

”Theorie 1” Präsenzübung – Mathematische Voraussetzungen 2**Aufgabe 8) Variation der Konstanten**

Eine praktische Methode zur Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen ist die ”Variation der Konstanten”. Diejenigen von Ihnen, die diese Methode noch nicht kennen, sollen sie in dieser Übung kennenlernen und üben.

Vorab eine kurze Zusammenfassung der Methode: Ziel ist die Lösung einer Differentialgleichung der Form $y' = a(x) y + b(x)$ mit vorgegebener Anfangsbedingung und vorgegebenen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$.

- Im ersten Schritt lösen wir die homogene Gleichung $y'_H = a(x) y_H$. Wir erhalten eine Schar von Lösungen $y_H = \alpha \tilde{y}_H$, wobei der Vorfaktor α beliebig ist.
- Im zweiten Schritt suchen wir eine Lösung y_I der vollen inhomogenen Gleichung, die die Anfangsbedingungen noch nicht unbedingt erfüllen muss. Dazu machen wir den Ansatz $y_I(x) = \alpha(x) \tilde{y}_H(x)$ (d.h., wir nehmen an, dass der Vorfaktor α abhängig von x sein darf). Mit diesem Ansatz erhalten wir wie durch Zauberhand eine Gleichung für $\alpha(x)$, die wir durch einfaches Integrieren lösen können.
- Zuletzt setzen wir die spezielle Lösung y_I und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung y_H zusammen ($y = y_I + \alpha \tilde{y}_H$) und wählen α so, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

Wenden Sie diese Methode nun auf verschiedene Differentialgleichungen an.

- a) $y' + y = b$ mit $y(0) = 0$. (hier ist b eine Konstante).
- b) $y' + y = \exp(-x)$ mit $y(0) = 0$.
- c) $y' = \frac{1}{x^2} - 3\frac{y}{x}$ mit $y(1) = 0$.
- d) $y' = a(x) y + b(x)$. Hier sollen Sie allgemeine Lösung dieser Gleichung explizit ausrechnen und die oben angesprochene ”Zauberhand” von verifizieren.