

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 7

Bitte geben Sie auf dem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

54. Was versteht man unter einem starren Körper?
55. Was sind die Eulerschen Winkel?
56. Was zeichnet einen physikalischen Tensor aus?
57. Wie ist der Trägheitstensor eines starren Körpers mit der Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert?
58. Wie hängt der Trägheitstensor mit dem Trägheitsmoment zusammen?
59. Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Drehimpuls und die kinetische Energie eines starren Körpers an. Welches ist der Translationsanteil? Welches ist der Rotationsanteil?
60. Was ist eine Hauptachsentransformation?
61. Was sind Hauptträgheitsmomente? Was sind Hauptträgheitsachsen?
62. Wie lautet der Satz von Steiner?
63. Wie ist das Drehmoment definiert?
64. Wie stellt man allgemein die Lagrange-Gleichung für starre Körper auf?
65. Wie lauten die Eulerschen Gleichungen? Was beschreiben sie?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 19. Dezember)

Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 19) Trägheitstensor (10 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Quaders der Masse M mit Kantenlängen a , b und c in einem Koordinatensystem, das den Ursprung im Schwerpunkt hat und die Achsen parallel zu den Querkanten. Die Massenverteilung im Quader sei homogen.
- (b) In (a) sollten Sie folgendes Ergebnis erhalten haben:

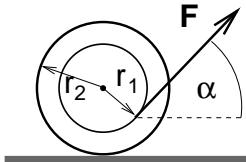
$$\mathbf{I} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun das Trägheitsmoment bzgl. der Achse in Richtung $(3, 1, 5)$.

- (c) Betrachten Sie einen Würfel der Masse M und Kantenlänge 1, der entlang des Koordinatensystems ausgerichtet ist und dessen linke untere Kante im Ursprung ist. (Die rechte obere Kante ist demnach im Punkt $(1, 1, 1)$). Berechnen Sie das Trägheitsmoment bzgl. Drehungen um eine Achse durch den Nullpunkt in Richtung $(1, -1, 0)$. Nutzen Sie dazu das Ergebnis von (a) und rechnen Sie ansonsten so wenig wie möglich (eine halbe Zeile genügt!).

- (d) Berechnen Sie den Trägheitstensor einer Kugel der Masse M und des Radius R .

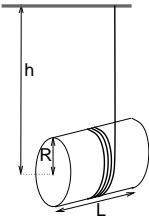
Aufgabe 20) Drehmoment (5 Punkte)



Auf einer horizontalen Ebene liegt eine Garnrolle mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 , auf der ein Faden aufgewickelt ist. Sie befindet sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe. Dann ziehen Sie an dem Faden mit einer konstanten Kraft, die den Winkel α zur Ebene einschließt (siehe Bild).

Bei welchen Winkeln α rollt die Garnrolle von Ihnen weg und bei welchen zu Ihnen hin? Warum? (Probieren Sie es zuhause aus).

Aufgabe 21) Jojo (10 Punkte)



Betrachten Sie ein Jojo aus einem Zylinder der Länge L , des Radius R und der Masse M , an dessen runder Seitenfläche ein Faden befestigt ist. Das Jojo kann am Faden herauf und herunter rollen, seine Höhe sei h .

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment θ des Zylinders um seine Längsachse.
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Jojos als Funktion von \dot{h} . Vergessen Sie nicht den Rotationsanteil!
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Bewegungsgleichungen. Wie sieht die Lösung der Bewegungsgleichungen aus?

Aufgabe 22) Hamiltonfunktion (5 Punkte)

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m sei in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) gegeben durch

$$V(r) = V_0 \ln(r/r_0), \quad V_0 = \text{const.}, \quad r_0 = \text{const.}.$$

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. Es gibt drei Erhaltungssätze. Welche?
- Bestimmen Sie die drei generalisierten Impulse und stellen Sie die Hamilton-Funktion auf.