

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 1

Vorbemerkungen: Die Aufgaben müssen am Abgabetermin bis 13:00 Uhr im **Übungsbriefkasten Nummer 35** abgegeben werden (Staudingerweg 7, Erdgeschoss, rote Kästen). Um die Klausurzulassung zu erwerben, müssen Sie 50 % der Punkte erzielen. Auf jedes Blatt gibt es 12 Punkte.

Fragen zur Vorlesung:

1. Wie lauten die Postulate der Quantenmechanik?
2. Wie lautet das Symmetrisierungspostulat?
3. Was unterscheidet Bosonen und Fermionen?
4. Was ist der Zeitentwicklungsoperator?
5. Erklären Sie das Schrödingerbild und Heisenbergbild.
6. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen in der Quantenmechanik.
7. Wie kann man quantenmechanisch offene Systeme beschreiben?
8. Skizzieren Sie die Idee der Dekohärenz.
9. Erklären Sie das Feynmansche Pfadintegral.

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 4.11.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 1) Pfadintegral eines Teilchens im Gravitationsfeld (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen im Schwerfeld der Erde in einer Dimension.

Berechnen Sie den Propagator $G(x_1, T|x_0, 0)$ mit Hilfe des Pfadintegralformalismus.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- a) Berechnen Sie den klassischen Pfad $\bar{x}(t)$ und die klassische Wirkung $\bar{S}$ für die vorgegebenen Randbedingungen.

- b) Stellen Sie formal den Ausdruck für das Pfadintegral auf. Entwickeln Sie allgemeine Pfade im Integral um den klassischen Pfad, $x(t) = \bar{x}(t) + \eta(t)$. Berechnen Sie dann das Pfadintegral.

Hinweis: Sie dürfen die Lösung für das Pfadintegral des freien Teilchens benutzen. Sie lautet (siehe Vorlesung)

$$G_{\text{frei}}(x_1, T|x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_1 - x_0)^2}{T}\right). \quad (1)$$

- c) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf drei Dimensionen.

Aufgabe 2) Propagator und Harmonischer Oszillator (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Pfadintegralformalismus der Propagator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ausgerechnet. Das Ergebnis lautet:

$$G(x_2, T|x_1, 0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega T)} [(x_1^2 + x_2^2) \cos(\omega T) - 2x_1 x_2]\right\} \quad (2)$$

Dieses Ergebnis soll nun benutzt werden, um die Energie-Eigenwerte E_n des harmonischen Oszillators und die zugehörigen Eigenfunktionen $\Phi_n(x)$ zu bestimmen.

- a) Zeigen Sie allgemein, daß sich der Propagator folgendermaßen entwickeln läßt:

$$G(x_2, T|x_1, 0) = \sum_n \Phi_n(x_2) \phi_n^*(x_1) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_n T\right\} \quad (3)$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $G = \langle x_2|U(T, 0)|x_1\rangle$ der Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung entspricht und natürlich auch alles andere, was Sie in Quantenmechanik I über den Hilbertraum und Funktionensysteme gelernt haben.

- b) Entwickeln Sie Gleichung (2) nach Potenzen von $\exp\{-i\omega T\}$ und bestimmen Sie durch einen Vergleich dieser Potenzreihe mit Gleichung (3) E_0, E_1 und die zugehörigen Eigenfunktionen $\Phi_0(x)$ bzw. $\Phi_1(x)$.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit den aus früheren Vorlesungen (z.B. Theorie 3 - Quantenmechanik) bekannten Lösungen für den harmonischen Oszillator:

$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ und $\Phi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right\}$, wobei die H_n 's Hermite'schen Polynome sind mit $H_0(y) = 1$, $H_1(y) = 2y$, $H_2(y) = 4y^2 - 2$ etc.