Institut für Physik WS 2016/2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 3

Bitte geben Sie auf dem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

18. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Erhaltungssätzen (z.B. Energie, Impuls, Drehimpuls) und den Symmetrieeigenschaften des Raums.
19. Was versteht man konkret unter "Homogenität der Zeit", "Homogenität des Raums", und "Isotropie des Raums"?
20. Wie ist der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten definiert?
21. Wie bewegt sich der Schwerpunkt eines Systems, in dem der Impuls erhalten ist?
22. Unter welchen Voraussetzungen gilt Energieerhaltung?
23. Unter welchen Voraussetzungen gilt Impulserhaltung?
24. Unter welchen Voraussetzungen gilt Drehimpulserhaltung?
25. Geben Sie ein Beispiel für ein System, in dem nur Energieerhaltung gilt, aber keine Impuls- und Drehimpulserhaltung.
26. Welche Erhaltungssätze gelten in einem System von N Teilchen zwischen zwei parallelen Platten und warum?
27. Welche Erhaltungssätze gelten in einem Zentralpotential $U(r)$?
28. Was besagt der Keplersche Flächensatz?
29. Warum bewegen sich Teilchen, deren Drehimpuls erhalten ist, immer in einer Ebene? Wie kann man diese Ebene beschreiben?
30. Was versteht man unter Schwerpunkt- und Relativkoordinaten?
31. Was ist die reduzierte Masse?
32. Was versteht man unter einem Zentralpotential? Welche Form muss eine konservative Zentralkraft haben?
33. Was für mögliche Bahnen kann ein Teilchen in einem Zentralpotential der Form $U(r) = -\alpha/r$ ausführen?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 21. November)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 5) Lenzscher Vektor (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit dem Drehimpuls $\vec{l}$ im Zentralpotential $U(r) = -\alpha/r$. Der Vektor $\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{l} + \vec{r}\, U(r)$ heißt Lenz-vektor.

(a) Zeigen Sie, daß $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist (d.h. $\dot{\vec{A}} = 0$).
Hinweis: Beweisen und benutzen Sie z. B. $\nabla U = (dU/dr)(\vec{r}/r)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ in der Bahnebene liegt und berechnen Sie $\vec{A}^2$.
Das Ergebnis ist $\vec{A}^2 = 2l^2E/m + \alpha^2$, wobei E die Energie des Teilchens ist.

Aufgabe 6) **Zentralpotential I** (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit Drehimpuls l in einem Zentralpotential $U(r)$. Das in der Vorlesung diskutierte "effektive Radialpotential" $U_{\text{eff}}(r)$, das in die effektive Differentialgleichung für r eingeht, kann auch als effektives Radialpotential in einem mitrotierenden Bezugssystem aufgefasst werden. Dies soll in dieser Aufgabe etwas näher beleuchtet werden.

(a) Gegeben eine Zentralkraft $F(r)\vec{e}_r$. Berechnen Sie den Radialanteil $F_{\text{eff}}(r)$ in Richtung $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ der effektiven Kraft (d.h., der Summe von realer Kraft und Scheinkräften) im mitrotierenden Bezugssystem.

(b) Die Zentralkraft $F(r)$ soll im Unendlichen gegen Null gehen. Berechnen Sie das effektive Radialpotential $U_{\text{eff}} = \int_r^\infty \mathrm{d}r' F_{\text{eff}}(r)$. Diskutieren Sie, ob das berechnete Potential konsistent ist mit dem effektiven Radialpotential U_{eff} des Zweikörperproblems aus der Vorlesung.

(c) Welche Bedingung müssen an U_{eff} gestellt werden, damit eine Kreisbahn existieren kann? Welche Bedingung muss zusätzlich gelten, damit die Kreisbahn stabil ist? (das heißt, sie bleibt auch bestehen, wenn das Teilchen leicht ausgelenkt wird?)

(d) Betrachten Sie konkret Zentralpotentiale der Form $U(r) = -\alpha/r^k$ mit $\alpha > 0$, $k > 0$. Skizzieren Sie das zugehörige effektive Radialpotential für $k = 1, 2, 3$. In welchen Fällen kann man Kreisbahnen erhalten? In welchem Fall ist die Kreisbahn auch stabil?

Aufgabe 7) **Zentralpotential II** (12 Punkte)

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m, der sich mit der Energie E und dem Drehimpuls l im Zentralpotential $U(r) = -\alpha/r^2$ bewegt ($\alpha > 0$).

(a) Berechnen Sie das effektive Radialpotential. Skizzieren Sie es und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahn des Teilchens qualitativ. Es gibt insgesamt drei verschiedene physikalisch sinnvolle Fälle für E und l. Welche?

(b) Stellen Sie die Radialgleichung für $r(t)$ auf und berechnen Sie $t(r)$. Sie erhalten

$$t = t_0 \pm \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{l^2}{2m} + \alpha}.$$

Bestimmen Sie für jeden Fall den maximal und minimal möglichen Wert von r. Unter welchen Umständen fällt ein Teilchen von einem Abstand r_0 ins Zentrum? Wenn es das tut, wie lange braucht es dafür?

(c) Stellen Sie die Winkelgleichung für den Winkel ϕ auf und berechnen Sie $\phi(r)$.

(d) Lösen Sie nach $r(\phi)$ auf. Wie sehen die Bahnen aus? Skizzieren Sie $r(\phi)$ für die drei Fälle in polarer Darstellung.