Institut für Physik WS 2016/2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 11

Quickies:

91. Was ist der Gegenstand der Hydrodynamik?
92. Worin besteht die Kontinuumshypothese?
93. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für die Dichte in Flüssigkeiten und warum gilt sie?
94. Erläutern Sie die Eulersche und Lagrangesche Beschreibung von Strömungen.
95. Wie hängen zeitliche Ableitungen in diesen beiden Beschreibungen miteinander zusammen?
96. Welche Eigenschaft hat das Strömungsfeld von inkompressiblen Flüssigkeiten?
97. Wie ist die Vortizität definiert und was beschreibt sie?
98. Was sind Potentialströmungen?
99. Erklären Sie den Spannungstensor.
100. Warum muss der Spannungstensor symmetrisch sein?
101. Was besagt der Fundamentalsatz der Hydrostatik?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 30. Januar 2017)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 32) Inkompressible Strömungen (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie (bzw. reproduzieren Sie aus der Vorlesung): In inkompressiblen Strömungen gilt $\nabla\vec{v} = 0$.

(b) Wegen (a) lassen sich inkompressible Strömungen auf ein Vektorpotential zurückführen, $\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$. Für zweidimensionale Strömungen in der (x, y)-Ebene lässt sich dieses darstellen als $\vec{A} = (0, 0, \Psi)$. Die Funktion $\Psi(x, y)$ bezeichnet man als Strömungsfunktion.

Zeigen Sie: Entlang $\Psi =$ const. gilt $dx/v_x = dy/v_y$. Das heisst, die Linien $\Psi =$ const. sind genau die Feldlinien des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, t)$. Diese Linien nennt man auch Stromlinien.

(c) Betrachten Sie speziell Strömungen mit Strömungsfunktionen der Form $\Psi(x, y) = ax^2+by^2$. Skizzieren Sie die Stromlinien und die Geschwindigkeitsprofile in x und y-Richtung für die drei Fälle (i) $a = 0, b \neq 0$, (ii) $a = -b$, und (iii) $a = b$.

(d) Berechnen Sie für diese drei Fälle jeweils die Vortizität $\vec{\omega}$ und den symmetrischen Anteil e_{ij} des Deformationstensors $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$.

Aufgabe 33) Strömung um eine Ecke (10 Punkte)

Betrachten Sie eine zweidimensionale Potentialströmung in einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

(a) Zeigen Sie: Das komplexe Potential $w(z) = -\Phi + i\Psi$ ist eine analytische Funktion von $z = x + iy$ (d.h. eine komplex differenzierbare Funktion), wobei Φ das Potential ist mit $\vec{v} = -\nabla\Phi$ und Ψ die Strömungsfunktion aus Aufgabe 32). Beweisen Sie dafür z. B. die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Zeigen Sie dann $dw/dz = v_x - iv_y$.

(b) Betrachten Sie nun konkret Potentiale der Form $w(z) = Az^n$ (mit $n \geq 1/2, A$ rell). Zeigen Sie: Mit diesen Potentialen können Sie den Fluß an einer Ecke zwischen zwei Wänden beschreiben, die im Winkel $\alpha = \pi/n$ zueinander stehen.

Hinweis: Die Randbedingung an den Wänden ist natürlich, dass keine Flüssigkeit hindurchfließen darf, also $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, wobei $\vec{n}$ die Flächennormale ist.

(c) Diskutieren Sie speziell den Fall $n = 1/2, n = 1, n = 2$. Skizzieren Sie die zugehörigen Strömungsprofile.

(d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit direkt in der Ecke als Funktion vom Öffnungswinkel.

Aufgabe 34) Frei rotierende starre Körper (10 Punkte)

In Aufgabe 26) haben einige von Ihnen gefragt, warum – wie Sie offenbar in Experimentalphysik 1 gelernt haben – bei frei rotierenden starren Körper nur die Hauptträgheitsachsen mit minimalen oder maximalen Trägheitsmomenten die stabilen Rotationsachsen sind.

Sie können das mit dem Wissen der Vorlesung selbst herausfinden. Gehen Sie dazu von den Eulerschen Gleichungen (Kapitel 3.4.1.2 im Skript) in Abwesenheit eines Trägheitsmomentes aus ($\vec{M} = 0$).

(a) Zeigen Sie, dass der eine reine Drehung um eine Hauptträgheitsachse k ($k = 1, 2, 3$), d.h. ein Zustand mit $\omega_i = \bar{\omega}\delta_{ik}$, einem stationären Zustand der Eulerschen Gleichungen entspricht. In Abwesenheit von Störungen wird also eine solche Drehung bis in alle Ewigkeiten fortbestehen.

(b) Nehmen Sie nun an, ein solcher Zustand sei leicht gestört. O.B.d.A. können Sie annehmen, dass die Hauptträgheitsachse des ungestörten Zustands in Richtung 3 zeigt, d.h. die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t_0 sei gegeben durch $\omega_3 = \bar{\omega}$, $\omega_{1,2} \propto \epsilon \ll \bar{\omega}$ Stellen Sie die Eulerschen Gleichungen auf und entwickeln Sie bis zur Ordnung ϵ.

(c) Lösen Sie das in (b) aufgestellte Gleichungssystem. Unter welchen Umständen bleibt die Bahn stabil und die Abweichung vom ungestörten Zustand klein, d.h. von der Ordnung ϵ? Welche Form hat die Bahn in diesen Fällen? Unter welchen Umständen ist die Bahn instabil und die Abweichung vom ungestörten Zustand nimmt mit der Zeit zu?