Institut für Physik WS 2015/2016

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie 5 (Quantenmechanik II)

Blatt 9

Fragen zur Vorlesung:

43. Wie lauten die Maxwellgleichungen?
44. Wie lautet der Zusammenhang zwischen (Vektor)potential und elektromagnetischen Feldern?
45. Worin besteht die Coulomb-Eichung? Warum wird sie in der nichtrelativistischen Quantenoptik gerne verwendet?
46. Was besagt die Transversalitätsbedingung bei freien Strahlungsfeldern? Woher kommt sie?
47. Wie lautet die allgemeine Lösung der Wellengleichung für freie Strahlungsfelder?
48. Wie wird diese allgemeine Lösung quantisiert?
49. Was ist der Casimir-Effekt und woher kommt er?
50. Wie beschreibt man linear zirkularisierte, zirkular polarisierte Photonen?
51. Wie kommt man darauf, dass Photonen Spin 1 haben?
52. Was sind kohärente Lichtzustände? Warum sind sie wichtig?
53. Was versteht man unter "nichtklassischem" Licht?
54. Erläutern Sie die Unschärferelation für Amplitude und Phase von Licht.
55. Warum werden masselose Bosonen eher als Felder wahrgenommen, und massive Fermionen eher als Teilchen?

Aufgaben (Abgabe bis 13:00 am 13.1.2016 im Kasten 35)

Aufgabe 17) Kommutatorrelation des elektromagnetischen Feldes (4 Punkte)

In der Vorlesung haben wir den folgenden Ausdruck für den Feldoperator des Vektorpotentials des freien elektromagnetischen Feldes hergeleitet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k},\alpha} c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k},\alpha}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + a^{+}_{\mathbf{k},\alpha}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})\vec{\epsilon}_{\mathbf{k},\alpha}$$

Dabei sind a, a^+ Leiteroperatoren und $\vec{\epsilon}$ die normierten Polarisationsvektoren der Felder.

(a) Leiten Sie die Feldoperatorausdrücke für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ her.

(b) Zeigen Sie die Kommutatorrelation für freie elektromagnetische Felder

$$[E_x(\mathbf{r},t), B_y(\mathbf{r}',t)] = -4\pi i\, \hbar\, c\, \frac{\partial}{\partial z}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Aufgabe 18) Casimir-Effekt (8 Punkte)

Mit Casimir-Effekt bezeichnet man den quantenmechanischen Effekt, dass zwischen zwei parallelen leitfähigen Platten im Vakuum eine Kraft wirkt. Sie kommt dadurch zustande, dass wegen der Randbedingungen das Spektrum der elektromagnetischen Eigenmoden und damit die Vakuumenergie vom Abstand der Platten abhängt. In dieser Aufgabe sollen Sie die Casimirkraft berechnen.

Betrachten Sie dazu zwei planparallele, ideal leitende Platten der Seitenlänge $L \to \infty$ im Abstand D. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die z-Richtung senkrecht zu den Platten ist. In (x, y)-Richtung können Sie periodische Randbedingungen annehmen.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenmoden des elektromagnetischen Feldes zwischen den Platten haben Wellenvektoren $\vec{k}$ mit $k_{x,y} = \frac{2\pi}{L} m_{x,y}$, $k_z = \frac{\pi}{D} n$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Für $k_z \neq 0$ gibt es zwei unabhängige Polarisationsrichtungen α, für $k_z = 0$ nur eine.

(b) Berechnen Sie die Vakuumenergie pro Volumen $e_0 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$ (mit $\omega_{\mathbf{k}} = c|\vec{k}|$). Ersetzen Sie in Raumrichtungen mit unendlicher Ausdehnung $L \to \infty$ die Summen $\frac{1}{L} \sum_{k_\beta} \cdots \to \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k_\beta \cdots$. Nach einigen Umformungen erhalten Sie

$$e_0 = \frac{\hbar c \pi^2}{8D^4} \left(F(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \right) \quad \text{mit} \quad F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \mathrm{d}\tau \, \sqrt{\tau}. \tag{1}$$

Die Integrale divergieren. Lassen Sie sich davon vorerst nicht stören.

Hinweis: Substituieren Sie $\tau = n^2 + (D/\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2)$.

(c) Berechnen Sie nun zum Vergleich die Energiedichte e_{ref} in einem unbegrenzten System (Volumen $V = L^3$). Nach geeigneter Substitution $\tau = \eta^2 + (D/\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2)$ erhält man einen zu (1) formal ähnlichen Ausdruck: $e_{\mathrm{ref}} = \frac{\hbar c \pi^2}{4D^4} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta \, F(\eta)$.

(d) Für Wellenvektoren von der Ordnung inverser atomarer Abstände wird die Näherung ideal leitender Platten unphysikalisch. Nehmen Sie daher an, daß der Integrand in $F(n)$ zusätzlich einen Cutoff enthält, der dafür sorgt, daß $F(n) \to 0$ für $n \to \infty$. Betrachten Sie die Differenz ΔE der Energie eines Systems mit und ohne begrenzenden Platten. Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Maclaurin-Formel

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) - \int_0^N F(\eta) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}(F(N) - F(0)) + \frac{1}{12}(F'(N) - F'(0)) + \frac{1}{720}(F'''(N) - F'''(0)) + \ldots$$

daß diese Casimirenergie pro Plattenfläche unabhängig von der Form des Cutoffs durch

$$\frac{\Delta E}{L^2} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 D^3}$$

gegeben ist.

Berechnen Sie die daraus resultierende Anziehungskraft zwischen den Platten.