Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 5

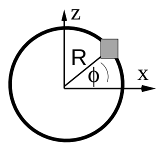
Bitte geben Sie auf dem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

37. Was sind rheonome, skleronome, holonome Zwangsbedingungen? Geben Sie jeweils konkrete Beispiele.
38. Was sind Zwangskräfte? Nennen Sie die Zwangskräfte in Ihren Beispielen aus der vorigen Frage und geben Sie die Richtung an, in die diese zeigen.
39. Was sind virtuelle Verrückungen?
40. Unter welchen Umständen gehören tatsächliche Bewegungen eines Systems nicht zur Klasse der virtuellen Verrückungen? Begründen Sie Ihre Antwort.
41. Wie lautet das d'Alembertsche Prinzip?
42. Erklären Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art
43. Was versteht man unter generalisierten Koordinaten?
44. Was versteht man unter generalisierten Kräften und wie berechnet man sie?
45. Was ist eine Lagrange-Funktion und wie berechnet man sie?
46. Unter welchen Bedingungen kann man Lagrange-Gleichungen zweiter Art aufstellen? Wie lauten diese Gleichungen?
47. Wie kann man die Lagrange-Gleichungen zweiter Art erweitern in Systemen, in denen es zusätzlich zu den Potentialkräften noch weitere Kräfte gibt?
48. Was versteht man unter der Dissipationsfunktion? Falls es eine Dissipationsfunktion gibt - wie kann man dann die die Lagrange-Gleichungen zweiter Art um Reibungskräfte ergänzen?
49. Wie lautet die Lagrange-Funktion für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 5. Dezember)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 13) Zwangsbedingungen und Zwangskräfte im Looping (10 Punkte)



Eine Masse m bewege sich auf einer Schiene in einem kreisförmigen (senkrechten) Looping des Radius R (siehe Bild). Sie unterliegt der Schwerkraft, kann aber nicht herausfallen.

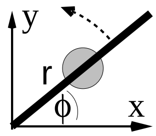
In dieser Aufgabe sollen Sie die Zwangsbedingungen analysieren und die Zwangskräfte berechnen, die die Masse in der Schiene halten.

(a) Zeigen Sie: In differentieller Form lässt sich die Zwangsbedingung in die Form $x\,dx + z\,dz = 0$ bringen. Stellen Sie damit die Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Welche allgemeine Form hat die Zwangskraft, welche die Zwangsbedingung sichert?

(b) Berechnen Sie die Zwangskraft als Funktion von z und der Geschwindigkeit v.

(c) Als generalisierte Koordinate eignet sich der Winkel ϕ (siehe Bild). Stellen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung für ϕ ab (d.h. die Lagrange-Gleichungen zweiter Art).

Aufgabe 14) **Perle auf einem rotierenden Stab** (10 Punkte)



Ein Stab rotiere mit fester Winkelgeschwindigkeit ω in der (x, y) Ebene. Der Stab ist somit in Richtung des zeitabhängigen Einheitsvektors $\vec{e}_r = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ ausgerichtet. Eine Perle gleite auf diesem Stab reibungsfrei. Durch die Bewegung des Stabs wird sie nach außen geschleudert.

Wir haben dieses Problem in der Vorlesung mit Hilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art gelöst. Nun sollen Sie anhand der Lagrange-Gleichung erster Art auch noch die Zwangskräfte berechnen und analysieren.

(a) Welche virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}$ sind erlaubt? Sind die *realen* Verschiebungen $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$ in der Menge der möglichen virtuellen Verrückungen enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Formulieren Sie die Zwangsbedingung in differentieller Form.

(c) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung erster Art für die Bewegung der Perle auf. Bestimmen Sie den Lagrange-Parameter λ so, dass gewährleistet ist, dass die Zwangsbedingung erfüllt bleibt. Sie erhalten die Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = 2\omega m\dot{r}\vec{e}_\varphi$ mit $\vec{e}_\varphi = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$.

(d) Zeigen Sie, dass diese Bewegungsgleichung kompatibel ist mit der Bewegungsgleichung für $r(t)$, die in der Vorlesung hergeleitet wurde: $\ddot{r} = \omega^2 r$. Benutzen Sie dazu zum Beispiel die Ergebnisse von Kapitel 1.3.2.

(e) Lösen Sie diese für die Anfangsbedingung $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = 0$.

(f) Berechnen Sie die Energie der Perle als Funktion der Zeit. Zeigen Sie, dass der Energiezuwachs pro Zeit mit der von der Zwangskraft am System geleisteten Arbeit pro Zeit übereinstimmt.

Aufgabe 15) **Teilchen im elektromagnetischen Feld** (10 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines Teilchens der Ladung q im elektromagnetischen Feld lautet

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))$$

Hier ist $\vec{A}(\vec{r}, t)$ das Vektorpotential und $\Phi(\vec{r}, t)$ das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes, aus dem sich das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mittels $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \nabla\Phi$ berechnen lassen.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung zweiter Art auf, zunächst ausgedrückt in $\vec{A}$ und Φ.

(b) Zeigen Sie, dass daraus die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L$ folgt mit der Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$