Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 4

Fragen zur Vorlesung:

20. Wie kann man den Fock-Raum konstruieren für Systeme identischer Bosonen? Systeme identischer Fermionen?
21. Welche Vertauschungsrelationen erfüllen die Leiteroperatoren im Falle von Bosonen? von Fermionen?
22. Was passiert beim Wechsel der Einteilchenbasis?
23. Wie werden Observablen im Fockraum dargestellt? Welche Form hat diese Darstellung konkret im Fall von Einteilchenobservablen? von Zweiteilchenobservablen?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 25.11.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 7) Fockraum in Impulsdarstellung (6 Punkte)

Eine gern benutzte Einteilchenbasis bei der Konstruktion des Fockraums sind die Impulseigenfunktionen. Im Volumen $V = L_x L_y L_z$ seien sie gegeben durch

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}/\sqrt{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} = 2\pi\left(\frac{n_x}{L_x}, \frac{n_y}{L_y}, \frac{n_z}{L_z}\right).$$

- a) Stellen Sie die Orthogonalitäts- und die Vollständigkeitsrelation für diese Basis auf
- b) Zeigen Sie: In Impulsdarstellung ist der Hamiltonoperator eines Systems mit Paarwechselwirkungen $H = \sum_{\text{Teilchen } \alpha} \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mathcal{V}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)$ gegeben durch

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2M} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}} \mathcal{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}},$$

wobei $a_{\mathbf{k}}^+$ der Aufsteigeoperator zum Einteilchenzustand $\phi_{\mathbf{k}}$ ist und $V_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$.

- c) Angenommen, die Teilchen seien zusätzlich noch einem externen Potential $U(\mathbf{x})$ unterworfen. Wie lautet der entsprechende Beitrag zum Hamiltonoperator?
- d) Zeigen Sie, daß die Fouriertransformation des Dichteoperators $n(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha})$ im Impulsraum gegeben ist durch $n_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$.

Aufgabe 8) Vielteilchensystem im harmonischen Potential (6 Punkte)

Betrachten Sie ein System nichtwechselwirkender identischer Teilchen der Masse m in einer Dimension im Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Etwaige Spinfreiheitsgrade können Sie ignorieren – bzw. annehmen, dass alle Teilchen die gleiche Spinquantenzahl haben.

- Nutzen Sie als Einteilchenbasis die Eigenfunktionen des Einteilchen-Hamiltonoperators und konstruieren Sie daraus den Fockraum. Welche Form haben die Basisvektoren des Fockraums für Fermionen und für Bosonen?
- In der großkanonischen Gesamtheit ist die Teilchenzahl variabel und der statistische Operator ist gegeben durch $\rho = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\beta(H - \mu N))$ mit $\mathcal{Z} = \text{Sp}(\exp(-\beta(H - \mu N)))$, wobei N der Operator der Teilchenzahl ist, β die inverse Temperatur und μ das chemische Potential. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Teilchenzahl sich demnach aus $\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z}$ ergibt. (Sie wissen das natürlich schon aus Theorie 4).
- Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ für Fermionen und Bosonen. Sie erhalten zunächst einmal eine (einfache) unendliche Summe.
- Betrachten Sie nun konkret $\mu = 0$ und diskutieren Sie die Grenzfälle $\beta\hbar\omega \ll 1$ und $\beta\hbar\omega \gg 1$. Welches System enthält mehr Teilchen? In welchem System ist der Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen ausgeprägter?

Hinweis: In einem der beiden Grenzfälle dürfen Sie die Summe durch ein Integral ersetzen.

Aufgabe Z2) Kohärente Zustände II (6 Sonderpunkte)

In Aufgabe 6 haben Sie die kohärenten Zustände $|\Phi\rangle = \exp(-|\Phi|^2/2) \exp(\Phi a^+) |0\rangle$ kennengelernt. Nun sollen weitere mathematische Eigenschaften dieser Zustände untersucht werden.

- Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände eine Vollständigkeitsrelation erfüllen:

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\Phi |\Phi\rangle\langle\Phi|.$$

Hier geht das Integral $\int d^2\Phi$ über die gesamte komplexe Ebene ($d^2\Phi = d(\Re\Phi)d(\Im\Phi)$).

Hinweis: Benutzen Sie die Polardarstellung für Φ .

- In Aufgabe 6a) haben Sie gezeigt: $a|\Phi\rangle = \Phi|\Phi\rangle$.
Zeigen Sie nun analog: $a^+|\tilde{\Phi}\rangle = \frac{\partial}{\partial\tilde{\Phi}}|\tilde{\Phi}\rangle$ mit $|\tilde{\Phi}\rangle = \exp(\Phi a^+) |0\rangle$.
- Ein Operator $A(a^+, a)$ heißt normalgeordnet, wenn alle Erzeuger a^+ links stehen und aller Vernichter a rechts. Zeigen Sie: Für beliebige normalgeordnete Operatoren $A(a^+, a)$ gilt: $\langle\Phi|A|\Phi'\rangle = A(\Phi^*, \Phi') \langle\Phi|\Phi'\rangle$, wobei $A(\Phi^*, \Phi')$ aus $A(a^+, a)$ durch die formale Ersetzung $a \rightarrow \Phi'$, $a^+ \rightarrow \Phi^*$ hervorgeht (Φ^* ist die Komplexkonjugierte zu Φ). Berechnen Sie $\langle\Phi|\Phi'\rangle$.