Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 12

Fragen zur Vorlesung:

75. Wie lautet die Lagrange-Dichte der Diractheorie? Erklären Sie die einzelnen Terme
76. Wie lautet die Dirac-Gleichung?
77. Welche Bedingungen müssen Gamma-Matrizen erfüllen?
78. Wie lautet das Paulische Fundamentaltheorem?
79. Nennen Sie ein paar beliebige Darstellungen der Gamma-Matrizen.
80. Bei gegebener Darstellung der Gamma-Matrizen, welche Form hat dann die entsprechende infinitesimale Darstellung der Lorentzgruppe?
81. Welche Form hat die allgemeine Lösung der Diracgleichung?
82. Wie wird das Diracfeld quantisiert? Warum?
83. Welchen Spin haben Diraceteilchen?
84. Wie kann ein elektromagnetisches Feld in die Diracgleichung eingekoppelt werden?
85. Was versteht man unter "minimaler Kopplung"?
86. Wie kann man von der Feldtheorie der Diracgleichung den Übergang zu einer Einteilchen-Wellengleichung motivieren? Wann darf man diesen Übergang machen?
87. Warum darf man Antiteilchen nicht mit der Diracgleichung behandeln bzw. welcher Gleichung müssten Antiteilchen genügen?
88. Skizzieren Sie den Zusammenhang zwischen Diracgleichung und Pauligleichung?
89. Welches ist der Ursprung der Spin-Bahn-Kopplung?

Aufgaben (zum Selbststudium, zur Vorbereitung auf die Klausur und/oder zum Erwerb eventuell noch fehlender Punkte. Freiwillige Abgabe bei Ihren Tutoren)

Aufgabe 23) Neutrinos 1 (6 Sonderpunkte)

Das Neutrino ist ein Teilchen mit Spin $1/2$ und sehr kleiner Ruhemasse. Nehmen Sie für diese Aufgabe die Ruhemasse $m = 0$ an.

- a) Stellen Sie die Diracgleichung für ein freies Neutrino auf.
- b) Bestimmen Sie die Lösungen der Diracgleichung zu gegebenem Impuls $\mathbf{p}$ in der chiralen Darstellung. Da die Masse Null ist, müssen Sie hier normieren wie bei Weyl-Teilchen.
- c) Wie gross ist die Gruppengeschwindigkeit?
- d) Stellen Sie die allgemeine Lösung auf und quantisieren Sie sie.

Lösungshinweis siehe Ende des Blattes.

Aufgabe 24) Neutrinos II (6 Sonderpunkte)

Betrachten Sie wieder wie in Aufgabe 23 Diraceteilchen mit Ruhemasse Null.

- Stellen Sie die Diracgleichung für ein freies Neutrino auf, diesmal explizit in **Standarddarstellung**.
- Lösen Sie die Gleichung für gegebenen Impuls $\mathbf{p}$. Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit.
- Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der Diracgleichung in Standarddarstellung. Quantisieren Sie sie analog 23 d)
- Stellen Sie den Stromoperator $J_\mu = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi$ durch Leiteroperatoren $a_{\mathbf{p},r}, b_{\mathbf{p},r}$ des Impulsraums dar. Beschränken Sie sich dabei auf den normalgeordneten Beitrag $: J_\mu :$ und vernachlässigen Sie schnell oszillierende Beiträge. Die oszillierenden Beiträge würden zu einer sogenannten "Zitterbewegung" führen. Argumentieren Sie, dass die Erwartungswerte dieser Beiträge in Fockzuständen mit fester Neutrinozahl verschwinden.

Eine Lösungsskizze (modulo Tippfehler etc.) finden Sie am Ende des Blattes. Um die 6 Sonderpunkte zu erhalten, müssen Sie das natürlich noch etwas ausarbeiten!

Aufgabe 25) Lagrangeformalismus (4 Sonderpunkte)

Leiten Sie ausgehend von der Lagrangedichte des Diracfeldes mit angekoppeltem elektromagnetischem Feld

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(-i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ die Wellengleichungen für ψ und $\bar{\psi}$ sowie die Maxwellgleichungen in Materie her.

Aufgabe 26) Ladungsoperator (6 Sonderpunkte)

- Verifizieren Sie für das Klein-Gordon-Feld die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu J^\mu = 0$ für $J_\mu = i(\Phi^* \partial_\mu \Phi - (\partial_\mu \Phi^*) \Phi)$.

Daraus folgt, dass die Ladung $Q = \int d\mathbf{r} J^0$ erhalten ist. Überprüfen Sie explizit für das komplexe Klein-Gordon Feld

$$: Q := \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}).$$

Hier bezeichnet $: A :$ den Operator A in Normalordnung.

- Verifizieren Sie für das Dirac-Feld die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu J^\mu = 0$ mit $J_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ und überprüfen Sie explizit

$$: Q := e \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{2p_0} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}})$$

Aufgabe 27) Energie-Impuls Operator (6 Sonderpunkte)

Betrachten Sie nun die andere wichtige Erhaltungsgröße, den Energie-Impuls-Vektor. Zur Erinnerung: In Ortsdarstellung lautet der Ausdruck (ohne Normalordnung) dafür $P^\mu = \int dr \mathcal{T}^{0\nu}$ mit

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \partial^\nu \Phi^* - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

a) Überprüfen Sie explizit für das komplexe Klein-Gordon Feld

$$: P^\mu := \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} k^\mu (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}})$$

b) Überprüfen Sie explizit für das Diracfeld

$$: P^\mu := \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{2p_0} p^\mu (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}})$$

Aufgabe 28) Wiederholung (keine Sonderpunkte)

Schauen Sie sich die bisherigen Aufgaben (ohne Zusatzaufgaben) noch einmal an.

Hinweise zur Klausur:

- Etwa ein Drittel der Klausur wird darin bestehen, dass Sie Wissensfragen beantworten müssen (eine Auswahl aus den Fragen 1-89).
- Etwa ein Drittel der Klausur werden alte Aufgaben sein, die Sie in den Übungen bereits gerechnet haben. Schon deshalb sollten Sie sich alle Aufgaben noch einmal gut anschauen!
- Sie dürfen ein selbstgestaltetes Blatt (DIN A4) mitbringen (idealerweise handbeschrieben, aber Leute mit Sauklaue dürfen auch einen Computer benutzen).
- Die Klausur ist am 25.2. um 9 Uhr im Lorentz-Raum mit Ausweichmöglichkeit Minkowski-Raum.

Lösungshinweis zu Aufgabe 23: In der chiralen Darstellung entkoppeln die ersten beiden und die letzten beiden Spinorkomponenten und Sie erhalten einfach wieder die Weylgleichungen. Für diese wurden alle Teilaufgaben in der Vorlesung bereits gelöst.

Und nun noch die Lösung von Aufgabe 24:

a) $i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ mit ϕ, χ Zweierspinoren und $H = c\vec{\alpha}\mathbf{p}$, wobei $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$.

(Notationen mit γ -Matrizen sind natürlich auch in Ordnung.)

b) Lösungsansatz: Ebene Welle $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et))$.

Lösung: $E^2 = (pc)^2$ und $\chi_0 = \pm \frac{c}{E}(\vec{\sigma}\mathbf{p})\phi_0$.

c) Allgemeine Lösung analog Weyl-Teilchen normiert:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \sum_{r=1,2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} (e^{-ipx} u_{\mathbf{p},r} a_{\mathbf{p},r} + e^{ipx} v_{\mathbf{p},r} b_{\mathbf{p},r}^+)$$

mit $u_{\mathbf{p},1} = \sqrt{p_0}(\phi_0^{(1)}, \chi_0^{(1)})$, $u_{\mathbf{p},2} = \sqrt{p_0}(\phi_0^{(2)}, \chi_0^{(2)})$, $v_{\mathbf{p},1} = \sqrt{p_0}(\phi_0^{(1)}, -\chi_0^{(1)})$, $v_{\mathbf{p},2} = \sqrt{p_0}(\phi_0^{(2)}, -\chi_0^{(2)})$, wobei $\phi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\chi_0^{(i)} = \frac{c}{E}(\vec{\sigma}\mathbf{p})\phi_0^{(i)}$.

d) Die Lösung für den normalgeordneten Stromoperator lautet.

$$: J_0 : = \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} (a_{\mathbf{p},r}^+ a_{\mathbf{p},r} - b_{\mathbf{p},r}^+ b_{\mathbf{p},r})$$

$$: J_i : = \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p_i}{2p_0^2} (a_{\mathbf{p},r}^+ a_{\mathbf{p},r} - b_{\mathbf{p},r}^+ b_{\mathbf{p},r}) + \text{oszillierende Beiträge.}$$

Die oszillierenden Beiträge in $: J_i :$ enthalten entweder zwei Aufsteige- oder zwei Absteige-Operatoren, deshalb müssen ihre Erwartungswerte in Fockzuständen verschwinden.