Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 6

Bitte geben Sie auf dem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

50. Welche Größe ist erhalten wenn eine Lagrange-Funktion nicht von der Zeit abhängt?
51. Was ist eine zyklische Variable?
52. Was besagt das Noethersche Theorem? Geben Sie Beispiele.
53. Wie lautet das Hamiltonsche Prinzip?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 12. Dezember)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 16) Variationsrechnung (12 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung anhand des Hamiltonschen Wirkungsprinzips das wichtige Instrument der Variationsrechnung kennengelernt. Mit dieser Methode können allgemein Extremalprobleme gelöst werden. Auf diesem Aufgabenblatt soll die Methode weiter geübt werden. Zunächst betrachten wir ein geometrisches Problem.

Gegeben sei eine parametrisierte Fläche, die durch die Gleichung $z = f(x, y) = \cosh(y)$ definiert ist. Wir betrachten alle möglichen Kurven, die die beiden Punkte A, B mit $(x_A, y_A) = (1, -1)$ und $(x_B, y_B) = (-1, 1)$ verbinden, und suchen die Kurve mit der kürzesten Länge.

(a) Parametrisieren Sie die Kurve zunächst allgemein gemäß $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ mit $z = f(x, y)$. Berechnen Sie die Bogenlänge als Funktion von $\vec{r}(s)$. Sie erhalten einen Ausdruck der Form $S = \int \mathrm{d}s\, L(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$. Wie lautet L?

(b) Stellen Sie *formal* die Euler-Lagrange Gleichungen für dieses Problem auf. Sie brauchen die einzelnen Terme nicht explizit auszurechnen. Für diese Teilaufgabe ist keinerlei Rechnung nötig. Sie können völlig auf die Ergebnisse der Vorlesung zurückgreifen, wenn Sie die Laufvariable s mit der Variablen t in der Vorlesung identifizieren (Warum?).

(c) Es gibt eine zyklische Variable. Identifizieren Sie und bestimmen Sie die zugehörige "Erhaltungsgröße".

(d) Nutzen Sie (c), um die Aufgabe zu lösen. Welche Länge hat die gesuchte Kurve?

Hinweis: Wenn Sie (a) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie in Teilaufgabe (c,d) stattdessen mit $L = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 \ \cosh^2(y)}$. Nutzen Sie wenn möglich $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$.

Aufgabe 17) Lagrange-Multiplikatoren I (10 Punkte)

Wenn eine Funktion oder ein Funktional mit Nebenbedingungen minimiert werden soll, bietet sich dazu die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* an. Wir diskutieren die Methode in dieser Aufgabe zunächst am Beispiel eines Extremalproblems für Funktionen.

Das allgemeine Prinzip der Methode funktioniert wie folgt: Gegeben sei ein Parameterraum von Parametern $\vec{x}$ und eine Funktion $F(\vec{x})$. Wir suchen die Extrema von $F(\vec{x})$ mit der Nebenbedingung, dass $g(\vec{x}) \equiv 0$ ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(i) Definiere $I(\vec{x}) = F(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})$.

(ii) Finde die Extrema von $F(\vec{x})$ als Funktion von λ.

(iii) Wähle λ so, dass die Nebenbedingung erfüllt ist.

Lösen Sie damit die folgende Aufgabe:

Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders, der vollständig in dem Ellipsoid $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ enthalten ist.

Hinweis: Siehe Seite 53/54 in meinem Skript zu "Mathematische Rechenmethoden",
`http://www.staff.uni-mainz.de/schmidfr/Lehre/Skripte/Mathematische_Rechenmethoden.pdf`
für eine Modellrechnung zu einer ähnlichen Aufgabe.

Aufgabe 18) Variationsrechnung II (8 Punkte)

Die Methode der Lagrange-Parameter kann man auch für Funktionale anwenden, wie z.B. das Wirkungsfunktional $I[\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)]$ aus Kapitel 2.5.1 der Vorlesung.

Lesen Sie dazu zunächst im Skript das Kapitel 2.5.2. Betrachten Sie dann konkret ein System in kartesischen Koordinaten mit der Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_i \cdots \dot{\vec{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$$

mit Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen) der Form $\sum_{j=1}^{N} \vec{a}_j \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j = a_0 \, \mathrm{d}t$.

Leiten Sie die Bewegungsgleichungen gemäß Kapitel 2.5.2 her. Zeigen Sie, dass Sie dabei (bis auf ein Vorzeichen) die Lagrange-Gleichungen erster Art aus Kapitel 2.2 erhalten.