Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 3

Fragen zur Vorlesung:

14. Was sind Phononen?
15. Zählt man Phononen zu den Bosonen oder Fermionen? Warum?
16. Was versteht man unter dem Begriff Fockraum?
17. Was versteht man unter einer Lagrangedichte?
18. Wie kann man aus einer Lagrangedichte die Wirkung berechnen (nichtrelativistisch)?
19. Wie hängen Lagrangedichte und Hamiltondichte miteinander zusammen?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 18.11.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 5) Lineare Kette (6 Punkte)

Betrachten Sie wie in der Vorlesung eine lineare Kette aus N Teilchen der Masse M mit dem Potential $U = \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (x_{n+1} - x_n - a_0)^2$. Dieses Potential wird minimal, wenn $x_n = na_0 =: x_n^0$. Betrachten Sie Auslenkungen $\eta_n = x_n - na_0$ um diese Positionen. Randterme dürfen Sie vernachlässigen bzw. periodische Randbedingungen annehmen: $\eta_{N+1} = \eta_1, \eta_0 = \eta_N$.

- a) Zeigen Sie: Mit der Definition $\zeta_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-ik_l x_n^0} \eta_n$, $\Pi_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ik_l x_n^0} p_n$ mit $k_l = 2\pi l / (Na_0)$ kann man den Hamiltonoperator des Systems in die Form

$$H = \sum_l \frac{\Pi_l^+ \Pi_l}{2M} + \frac{M}{2} \sum_l \zeta_l \zeta_l^+ \omega_l^2$$

bringen. Berechnen Sie ω_l . Zeigen Sie weiterhin $\Pi_l^+ = \Pi_{-l}$, $\zeta_l^+ = \zeta_{-l}$. und beweisen Sie die Kommutatorrelation $[\zeta_l, \Pi_{l'}] = i\hbar \delta_{ll'}$

- b) Führen Sie für die Moden mit $\omega_l \neq 0$ in der üblichen Weise Leiteroperatoren a_l, a_l^+ ein und drücken Sie den Hamiltonoperator mit Hilfe dieser Leiteroperatoren aus.
- c) Berechnen Sie die Dynamische Entwicklung der Operatoren $a_l(t), a_l^+(t)$ im Heisenbergbild und leiten Sie daraus die Gleichungen für die Operatoren der Auslenkung $\eta_n(t)$ und des Impulses $p_n(t)$ des Teilchens n her.

Aufgabe 6) Kohärente Zustände (6 Punkte)

Ein kohärenter Zustand eines (eindimensionalen) harmonischen Oszillators ist definiert als Eigenvektor zum Vernichtungsoperator, $a|\Phi\rangle = \Phi|\Phi\rangle$, wobei Φ eine komplexe Zahl ist. Kohärente Zustände sind diejenigen Zustände, die am ehesten dem klassischen Bild eines harmonischen Oszillators entsprechen: Das Wellenpaket oszilliert ohne zu zerlaufen zwischen den zwei klassischen Wendepunkten hin und her.

- Zeigen Sie, daß der Vektor $|\Phi\rangle = e^{-|\Phi|^2/2} e^{a^+\Phi}|0\rangle$ einen kohärenten Zustand beschreibt. Zeigen Sie weiterhin, daß $|\Phi\rangle$ normiert ist. Berechnen Sie dazu die Koeffizienten von $|\Phi\rangle$ in Energiedarstellung $|\Phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. Zeigen Sie, dass $|c_n|^2$ Poissonverteilt ist. (Eine Zufallsvariable heisst Poissonverteilt, wenn $P(n) = \alpha^n e^{-\alpha}/n!$ gilt.)
- Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren $|\lambda(t)\rangle$ im Schrödingerbild auf und berechnen Sie damit die zeitliche Entwicklung von $\langle x \rangle$ im reinen kohärenten Zustand mit dem statistischen Operator $\rho = |\lambda\rangle\langle\lambda|$. Zeigen Sie, dass $\langle x \rangle$ sich wie ein klassischer harmonischer Oszillator verhält.
Hinweis: Drücken Sie x als Funktion von a und a^+ aus.
- Berechnen Sie $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ und $\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ als Funktion der Zeit. Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände nicht zerlaufen und der minimalen Unschärfe genügen, d.h. $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle = \hbar^2/4$.

Aufgabe Z1) Pfadintegral und Schrödingergleichung (4 Sonderpunkte)

Hier beginnt eine Reihe von Zusatzaufgaben, anhand derer Sie parallel zur Vorlesung lernen können, wie man Pfadintegrale für Quantenfeldtheorien konstruieren kann. Diese Aufgaben sind freiwillig und werden in den Tutorien nur auf Wunsch behandelt.

Zunächst bleiben wir beim Pfadintegral der Wellenmechanik eines Teilchens in einer Raumdimension. In der Vorlesung haben wir das Pfadintegral als alternativen Zugang zur Quantenmechanik motiviert und gezeigt, wie man daraus die Schrödingergleichung herleiten kann. Nun soll umgekehrt aus der normalen Formulierung der Quantenmechanik das Pfadintegral hergeleitet werden.

Ausgangspunkt ist der bekannte Ausdruck für den Propagator in Ortsdarstellung:

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | U(t_f - t_i) | x_i \rangle \text{ mit } U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H t) \text{ und } H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

- Für beliebige beschränkte Operatoren A und B gilt die Trotter-Suzuki-Zerlegung $\exp(A + B) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(\frac{A}{n}) \exp(\frac{B}{n}))^n$. Leiten Sie daraus folgende Gleichung her:

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int dx_1 \cdots dx_{n-1} \int \int dp_1 \cdots dp_n \langle x_f | p_1 \rangle \langle p_1 | x_1 \rangle \langle x_1 | p_2 \rangle \cdots \langle p_n | x_i \rangle \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i)\right)\right) \quad (1)$$

- Leiten Sie aus Gl. (1) durch Integration über die p_i den Ausdruck aus der Vorlesung für das Pfadintegral her.