Institut für Physik SS 2016

Friederike Schmid

"Theorie 1" Präsenzübung – Mathematische Voraussetzungen

Aufgabe 1) Vektoren und Transformationsverhalten

Wir bezeichnen mit dem Symbol Σ Orthonormalbasen des Raums.

Gegeben sei ein Vektor $\vec{r}$ mit Koeffizienten (x, y, z) in irgendeiner Orthonormalbasis Σ_0

Gegeben zwei weitere Orthonormalbasissysteme Σ, Σ' mit Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und Basisvektoren $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ und

a) Wie berechnet man die Koeffizienten (r_1, r_2, r_3) des Vektors in der Orthonormalbasis Σ?
Wie berechnet man die Koeffizienten (r'_1, r'_2, r'_3) des Vektors in der Orthonormalbasis Σ'?

b) Beweisen Sie die folgende Umrechnungsregel zwischen den Koordinaten r_i und r'_i:
$r'_i = \sum_j U_{ij}\, r_j$ mit $U_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$

c) Zeigen Sie, dass die Matrix U eine orthogonale Matrix ist. (Erklären Sie zuerst, was das überhaupt ist).

Aufgabe 2) Taylorentwicklung

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(\cos(2x))$ bis zur zweiten Ordnung um $x = 0$ (d.h. bis inklusive dem Koeffizienten von x^2).

b) Entwickeln Sie die Funktion $g(x, y) = \mathrm{e}^y \sin(x)$ bis zur zweiten Ordnung um $(x = 0, y = 0)$.

Aufgabe 3) Differentialgleichungen

Betrachten Sie die folgenden linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie sollten die Lösung ungefähr kennen. Machen Sie ohne Begründung einen geeigneten Ansatz. Verifizieren Sie, dass Ihr Ansatz stimmt.

a) $\ddot{x} = g$

b) $\dot{x} = -\eta\, x$

c) $\ddot{x} = \omega^2\, x$

Aufgabe 4) **Nabla-Operator**

a) Betrachten Sie das skalare Feld $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
Berechnen Sie den Gradienten ∇U.

b) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$.
Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation.

c) Berechnen Sie $\Delta|\vec{r}|$.

Aufgabe 5) **Wegintegral**

Betrachten Sie wieder das Vektorfeld $\vec{W}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$.

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{W}(\vec{r})$ entlang der Linie $x = y = z$ vom Anfangspunkt $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ bis zum Endpunkt $\vec{r}_1 = (1,1,1)$.

Aufgabe 6) **Totales Differential**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^{xy} + x^2 - y^2)$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f$, $\partial_y f$.

b) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f$.

Aufgabe 7) **Totale Ableitung**

Sei $U(x,y,z)$ eine Funktion mit der Eigenschaft $U(x,y,z) = \lambda^{-K} U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \forall\, \lambda$.

Zeigen Sie: Daraus folgt $U = \frac{1}{K} \vec{r} \cdot \nabla U$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Definieren Sie die Funktion $f(\lambda) = \lambda^{-K} U(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
Zeigen Sie ohne Rechnung, dass dann für alle λ gelten muss: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

b) Berechnen Sie nun $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}$ bei $\lambda = 1$ und beweisen Sie damit die Relation.