Institut für Physik WS 2016/2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 10

Quickies:

84. Wie behandelt man ein System, das nahe an dem Zustand minimaler Energie ist, in linearer Näherung?
85. Was ist eine Normalmodenzerlegung?
86. Was versteht man unter dem Begriff Liouville-integrabel?
87. Erklären Sie den Begriff der Winkel/Wirkungs-Variablen?
88. Was ist generell das Kennzeichen von Chaos?
89. Wie lautet das Poincarésche Wiederkehrtheorem und wann gilt es?
90. Skizzieren Sie die wesentliche Aussage des KAM-Theorems.

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 23. Januar 2017)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 29) Phasenraum (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System mit der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(z,p) = p^2/2m + mgz$.

(a) Skizzieren Sie die Trajektorien im Phasenraum (z,p) für zwei verschiedene Anfangsbedingungen $(z(0), p(0)) = (z_0, p_0)$. Können die Trajektorien sich kreuzen? Begründen Sie.

(b) Betrachten Sie nun die Gesamtheit aller Punkte in der (z,p)-Ebene, die zu der Energie $E = \epsilon$ und der Energie $E = -\epsilon$ gehören. Sie erhalten jeweils eine Kurve. Berechnen Sie den Flächeninhalt A_0 der Fläche, die von diesen Kurven und den Geraden $p = -p_0 \pm \delta$ eingeschlossen wird.

(c) Betrachten Sie die Gesamtheit aller Trajektorien, deren Anfangsbedingungen (z_0, p_0) zur Zeit $t = 0$ innerhalb der in (b) definierten Fläche liegen. Zur Zeit t verschiebt sich die Fläche, auf der die Punkte $(z(t), p(t))$ liegen. Bestimmen Sie die Randkurven dieser Fläche zur Zeit t und den Flächeninhalt $A(t)$ als Funktion von t.

(d) In (c) sollten Sie $A(t) \equiv A_0$ erhalten. Warum muss das so sein?

Aufgabe 30) Kleine Schwingungen: Lineare Kette (10 Punkte)

Betrachten Sie eine Kette aus N Teilchen der Masse m mit Koordinaten x_j mit Gleichgewichtsabstand a (N sei ungerade). Einfachkeitshalber nehmen wir "periodische Randbedingungen" an, d.h. wir fügen noch eine virtuelle Koordinate $x_0 = x_N - Na$ hinzu. In linearer Näherung kann man das Potential dann schreiben als

$$U(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\kappa}{2}(x_j - x_{j-1} - a)^2.$$

Analysieren Sie die Normalmoden des Systems. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{x}, \underline{p})$ auf. Zeigen Sie, dass die Transformation
$x_j \to \tilde{q}_j = (x_j - j\,a)\sqrt{m}, \;\; p_j \to \tilde{p}_j = p_j/\sqrt{m}$ kanonisch ist und bestimmen Sie $\mathcal{H}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}})$.

(b) Um $\mathcal{H}$ zu diagonalisieren, machen Sie zunächst eine diskrete Fouriertransformation:

$$\hat{q}_k = \sqrt{\tfrac{1}{N}} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-2\pi ikj/N} \tilde{q}_j, \quad \hat{p}_k = \sqrt{\tfrac{1}{N}} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi ikj/N} \tilde{p}_j.$$

Die Umkehrung ist $\tilde{q}_j = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{2\pi ikj/N} \hat{q}_k, \quad \tilde{p}_j = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi ikj/N} \hat{p}_k$.

Weiterhin gilt $\delta_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi ijn/N} \mathrm{e}^{-2\pi ijm/N}$ für $n, m \in [0, \cdots, N-1]$.

Aus den Realteilen ($\Re$) und Imaginärteilen ($\Im$) der $\hat{q}_k$ und $\hat{p}_k$ kann man $2N$ unabhängige Variablen $\underline{\xi}, \underline{P}$ generieren mittels

$\xi_0 = \hat{q}_0,\ \xi_{k,1} = \sqrt{2}\,\Re(\hat{q}_k),\ \xi_{k,2} = \sqrt{2}\,\Im(\hat{q}_k), \quad P_0 = \hat{p}_0,\ P_{k,1} = \sqrt{2}\,\Re(\hat{p}_k),\ P_{k,2} = \sqrt{2}\,\Im(\hat{p}_k)$, wobei $k \in [1, (N-1)/2]$. Zeigen Sie, dass die Transformation $(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}) \mapsto (\underline{\xi}, \underline{P})$ kanonisch ist. Berechnen Sie den funktionalen Ausdruck für $\mathcal{H}(\underline{\xi}, \underline{P})$.

(c) In Teilaufgabe (b) erhalten Sie einen Ausdruck der Form

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(P_0^2 + \xi_0^2\omega_0^2) + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (P_{k,\alpha}^2 + \xi_{k,\alpha}^2 \omega_k^2).$$

Das entspricht einem System von N unabhängigen Oszillatoren. Tragen Sie ω_k gegen k/N auf. Es gibt eine Mode k mit $\omega_k = 0$. Welche? Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung dieser Mode.

Aufgabe 31) Logistische Gleichung (10 Punkte)

Die logistische Gleichung ist ein prominentes Beispiel einer diskreten Gleichung, deren Lösung chaotisches Verhalten zeigen kann. Sie hat die Form

$$x_{i+1} = r\, x_i\, (1 - x_i), \qquad \text{mit} \quad r > 0. \tag{1}$$

(a) Analysieren Sie zunächst die kontinuierliche Version der Gleichung $\dot{x} = r\,x(1-x)$. Lösen Sie sie für gegebenen Anfangswert $x(0) = x_0$. Berechnen Sie den Lyapunov-Exponenten dieses dynamischen Systems. Ist das System chaotisch?

(b) Betrachten Sie nun das diskrete System (1). Bestimmen Sie die möglichen Fixpunkte, d.h. die Werte x^*, für die gilt: Falls $x_i = x^*$ ist $x_{i+1} = x_i$.

(c) Analysieren Sie die Stabilität der Fixpunkte (es sind zwei). Dazu betrachten Sie Systeme mit Anfangspunkt in der Nähe des Fixpunkts. $x_1 = x^* + \epsilon$, $\epsilon \to 0$. Der Fixpunkt ist stabil, wenn x_n im Grenzwert $n \to \infty$ wieder in den Fixpunkt hineinläuft. Für welche Werte von r ist das der Fall?

(d) Lösen Sie die logistische Gleichung numerisch bis zu $n = 50$ für die Startwerte $x_1 = 0.75$ und $x_1 = 0.751$ und die Parameter $r = 0.5, 0.9, 1, 1.1, 2, 2.9, 3, 3.1, 3.5, 3.7$. Tragen Sie das Ergebnis graphisch auf. Was beobachten Sie? Für welche Werte von r zeigt das System chaotisches Verhalten?

Hinweis: Sie können zum Beispiel Mathematica benutzen. Zugriff haben Sie im CIP Pool (Raum 03-423). Alternativ können Sie als Studierende des FB08 eine eigene Lizenz beantragen, siehe `https://fachschaft.physik.uni-mainz.de/mathematica-lizenz/`. In Mathematica können Sie die Reihe (1) für den Startwert x_1 z.B. mit folgendem Zweizeiler programmieren.

```
x[n_,r_,x1_] := x[n,r,x1] = r*x[n-1,r,x1]*(1-x[n-1,r,x1]);
x[1,r_,x1_] = x1;
```

Um es mit den graphischen Darstellungen bequemer zu haben, definieren Sie noch

```
p[r_]:= ListLinePlot[Table[x[n,r,x1],{x1,{0.75,0.751}},{n,50}],PlotRange->All]
```

Danach können Sie dann die Plots der zwei Reihen mit Startwerten $x_1 = 0.75, 0.751$ (übereinandergelegt) für ein gewünschtes r einfach mit dem Befehl `p[r]` erzeugen.

(e) Lesen Sie den Wikipedia Eintrag zum Thema "bifurcation diagram" und erklären Sie (kurz) das Bifurkationsdiagramm (oder Feigenbaum-Diagramm) für die logistische Gleichung.