

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 7

Fragen zur Vorlesung:

33. Was ist "Jellium"?
34. Was versteht man unter Fermikugel? Fermiwellenzahl? Fermiwellenenergie?
35. Wie hängt die Fermiwellenzahl mit der Dichte eines Elektronengases zusammen?
36. Skizzieren Sie die Paarverteilungsfunktion für freie, nichtwechselwirkende Elektronen mit verschiedenen Spins und mit gleichen Spins. Erläutern Sie Ihre Skizze.
37. Wie sehen Einteilchenanregungen im Falle von freien Elektronen aus?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 16.12.2015 im Kasten 35)

Aufgabe 13) Wechselwirkungsfreie Fermionen (6 Punkte)

Berechnen Sie die statische Strukturfunktion für wechselwirkungsfreie freie Fermionen im Grundzustand $|\Phi_0\rangle$.

$$S^0(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \langle \Phi_0 | n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} | \Phi_0 \rangle$$

wobei $n_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} a_{\mathbf{k}, \sigma}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}$

der Teilchendichteoperator in Impulsdarstellung ist. Betrachten Sie die Fälle $\mathbf{q} = 0$ und $\mathbf{q} \neq 0$ getrennt. Führen Sie den Kontinuumsimes im k -Raum durch (d.h. $\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k f(\vec{k})$), um eine explizite Lösung zu erhalten.

Aufgabe 14) Integrale zum Elektronengas I (6 Punkte)

Gegeben sei ein Elektronengas von N Elektronen im Volumen V im Grundzustand. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden, in der Vorlesung verwendeten Relationen – hier ist k_F die Fermi-Wellenzahl und $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m = \epsilon_F$ die zugehörige Fermi-Energie.

$$\text{a) } 2V \int_{k < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = N$$

$$\text{b) } 2V \int_{k < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

$$\text{c) } V \int_{k < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{q < k_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} = \frac{3}{(4\pi)^2} k_F N$$

Hinweis: Sie können z.B. den Faltungssatz verwenden:

$$V \int_{k < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{q < k_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} g(\vec{q}) g(\vec{k}) f(\vec{k} - \vec{q}) = \frac{1}{V} \int d^3 r g(\vec{r})^2 f(\vec{r}),$$

wobei die Fourier-Transformation über $g(\vec{r}) = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} g(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ etc. definiert ist.

Aufgabe Z5) Fermionische kohärente Zustände II (6 Sonderpunkte)

In Aufgabe Z4 haben Sie die “Grassmann-Variablen” kennengelernt. Mit Grassmann-Variablen kann man Pfadintegralformulierungen für fermionische Felder konstruieren. In dieser Aufgabe sollen Sie sie noch etwas besser kennenlernen.

Formal führt man Grassmann-Variablen ein als antikommutierende Symbole ξ_i , mit denen auf dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen eine Algebra konstruiert wird. Elemente A dieser Algebra haben die Form $A = a + a_i \xi_i + a_{ij} \xi_i \xi_j + a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k \dots$, wobei ξ_i Grassmann-Variablen sind und $a_{i,j,\dots}$ Zahlen aus dem darunterliegenden Körper.

Für diese Algebra definiert man formal eine “Integration” als lineare Abbildung von der Algebra zum darunterliegenden Körper mit der Eigenschaft:

$$\int d\xi_N d\xi_{N-1} \dots d\xi_1 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_N = 1$$

Wenn eines der ξ_i im “Integranden” von $\int d\xi_N \dots d\xi_1 \dots$ fehlt, wird das “Integral” Null gesetzt.

a) Zeigen Sie $\int d\xi d\xi^* \exp(\xi^* a \xi) = a$.

b) Verallgemeinern Sie dieses Ergebnis zu

$$\int d[\xi] d[\xi^*] \exp\left(\sum_{ij} \xi_i^* a_{ij} \xi_j\right) = \det a \quad (1)$$

mit der Notation $\int d[\xi] d[\xi^*] = d\xi_N d\xi_N^* \dots d\xi_1 d\xi_1^*$.

c) Beweisen Sie für die kohärenten Zustände aus Aufgabe Z4 die Vollständigkeitsrelation

$$\int d\xi^* d\xi \exp(-\xi^* \xi) |\xi\rangle \langle \xi| = 1 \quad (2)$$