Institut für Physik WS 2015/2016

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 10

Fragen zur Vorlesung:

56. Erläutern Sie die Dyson-Reihe
57. Wie lautet Fermis goldene Regel?
58. Skizzieren Sie die Theorie der Absorption und Emission von Photonen.
59. Was versteht man unter der stimulierten Emission und Adsorption von Photonen? Was unter spontaner Emission?
60. Wie lautet die Klein-Gordon Gleichung? Was beschreibt sie?
61. Warum unterscheidet man zwischen reellen und komplexen Klein-Gordon-Feldern? Worin besteht physikalisch der Unterschied?
62. Stellen Sie die Lagrangedichte für reelle und komplexe Klein-Gordon Felder auf.
63. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Klein-Gordon-Felder?
64. Wie werden Klein-Gordon Felder quantisiert?
65. Erklären Sie den Begriff der Mikrokausalität.

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 20.1.2016 im Kasten 35)

Aufgabe 19) Dipolübergänge (6 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Strahlungsübergänge von Atomelektronen aufgrund der Kopplung an ein elektromagnetisches Feld diskutiert. Für Felder mit festen Photon-Besetzungszahlen $n_{\mathbf{k}\alpha}$ wurden folgende Ausdrücke für die Absorptionsrate $W^{abs}_{i\to f}$ und die Emissionsrate $W^{em}_{i\to f}$ eines Photons mit Wellenvektor $\mathbf{k}$ und Polarisation $\epsilon_{\mathbf{k}\alpha}$ hergeleitet:

$$W_{i\to f} = (\frac{2\pi e}{m})^2 \frac{1}{V\omega_{\mathbf{k}}}\, n_{\mathbf{k}\alpha}\, |\langle\phi_f|\mathbf{p}\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}|\phi_i\rangle|^2 \delta(E_f^{el} - E_i^{el} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \tag{1}$$

$$W_{i\to f} = (\frac{2\pi e}{m})^2 \frac{1}{V\omega_{\mathbf{k}}}\, (n_{\mathbf{k}\alpha}+1)\, |\langle\phi_f|\mathbf{p}\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}|\phi_i\rangle|^2 \delta(E_f^{el} - E_i^{el} + \hbar\omega_{\mathbf{k}}). \tag{2}$$

Hier sind $|\Phi_{i,j}\rangle$ die Elektronenzustände vor und nach dem Übergang, $E^{el}_{i,f}$ die zugehörigen Energieeigenwerte, $\omega_{\mathbf{k}}$ die Frequenz des Photons, und V das Volumen des Systems.

In der Praxis wird häufig als wichtige Näherung die Dipolnäherung eingeführt: Für Wellenlängen, die sehr viel größer als das Atom sind, gilt näherungsweise $\exp(i\mathbf{kr}) \approx 1$.

a) Zeigen Sie: In der Dipolnäherung gilt: $\langle\phi_f|\mathbf{p}\epsilon_{\mathbf{k}\alpha}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}|\phi_i\rangle \approx i\,m\,\omega_{fi}\,\langle\phi_f|\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}\cdot\mathbf{r}|\phi_i\rangle$
<u>Hinweis</u>: Zeigen Sie zuerst: Im ungestörten System H_0 (ohne Kopplung von Licht und Materie) gilt $\mathbf{p}/m = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{r}, H_0]$.

b) Aus (a) kann man Auswahlregeln für Dipolübergänge herleiten. Zeigen Sie zum Beispiel, dass für wasserstoffartige Atome der Übergang zwischen Zuständen mit Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0$ zu $l' = 0$ verboten ist.

c) Zeigen Sie für wasserstoffartige Atome allgemeiner, dass sich die Bahndrehimpulsquantenzahlen (l, m) bei Dipolübergängen nur gemäß $\Delta m = 0, \pm 1$ und $\Delta l = \pm 1$ ändern dürfen. Sie können dazu z.B. die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ einsetzen.

Aufgabe 20) Klein-Gordon-Gleichung (6 Punkte)

a) Verifizieren Sie für Klein-Gordon-Felder Φ explizit die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu J^\mu = 0$ mit $J^\mu = i(\Phi^* \partial_\mu \Phi - (\partial_\mu \Phi^*)\Phi)$.

b) Für komplexe Klein-Gordon Felder lauten laut Vorlesung die Vertauschungsrelationen für die Leiteroperatoren (in Impulsdarstellung) der Teilchen und Antiteilchen: $[a_{\mathbf{k}}, a^+_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}] = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ und $[a_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}] = 0$.

Drücken Sie die Feldoperatoren $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi^+(\mathbf{r}, t)$ des Klein-Gordon Feldes als Funktion von $a_{\mathbf{k}}, a^+_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}$ und $b^+_{\mathbf{k}}$ aus. Verifizieren Sie damit die Vertauschungsrelation $[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial_t \Phi^+(\mathbf{r}', t)] = i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Zusatzaufgabe: Fermis goldene Regel (4 Sonderpunkte)

In der Vorlesung wurde ein kurzer Abriss der zeitabhängigen Störungsrechnung gegeben. Wichtige Ergebnisse waren:

- Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand $|i\rangle$ zu einem Zustand $|f\rangle$ unter Einfluss der Störung ist durch die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{fi} = |\langle f|U_W|i\rangle|^2$ gegeben, wobei U_W der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild ist.
- U_W erfüllt die Integralgleichung

$$U_W(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H'_W(t')\, U_W(t', t_0), \tag{3}$$

  wobei H'_W der Störungsoperator im Wechselwirkungsbild ist. Der Zusammenhang mit dem Störoperator H' im Schrödingerbild ist $H'_W = \exp(\frac{i}{\hbar} H_0 t) H' \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t)$.
- Die Störungsreihe (Dyson-Reihe) ergibt sich aus der iterativen Anwendung der Gleichung (3). In erster Ordnung ergibt sich $U_W(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_W(t')$.

Ausgehend davon sollen Sie nun die berühmte "goldene Regel" für zeitunabhängige Störungen herleiten. Nehmen Sie dafür an, dass eine zeitlich konstante Störung V adiabatisch eingeschaltet wird, d.h. $H' = V\, \exp(\eta t)$ mit $\eta \to 0^+$. (Dieser Ausdruck kann natürlich für sehr große $t \to \infty$ nicht mehr benutzt werden.)

a) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{fi}(t)$ für allgemeines $\eta > 0$.

b) Berechnen Sie nun die Übergangsrate $\mathrm{d}P_{fi}/\mathrm{d}t$. Nehmen Sie dann den Grenzwert $\eta \to 0$ und überprüfen Sie die goldene Regel

$$\frac{\mathrm{d}P_{fi}}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{\hbar}\, |\langle f|V|i\rangle|^2\, \delta(E_f - E_i). \tag{4}$$