Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 5

Fragen zur Vorlesung:

24. Was versteht man unter Feldoperatoren?
25. Welche Vertauschungsrelationen erfüllen die Feldoperatoren für Bosonen? für Fermionen?
26. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung in Feldoperatorform? Erläutern Sie die einzelnen Beiträge.
27. Wie lautet die Lagrange-Funktion für Vielteilchensysteme mit maximal Zweiteilchenwechselwirkungen? Erläutern Sie die einzelnen Terme.

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 2.12.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 9) Feldoperatoren (6 Punkte)

- a) Der Operator für die Stromdichte eines Vielteilchensystems ist gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{p}_{\alpha}}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) \frac{\mathbf{p}_{\alpha}}{m} \right),$$

wobei die Summe α über alle Teilchen geht. Berechnen Sie die Feldoperatorform für diesen Operator. Das Ergebnis lautet

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^+(\mathbf{x}) (\nabla \psi(\mathbf{x})) - (\nabla \psi^+(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) \right).$$

- b) Zeigen Sie, daß der Zustand $|\phi\rangle = \psi^+(\mathbf{x}')|0\rangle$ ein Teilchen mit der Position $\mathbf{x}'$ beschreibt, indem Sie die Relation $n(\mathbf{x})|\phi\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')|\phi\rangle$ verifizieren.

Aufgabe 10) Teilchen mit Spin (6 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N ununterscheidbaren Teilchen mit Spin $1/2$.

- a) Wie muß man in diesem Fall den Fock-Raum (z. B. in Impulsdarstellung) konstruieren?
- b) Der Spin-Dichte-Operator ist gegeben durch $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}) \mathbf{S}_{\alpha}$, wobei die Summe α über alle Teilchen geht. Wie lautet seine Feldoperatorform? Führen Sie dazu als Feldoperatoren die Operatoren $\psi_s^{\pm}(\mathbf{x})$ ein, die ein Teilchen mit Spin s am Ort $\mathbf{x}$ erzeugen.

Aufgabe Z3) Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie (8 Sonderpunkte)

Mit Hilfe der kohärenten Zustände aus Aufgabe 6) und Z2) kann ein Pfadintegralformalismus für Felder entwickelt werden. Sie sollen das nun durchexerzieren anhand eines einfachen bosonischen Systems mit nur einem Freiheitsgrad – d.h. des Fockraums für einen einfachen Oszillator.

Der Hamiltonoperator des Systems $H(a^+, a)$ sei bereits in normalgeordneter Form gegeben (Erzeuger a^+ links, Vernichter a rechts). Wir interessieren uns für Propagatoren der Form $G_{fi}(T) := \langle \psi_f | \exp(-\frac{i}{\hbar}HT) | \psi_i \rangle$, wobei $|\psi_f\rangle$ und $|\psi_i\rangle$ beliebige Zustandsvektoren sind.

a) Zeigen Sie die Relation

$$G_{fi}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d^2\Phi_n \cdots \int d^2\Phi_0 \psi_f^*(\Phi_n) \psi_i(\Phi_0^*) e^{\frac{1}{2}(|\Phi_n|^2 - |\Phi_0|^2)} \times \exp\left(-\sum_{j=1}^n (\Phi_j^*(\Phi_j - \Phi_{j-1}) + \frac{i}{\hbar} \Delta t H(\Phi_j^*, \Phi_{j-1}))\right) \quad (1)$$

mit $\Delta t = T/n$ und $\psi(\Phi_i^*) := \langle \Phi_i | \psi \rangle$. Die $|\Phi_i\rangle$ sind die normierten kohärenten Zustände aus Aufgabe 3).

Hinweis: Verwenden Sie

- Die Zerlegung $\exp(-\frac{i}{\hbar}HT) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}H \Delta t)^n$.
- Die Vollständigkeitsrelation für kohärente Zustände aus Aufgabe Z2 a).
- Aufgabe Z2 c). Es gilt $\langle \Phi | \Phi' \rangle = \exp(-\Phi^*(\Phi - \Phi') + \frac{1}{2}(|\Phi|^2 - |\Phi'|^2))$.

b) Nehmen Sie in Gleichung (1) den Kontinuumsliches $\{\Phi_j\} \rightarrow \Phi(t)$ mit $t \in [0 : T]$ und zeigen Sie

$$G_{fi}(T) = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \psi_f^*(\Phi_n) \psi_i(\Phi_0^*) e^{\frac{1}{2}(|\Phi_n|^2 - |\Phi_0|^2)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\Phi^*, \Phi]\right) \quad (2)$$

mit der Wirkung $S[\Phi^*, \Phi] = \int_0^T dt L(\Phi^*, \Phi)$ und der Lagrangefunktion

$$L = i\hbar \Phi^* \partial_t \Phi - H(\Phi^*, \Phi).$$

Hier steht $\int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^*$ für $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n (\frac{1}{\pi})^{n+1} \int d^2\Phi(t_j)$ mit $t_j = j * T/n$.

Mit Gleichung (2) haben Sie den Propagator $G_{fi}(T)$ als Integral über "Pfade" $\Phi(t)$ von fluktuierenden komplexen "Feldvariablen" Φ dargestellt. In dieser Form läßt sich der Formalismus auch auf räumlich variable bosonische Felder $\Phi(\vec{r}, t)$ erweitern. (Die Wirkung wird dann als vierdimensionales Integral über eine klassische Lagrangedichte berechnet).

c) Welche Schwierigkeiten treten auf, wenn man diesen Formalismus auf Fermionen übertragen will?