Institut für Physik WS 2015/2016

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 6

Fragen zur Vorlesung:

28. Erläutern Sie das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation
29. Welche Symmetrie ist im Bose-Einstein-Kondensat gebrochen?
30. Wie könnte man einen lokalen "Ordnungsparameter" für das Bose-Einstein-Kondensat definieren?
31. Wie lautet der Hamiltonoperator eine Systems wechselwirkender Teilchen mit Kontaktwechselwirkungen in Impulsdarstellung?
32. Welche Form hat die Dispersionsrelation für Bose-Einstein-Kondensate? Wie verhält sie sich im Limes kleiner und großer Wellenzahlen? Wie kann man das interpretieren?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 9.12.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 11) Bogoliubov-Transformation (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Bosonensystem mit dem Hamiltonoperator

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} (\epsilon(\mathbf{k}) + \mu) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{\mu}{2}(a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+ + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}).$$

a) Zeigen Sie, dass man mittels der Vorschrift

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \alpha\, b_{\mathbf{k}} + \beta^*\, b_{-\mathbf{k}}^+ \\ a_{\mathbf{k}}^+ &= \beta\, b_{-\mathbf{k}} + \alpha^*\, b_{\mathbf{k}}^+ \end{aligned}$$

Leiteroperatoren $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^+$ konstruieren kann, die die kanonischen Vertauschungsrelationen $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ und $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{k}'}^+] = 0$ erfüllen. Welche Bedingung müssen α und β dafür erfüllen?

b) Machen Sie nun den Ansatz

$$\alpha = \cosh\theta, \qquad \beta = \sinh\theta.$$

Warum dürfen Sie das tun? Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator H sich mit diesem Ansatz in die Form

$$H = E_0' + \sum_{\mathbf{k}\neq \mathbf{0}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}\, E_{\mathbf{k}}$$

bringen läßt und berechnen Sie $E_{\mathbf{k}}$. (Das Ergebnis kennen Sie aus der Vorlesung).

Aufgabe 12) Leiteroperatoren für Fermionen (4 Punkte)

Zeigen Sie für Fermi-Operatoren die folgenden Relationen:

a) $\mathrm{e}^{-\alpha a^+} a \mathrm{e}^{\alpha a^+} = a - \alpha^2 a^+ + \alpha(aa^+ - a^+ a)$
$\mathrm{e}^{-\alpha a} a^+ \mathrm{e}^{\alpha a} = a^+ - \alpha^2 a - \alpha(aa^+ - a^+ a)$

b) $\mathrm{e}^{\alpha a^+ a} a \mathrm{e}^{-\alpha a^+ a} = \mathrm{e}^{-\alpha} a$ und $\mathrm{e}^{\alpha a^+ a} a^+ \mathrm{e}^{-\alpha a^+ a} = \mathrm{e}^{-\alpha} a^+$

Aufgabe Z4) Fermionische kohärente Zustände und Grassmann Variablen
(6 Sonderpunkte)

Betrachten Sie einen "fermionischen" harmonischen Oszillator, d. h. einen harmonischen Oszillator, dessen Erzeugungsoperator a und Vernichtungsoperator a^+ den fermionischen Antikommutatorrelationen genügen.

a) Versuchen Sie, fermionische kohärente Zustände (d.h. Eigenzustände des Vernichtungsoperators) zu konstruieren. Zeigen Sie, dass das nicht geht, wenn die Entwicklungskoeffizienten im Fock-Raum gewöhnliche komplexe Zahlen sind.

b) Führen Sie nun sogenannte Grassmann-Variablen ein: Das sind linear unabhängige, antikommutierende Symbole ξ_i (d.h. $\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0$). Zusätzlich sollen sie mit a und a^+ antikommutieren. Konstruieren Sie damit fermionische kohärente Zustände $|\xi\rangle$.

c) Zeigen Sie, daß $|\xi\rangle$ in die Form $|\xi\rangle = e^{a^+ \xi}|0\rangle$ gebracht werden kann.

d) Zeigen Sie $\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = e^{\xi_1^* \xi_2}$.