Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2016/2017

Übungen zur Vorlesung Theorie I (Mechanik)

Blatt 8

Quickies:

66. Wie definiert man im Lagrange-formalismus den generalisierten Impuls?
67. Was ist eine Hamilton-Funktion?
68. Wie hängen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion zusammen?
69. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?
70. Erklären Sie den Begriff des Phasenraums.
71. Wie sind die Poissonklammern definiert?
72. Nennen Sie einige wichtige Eigenschaften der Poissonklammern.
73. Was ist eine kanonische Transformation?
74. Wie verhalten sich Poissonklammern unter einer kanonischen Transformation?
75. Was verstehen man unter der Ërzeugenden Funktionëiner kanonischen Transformation?
76. Nach welchem allgemeinen Kriterium können Sie entscheiden, ob eine Transformation kanonisch ist?
77. Erklären Sie den Hamilton-Jacobi Formalismus
78. Wie lauten die zeitunabhängige und die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichungen? Wann sind sie lösbar?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 10:00 am 9. Januar 2017)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 23) Poissonklammern (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für beliebige Funktionen $f(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \{q_j, f\} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial q_j} = -\{p_j, f\}$$

(b) Betrachten Sie ein System von N Teilchen mit den Orten $\vec{r}_i$ und den Impulsen $\vec{p}_i$. Zeigen Sie $\{L_\alpha, L_\beta\} = \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$. Hier ist $\vec{L}$ der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$.

(c) Betrachten Sie dasselbe System wie in (b). Überprüfen Sie für die Drehimpulse die Jacobi-Identität. Sie dürfen dabei die in (b) gezeigte Gleichung
$\{L_\alpha, L_\beta\} = \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$ benutzen.

Aufgabe 24) **Kanonische Transformationen** (10 Punkte)

(a) Für welche Werte von α und β ist die Variablentransformation

$$(q,p) \longrightarrow (Q,P) \qquad \text{mit} \quad (Q,P) = (q^\alpha \cos(\beta p), q^\alpha \sin(\beta p))$$

kanonisch?

(b) Betrachten Sie ein N-Teilchen System mit den Orten $\vec{r}_i$ und den Impulsen $\vec{p}_i$. Können zwei Komponenten des Gesamtdrehimpulses gleichzeitig als kanonische Impulse auftreten? (Sie dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 23 benutzen).

(c) Zeigen Sie, daß für beliebige Trajektorien $(\underline{Q}(t), \underline{P}(t))$ eines Hamiltonschen Systems mit Anfangsbedingungen $\underline{Q}(0) = \underline{q}, \underline{P}(0) = \underline{p}$ gilt: Die Variablentransformation

$$(\underline{q}, \underline{p}) \longrightarrow (\underline{Q}(\epsilon), \underline{P}(\epsilon)) = (\underline{q} + \epsilon\, \dot{\underline{q}}, \underline{p} + \epsilon\, \dot{\underline{p}})$$

ist kanonisch für infinitesimale ϵ. Hier steht $\underline{q}$ für $q_1, \cdots, q_m$, $\underline{p}$ für $p_1, \cdots, p_m$, und analoges gilt für $\underline{Q}$ und $\underline{P}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von (c), daß die Zeitentwicklung eines Hamiltonschen Systems eine kanonische Transformation vermittelt.

Aufgabe 25) **Hamilton-Jacobi Formalismus** (10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Hamilton-Jacobi Formalismus die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im Schwerefeld, d.h. im Potential $V(z) = mgz$.

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(z,p)$ des Systems auf. Ist die Energie E erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Stellen Sie die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Erzeugende $S_E(z)$ bei gegebener Energie E auf und berechnen Sie die Lösung für $S_E(z)$

(c) Fassen Sie $S_E(z) =: \Phi(z,P)$ mit $P = E$ als Erzeugende einer kanonischen Transformation $(z,p) \mapsto (Q,P)$ auf. Es handelt sich um eine kanonische Transformation im engeren Sinne. Warum? Berechnen Sie Q und geben Sie die neue Hamiltonian $\mathcal{H}'(Q,P)$ an.

(d) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen im transformierten System auf und lösen Sie sie. Sie erhalten $Q = t - t_0$ und $P = \text{const.}$

(e) Kombinieren Sie das Ergebnis für Q aus (c) und (d) und berechnen Sie damit die Bahnkurve $z(t)$ für vorgegebene Anfangsbedingung $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$.