Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 2

Vorbemerkungen: Die Aufgaben müssen am Abgabetermin bis 13:00 Uhr im **Übungsbriefkasten Nummer 35** abgegeben werden (Staudingerweg 7, Erdgeschoss, rote Kästen). Um die Klausurzulassung zu erwerben, müssen Sie 50 % der Punkte erzielen. Auf jedes Blatt gibt es 12 Punkte.

Fragen zur Vorlesung:

10. Erklären Sie den Aharonov-Bohm Effekt?
11. Welche Auswirkungen haben Eichtransformationen auf das Pfadintegral?
12. Wie kann man Pfadintegrale in der statistischen Mechanik nutzen?
13. Erläutern Sie den quasiklassischen Grenzfall.

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 11.11.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 3) Elastische Streuung und Bornsche Näherung (8 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie man Pfadintegrale in der Störungstheorie einsetzen kann. In dieser Aufgabe sollen sie nun konkret verwendet werden, um Streuprozesse zu beschreiben.

- a) Zeigen Sie vorab, dass sich der Propagator eines freien Teilchens (Gleichung (1) aus Blatt 1) schreiben läßt als

$$G(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{i(\vec{p}\cdot(\vec{r}_f-\vec{r}_0) - \frac{p^2}{2m}(t_f-t_0))}. \quad (1)$$

- b) Betrachten Sie nun ein freies Teilchen, dass an einer lokal begrenzten Störung $V(\vec{r})$ gestreut wird. Zur Zeit $t_0 \rightarrow -\infty$ ist das Teilchen weit weg und kann durch eine ebene Welle beschrieben werden,

$$\psi(\vec{r}_0, t_0) = \psi_0(\vec{r}_0, t_0) := e^{i(\vec{p}_0\cdot\vec{r}_0 - E_0 t_0)} \quad \text{mit } E_0 = \frac{p_0^2}{2m} \quad (2)$$

Zur Zeit t_f ist die Wellenfunktion gegeben durch $\psi(\vec{r}_f, t) = \psi_0(\vec{r}_f, t) + \psi_{sc}(\vec{r}_f, t)$ mit $\psi_{sc}(\vec{r}_f, t) = \int d^3r [G(\vec{r}_f, t; \vec{r}, t) - G_0(\vec{r}_f, t; \vec{r}, t)] \psi(\vec{r}, t)$, wobei G_0 der Propagator des freien Teilchens ist und G der Propagator des vollen Systems inklusive der Störung.

Begründen Sie mit Hilfe des Pfadintegralformalismus die folgende Näherung:

$$\psi_{sc}(\vec{r}_f, t_f) = -\frac{i}{\hbar} \int d^3r_0 \int_{t_0}^{t_f} dt' \int d^3r' G_0(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}', t') V(\vec{r}') G_0(\vec{r}', t'; \vec{r}_0, t_0) \psi_0(\vec{r}_0, t_0) \quad (3)$$

c) Leiten Sie aus Gl. (1)-(3) für $t_0 \rightarrow -\infty$ die folgende Gleichung her:

$$\psi_{sc}(\vec{r}_f, t_f) = -e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t_f} \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' V(\vec{r}') e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{r}'} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 |\vec{r}_f - \vec{r}'|}}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} \quad (4)$$

Hinweise: ★ Ersetzen Sie $\int_{-\infty}^{t_f} dt' e^{\frac{i}{\hbar} t' A} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{t_f} dt' e^{\frac{i}{\hbar} t' A + \eta t'}$

★ Benutzen Sie $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \frac{1}{(p^2 - p_0^2) - i\epsilon} = 2\pi^2 \hbar \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 r}}{r}$

(Beweis hier nicht nötig, folgt aus dem Residuensatz).

d) Betrachten Sie nun konkret den Fall $r_f \gg r'$, d.h. $\vec{r}_f$ ist weit vom Störzentrum entfernt. Dann können Sie $|\vec{r}_f - \vec{r}'|$ nach r'/r_f entwickeln. Leiten Sie damit den folgenden genäherten Ausdruck her:

$$\psi_{sc}(\vec{r}_f, t_f) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 r_f - E_0 t_f)}}{r_f} f(\vec{p}, \vec{p}') \quad \text{mit } \vec{p}' = p_0 \frac{\vec{r}_f}{r_f} \quad (5)$$

und

$$f(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}' \cdot \vec{r}'} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (6)$$

Das ist die Bornsche Näherung in der Streutheorie.

Aufgabe 4) Zustandssumme des harmonischen Oszillators (4 Punkte)

- Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des eindimensionalen harmonischen Oszillators bei der Temperatur T mit Hilfe des Pfadintegralformalismus. Sie dürfen Gleichung (2) aus Blatt 1 verwenden.
- Bestimmen Sie die Zustandssumme auf konventionelle Art (über $\mathcal{Z} = \sum_n \exp(-\beta E_n)$) und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus a).