Institut für Physik WS 2016/2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 12

Quickies:

102. Wie lautet die Euler-Gleichung?
103. Wie lauten die Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Flüssigkeiten? Für inkompressible Flüssigkeiten?
104. Was besagt die Bernoulli-Gleichung? Wann gilt sie?
105. Was ist Zirkulation?
106. Was ist Zugkraft?
107. Wie groß ist in idealen Flüssigkeiten die Zugkraft auf umströmte Körper? Diskutieren Sie Ihre Antwort.
108. Was ist Auftrieb?

Aufgabe (Abgabe freiwillig, bis 10:00 am 6. Februar 2017)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 35) Poiseuille-Fluss durch ein Rohr

Hinweise: In Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) ist der Nabla-Operator gegeben durch $\nabla = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\phi \partial_\phi + \vec{e}_z \partial_z$, wobei $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_z$ die Einheitsvektoren in Richtung r, ϕ und z sind. Der Laplace-Operator ist $\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi} + \partial_{zz}$. Nützlich sind auch folgende Relationen: $\partial_\phi \vec{e}_r = \vec{e}_\phi$, $\partial_\phi \vec{e}_\phi = -\vec{e}_r$.

Berechnen Sie das stationäre Strömungsprofil einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein unendlich langes, rundes Rohr des Radius R. Die Strömung wird durch einen Druckgradienten durch das Rohr gepresst. Sie können annehmen, dass die Geschwindigkeit überall nur in Richtung des Rohres (der z-Richtung) zeigt.

(a) Stellen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen Koordinaten komponentenweise auf. Welche Terme fallen weg? Zeigen Sie: Der Druck hängt nur von z ab ($p = p(z)$) und der Druckgradient ist konstant ($dp/dz =: p' = \text{const.}$)

(b) Nehmen Sie nun an, dass v nur von dem Abstand r des Mittelpunkts der Röhre abhängt. Stellen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten auf und lösen Sie sie erst allgemein. Setzen Sie dann die Randbedingung $v(R) = 0$ ein. Sie erhalten $v = -(R^2 - r^2)p'/4\eta$.

(c) Zeigen Sie: Der Druckgradient, der nötig ist, um eine bestimmte Menge Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch ein Rohr zu drücken, skaliert mit dem Rohrdurchmesser wie $|p'| \propto R^{-4}$.

Übungsaufgaben

(keine Abgabe, können aber auf Wunsch in den Tutorien besprochen werden.)

Aufgabe 36) Rotierendes Bezugssystem

Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird um seine Achse gedreht. Nach einer Weile rotiert auch das Wasser mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie der Eimer. Welche Form hat die Wasseroberfläche?

Aufgabe 37) Potential

In einem Dreiteilchensystem wirken folgende Kräfte.

$$\vec{F}_1 = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{3/2}} - \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{3}} - \vec{x}_2 + \vec{x}_3$$

$$\vec{F}_3 = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

Untersuchen Sie, ob sie von einem Potential abgeleitet werden können und berechnen Sie ggf. das Potential.

Aufgabe 38) Zentralpotential

Eine Masse mit Energie E und Drehimpuls l bewege sich im Zentralpotential $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$.

(a) Erhalten Sie gebundene oder ungebundene Bahnen?

(b) Beweisen Sie die Bedingung $E > l\sqrt{k/m}$

(c) Wann ist Bahn eine Kreisbahn? Welche Geschwindigkeit hat sie dann?

(d) Bestimmen Sie die Bahnkurve $r(\phi)$ für $E > l\sqrt{k/m}$.

Aufgabe 39) Lagrange-Funktion

Eine Masse m_1 gleite reibungsfrei auf einer waagerechten Schiene. An ihr hängt ein frei schwingendes Pendel der Länge L, an dessen Ende eine weitere Masse m_2 befestigt ist.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses Problem auf. (Benutzen Sie z.B. Kugelkoordinaten für die Winkel des Pendels.)

(b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

(c) Betrachten Sie speziell Bewegungen, bei denen das Pendel strikt senkrecht zur Schiene schwingt. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Mit welcher Schwingungsfrequenz schwingt das Pendel im Grenzfall kleiner Schwingungen?

(d) Betrachten Sie nun Bewegungen, bei denen das Pendel strikt parallel zur Schiene schwingt. Mit welcher Schwingungsfrequenz schwingt es nun? Interpretieren Sie das Ergebnis von (c) und (d)
(Dieser Aufgabenteil ist etwas schwerer.)

Aufgabe 40) Trägheitstensor

Ein Rohr der Länge L mit innerem Durchmesser R_1 und äußerem Durchmesser R_2 sei innen mit einem leichteren Material gefüllt. Die Dichte des Rohres ist ρ_1, die Dichte des Füllmaterials. Die Gesamtmasse sei M. Berechnen Sie den Trägheitstensor dieses Objektes.

Aufgabe 41) Lagrange-Funktion mit relativistischer Korrektur

Innerhalb des Lagrangeformalismus lassen sich relativistische Korrekturen *näherungsweise* durch die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2} - U(x)$ beschreiben. Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit und $U(x)$ ein Potential.

Betrachten Sie konkret den harmonischen Oszillator mit dem Potential $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her.

(b) Leiten Sie den kanonischen Impuls und die Hamiltonfunktion her. Vergleichen Sie den kanonischen Impuls mit dem Ausdruck $m\dot{x}$. In welchem Limes ist das das Gleiche?

(c) Gibt es Erhaltungsgrößen? Welche? Berechnen Sie sie.

(d) Durch geschicktes Reskalieren der Einheiten für Ort, Zeit und Masse können Sie $m = c = k = 1$ setzen. Die Erhaltungsgröße aus (c) nimmt dann die Form $\tilde{C} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + \frac{1}{2}\tilde{x}^2$ an, wobei $\tilde{x}$ und $\tilde{v}$ der Ort und die Geschwindigkeit in reskalierten Einheiten sind. Skizzieren Sie die Bahnen des Teilchens in der $(\tilde{x}, \tilde{v})$- Ebene für verschiedene $\tilde{C}$.

(e) Drücken Sie nun die Erhaltungsgröße als Funktion von $\tilde{x}$ und $\tilde{p}$ aus ($\tilde{p}$ auch entsprechend reskaliert) und skizzieren Sie die Bahnen in der $(\tilde{x}, \tilde{p})$-Ebene.

NB: Wie Sie aus dem Tutorium hoffentlich noch wissen, können Sie diese Aufgabe auch ohne jegliche Kenntnis der relativistischen Mechanik lösen!

Aufgabe 42) Kanonische Transformationen

Betrachten Sie ein ein Teilchen in einer Dimension, dessen Bewegungszustand durch die generalisierte Koordinate q und den kanonischen Impuls p beschrieben wird.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Transformationen kanonisch sind.

(a) $Q = \ln(\frac{1}{q}\sin(p)),\ P = q\cot(p)$

(b) $Q = \arctan(\alpha q/p),\ P = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m\omega} + m\omega q^2)$.
Bestimmen Sie den Wert von α, für den diese Transformation kanonisch ist. Wenden Sie sie auf den harmonischen Oszillator an ($\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2)$). Welche Interpretation haben die Variablen Q und P?

Hinweise: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$, $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$