Institut für Physik WS 2015/2016

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 11

Fragen zur Vorlesung:

66. Wie lautet der Hamiltonoperator für Klein-Gordon-Felder? Als Komponente welcher Vierergröße ist er kovariant eingebettet?
67. Worin unterscheiden sich Teilchen und Antiteilchen bei dem Klein-Gordon-Feld?
68. Was versteht man unter dem Begriff einer Darstellung der Lorentzgruppe?
69. Welche Bedingungen stellt man an eine relativistische Feldtheorie für Teilchen mit Spin?
70. Welche Form kann eine solche Theorie für zweikomponentige Spinoren nur haben und warum?
71. Wie lautet die Weyl-Gleichung? Was für Teilchen beschreibt sie?
72. Wie werden Weyl-Felder quantisiert? Warum?
73. Sind Weyl-Teilchen Fermionen oder Bosonen?
74. Welche Helizität haben Weyl-Teilchen?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 27.1.2016 im Kasten 35)

Aufgabe 21) Mikrokausalität (6 Punkte)

Betrachten Sie wie in Aufgabe 20 das komplexe Klein-Gordon Feld $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

a) In Aufgabe 20 haben Sie gezeigt: $[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial_t \Phi^+(\mathbf{r}', t)] = i\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.
Zeigen Sie nun auch noch $[\Phi(\mathbf{r}, t), \Phi^+(\mathbf{r}', t)] = 0$ und $[\Phi(\mathbf{r}, t), \Phi(\mathbf{r}', t)] = 0$.

b) Versuchen Sie nun einmal probehalber, das Klein-Gordon-Feld fermionisch zu quantisieren, d.h. $\{a_{\mathbf{k}}, a^+_{\mathbf{k}'}\} = \{b_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}\} = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$
und $\{a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}\} = \{b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}\} = \{a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}\} = \{a_{\mathbf{k}}, b^+_{\mathbf{k}'}\} = 0$
Berechnen Sie mit diesem Ansatz $\{\Phi(\mathbf{r}, t), \partial_t \Phi^+(\mathbf{r}', t)\}$ und $\{\Phi(\mathbf{r}, t), \Phi^+(\mathbf{r}', t)\}$.
Betrachten Sie insbesondere die Grenzwerte $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \to \infty$ und $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \to 0$.
Gilt Mikrokausalität?

Hinweis: Es gilt $\lim_{\eta \to 0^+} \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + x^2}} \sin(\tau) \exp(-\eta\tau) = x K_1(x)$, wobei $K_n(x)$ die motifizierte Besselfunktion zweiter Art ist. Benutzen Sie z.B. die WolframAlpha Seite, um das asymptotische Verhalten dieser Funktion zu ermitteln. ($K_n(x)$ wird dort als `BesselK[n,x]` notiert).

Aufgabe 22) **Majorana-Teilchen** (6 Punkte)

Gehen Sie aus von der Lagrangedichte für linkshändige Weyl-Spinoren (Zweierspinoren)

$$\mathcal{L}_W = \psi_L^+ i\, \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad \text{mit} \quad \overline{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}), \tag{1}$$

wobei σ_k die Pauli-Matrizen sind. Führen Sie in diese Lagrangedichte den folgenden sogenannten Majorana-Massenterm ein:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{i}{2} m(\psi_L^T \sigma_2 \psi_L + \psi_L^+ \sigma_2 \psi_L^{+T}). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie für infinitesimale Lorentztransformationen, dass der Zusatzterm $\mathcal{L}_M$ Lorentzinvariant ist.

   Erinnerung: ψ_L transformiert sich unter Lorentztransformation gemäß $\psi \to \psi' = M_L \psi$ mit $M_L = \exp((\vec{u} - i\vec{\phi})\vec{\sigma}/2)$, wobei $\vec{u}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Boost-Anteils über $\vec{v} = \tanh(u)\, \vec{u}/u$ verknüpft ist.

b) Aus welchem Grund taucht der Zusatzterm trotz seiner Lorentzinvarianz in der Weyl-Theorie nicht aus? Welche Bedingung wird verletzt? (Welche Konsequenz könnte das haben?)

c) Stellen Sie die gesamte Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_M$ auf und leiten Sie daraus die Wellengleichung für ψ_L her.

   Hinweis: Die Spinoren ψ und $\psi^+ = \psi^{*T}$ sind unabhängig.

d) Bestimmen Sie die ebenen Wellen, die die Wellengleichung lösen. Zeigen Sie, dass der einfache Ansatz $\Psi_L \propto \mathrm{e}^{ipx}$ nicht zum Ziel führt. Machen Sie stattdessen den Ansatz $\Psi_L = \alpha\, \mathrm{e}^{-ipx} + \beta\, \mathrm{e}^{ipx}$ (mit $p^\mu = (p_0, \vec{p})$), wobei α und β Zweierspinoren sind. Zeigen Sie, dass p die Relation $p_\mu p^\mu = m^2$ erfüllen muss.

   Hinweis: Sie können die Relation entweder direkt ausrechnen oder sich das Problem dadurch erleichtern, dass Sie vorher eine Lorentztransformation in das Inertialsystem machen, in dem $\vec{p} = 0$ ist.

Zusatzaufgabe: **Gamma-Matrizen** (4 Sonderpunkte)

Eine kovariante *und* global eichinvariante Theorie für massive Teilchen mit Spin ist die Dirac-Theorie, die in der Vorlesung als nächstes besprochen werden wird. Zur Formulierung der Dirac-Gleichung werden die sogenannten Gamma-Matrizen benötigt. Das ist ein Satz von 4×4 Matrizen γ^μ, die eine "Clifford-Algebra" bilden, d.h. sie erfüllen die Antikommutatorrelationen $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbf{1}$ mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Die Matrix γ_5 ist definiert als $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

a) Hinweis: Zeigen Sie vorab allgemein $Sp(AB) = \frac{1}{2} Sp(AB + BA)$.

b) Zeigen Sie: $Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$.

c) Zeigen Sie $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ für alle $\mu = 0, 1, 2, 3$ und $(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}$.

d) Zeigen Sie $Sp(\gamma^5) = 0$.