Physik
Friederike Schmid WS 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 1

Bitte geben Sie auf dem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

1. Beschreiben Sie die drei Newtonschen Postulate und erklären Sie sie.
2. Was versteht man unter einem Massenpunkt?
3. Wie kann man die Bahn eines Massenpunktes parametrisieren? Wie berechnet man in einer solchen Parametrisierung Geschwindigkeit und Beschleunigung?
4. Wie lautet das Superpositionsprinzip für Kräfte?
5. Was versteht man unter der trägen Masse?
6. Wie ist der Impuls eines Massenpunktes definiert?
7. Wie lautet das Newtonsche Kraftgesetz?
8. Was ist ein Inertialsystem?
9. Was versteht man unter der Galilei-Transformation und wie lautet sie?
10. Warum treten in Bezugssystemen Scheinkräfte auf?
11. Was ist die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft? Geben Sie Beispiele. Wie lauten die Gleichungen dafür?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 7. November)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 1) Gedämpfter harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators lautet:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\Omega^2 x = 0 \qquad (\text{mit } m > 0,\ \alpha > 0,\ \Omega > 0)$$

Lösen Sie diese mit Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $v(0) = 0$. Betrachten Sie speziell die Fälle

(a) $\alpha/2m < \Omega$ (Schwingfall)
(b) $\alpha/2m > \Omega$ (Kriechfall)
(c) $\alpha/2m = \Omega$ (aperiodischer Grenzfall)

Hinweis: Machen Sie einen Exponentialansatz $x(t) \propto \exp(\lambda t)$ und lassen Sie auch komplexe Werte für λ zu. Im allgemeinen erhalten Sie zwei unabhängige Lösungen. Die vollständige (allgemeine) Lösung der Differentialgleichung ist eine Linearkombination dieser beiden.

In einem der drei Fälle (welchem?) erhalten Sie nur eine unabhängige Lösung. In diesem Fall müssen Sie eine zweite Lösung konstruieren, um den gewünschten zweidimensionalen Lösungsraum zu erhalten. Probieren Sie in diesem Fall zusätzlich den Lösungsansatz $x(t) \propto t\ \exp(\lambda t)$.

Aufgabe 2) <u>Getriebener harmonischer Oszillator</u> (10 Punkte)

Betrachten Sie nun einen solchen Oszillator, der mit einer periodischen Kraft getrieben wird. Die Differentialgleichung dazu lautet:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\Omega^2 x = A\,\cos(\omega t) \qquad (\text{mit } m > 0,\ \alpha > 0,\ \Omega > 0,\ \omega > 0) \tag{1}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Beschränken Sie sich dabei auf den Schwingfall $\alpha/2m < \Omega$ und gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Bestimmen Sie zunächst eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Am einfachsten erweitern Sie dafür zunächst die Differentialgleichung in die komplexe Ebene, d.h., Sie betrachten $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ und lösen $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + m\Omega^2 z = A\mathrm{e}^{i\omega t}$. Machen Sie den Ansatz $z(t) = z_0\mathrm{e}^{i\omega t}$ und bestimmen Sie die komplexe Amplitude z_0.

Leiten Sie daraus eine reelle inhomogene Lösung der ursprünglichen Gleichung her. Sie hat die Form $x_I(t) = x_0\,\cos(\omega t - \phi)$ mit $x_0 > 0$. Bestimmen Sie die Amplitude x_0 und die Phase ϕ als Funktion der Frequenz ω. Skizzieren Sie $x_0(\omega)$ und $\phi(\omega)$ für $m = \Omega = 1, \alpha \ll 1$.

(b) Kombinieren Sie nun die Lösung von (a) und die Lösung von Aufgabe 1a) zu einem Ausdruck für die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1). Welche asymptotische Form hat die Lösung nach unendlich langer Zeit (Grenzfall $t \to \infty$)?

<u>Hinweis:</u> Falls Sie die Aufgabe 1a) nicht gelöst haben, dann verwenden Sie stattdessen für die homogene Lösung: $x_H(t) = u\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,\sin(\tilde{\Omega}t - v)$, wobei u, v die freien Variablen sind.

Aufgabe 3) <u>Scheinkräfte</u> (10 Punkte)

(a) Ein Fluss bei 50 nördlicher Breite ist 500 m breit. Er fließt mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 8$ km/h in Richtung Norden. Berechnen Sie den Unterschied des Wasserstandes an beiden Flussufern.

<u>Hinweise</u>: Sie können annehmen, dass alle Größen über die gesamte Breite des Flusses konstant sind. Die Wasseroberfläche steht genau senkrecht zu der auf sie wirkende Kraft. Ein Tag hat 24 Stunden. Die Erdbeschleunigung ist $g = 9.81$ m/s^2. Die relevante Scheinkraft in dieser Aufgabe ist natürlich die Corioliskraft.

(b) Der Science-Fiction Autor Heinlein beschreibt einen Satelliten, der aus einem langen, direkt über dem Äquator platzierten Seil besteht. Das Seil ist entlang des Radius zum Erdinneren ausgerichtet und erscheint dem Erdbeobachter bewegungslos ("geostationär", als sei es an einem festen Punkt über dem Äquator aufgehängt). Das untere Ende des Seils hängt direkt auf der Erdoberfläche. Wie lang ist das Seil?

<u>Hinweise</u>: Nehmen Sie an, dass die Masse auf dem Seil gleichverteilt ist. Auf ein Seilelement der Masse dm wirkt die Gravitationskraft der Erde $F = \gamma\,\mathrm{d}m\,M/r^2$, wobei γ die Gravitationskonstante ist, M die Masse der Erde und r der Abstand zum Erdmittelpunkt. Der Radius der Erde ist $R = 6.4 \cdot 10^6$ m. Die Erdbeschleunigung ist $g = 9.81$ m/s^2. Ein Tag hat 24 Stunden.
(NB: Da M und γ hier nicht angegeben wurden, müssen Sie diese Werte für die Lösung der Aufgabe auch nicht kennen.)