

Vorlesung Theoretische Mechanik

Version vom WS 2014/2015*

Universität Mainz
Institut für Physik
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Inhalt: Newtonsche Mechanik

- Die Newtonschen Axiome
- Bezugssysteme
- Energie und Potential
- Erhaltungssätze und Symmetrien
- Anwendung: Das Zweikörperproblem

Lagrange-Mechanik

- Zwangsbedingungen und Zwangskräfte
- Lagrange-Gleichungen erster Art
- Invarianzen und Erhaltungsgrößen
- Das Hamiltonsche Prinzip
- Verallgemeinerte Lagrange-Formalismen

Starre Körper

- Kinematik: Beschreibung der Bewegung
- Dynamische Größen und Trägheitstensor
- Bewegungsgleichungen und Kreiseltheorie

Hamiltonsche Mechanik

- Generalisierter Impuls
- Legendre-Transformation und Hamilton-Funktion
- Poisson-Klammern
- Kanonische Transformationen
- Der Liouville-Satz
- Die symplektische Struktur des Phasenraums
- Anwendung: Kleine Schwingungen
- Ausblick: Ein Ausflug ins Hamiltonsche Chaos

Grundbegriffe der Hydrodynamik

*Elektronisch: Letzte Änderung am 24.11.16

[†]Staudingerweg 9, 03-534, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

© Copyright 2014 Friederike Schmid

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang usw.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
1 Newtonsche Mechanik	5
1.1 Die Newtonschen Axiome	5
1.1.1 Wortlaut (übersetzt)	5
1.1.2 Präzisierung der kinematischen Begriffe	5
1.1.3 Diskussion der Postulate	7
1.2 Beispiele: Anwendungen des Kraftgesetzes	10
1.2.1 Freier Fall im homogenen Schwerfeld	10
1.2.2 Freier Fall im homogenen Schwerfeld mit Reibung	10
1.2.3 Pendel	11
1.3 Bezugssysteme	13
1.3.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformation	13
1.3.2 Rotierende Bezugssysteme	14
1.3.3 Beliebige beschleunigte Bezugssysteme	16
1.4 Energie und Potential	17
1.4.1 Potentielle Energie	17
1.4.2 Kinetische Energie	20
1.4.3 Weitere Begriffe	21
1.5 Erhaltungssätze und Symmetrien	22
1.5.1 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung	23
1.5.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung	23
1.5.3 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung	24
1.5.4 Skaleninvarianz und Virialsatz	25
1.5.5 Beispiele für Anwendungen von Symmetrieprinzipien	26
1.6 Zusammenfassung: Newtonsche Mechanik	27
1.7 Anwendung: Das Zweikörperproblem	28
1.7.1 Reduktion auf ein eindimensionales Problem	28
1.7.2 Das Kepler-Problem	31
1.7.3 Elastische Streuung von Teilchen	34
1.8 Wissensfragen	38
2 Lagrange-Mechanik	41
2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte	42
2.1.1 Klassifizierung von Zwangsbedingungen	42
2.1.2 Zwangskräfte	42

2.1.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	43
2.1.4	d'Alembertsches Prinzip	43
2.2	Lagrange-Gleichungen erster Art	43
2.2.1	Allgemein	43
2.2.2	Beispiele	44
2.3	Lagrange-Gleichungen zweiter Art	45
2.3.1	Generalisierte Koordinaten	46
2.3.2	Generalisierte Kräfte	46
2.3.3	Generalisiertes Prinzip der virtuellen Verrückungen	46
2.3.4	d'Alembertsches Prinzip und Bewegungsgleichungen . . .	46
2.3.5	Beispiele	47
2.4	Invarianzen und Erhaltungsgrößen	48
2.4.1	Zyklische Variablen	48
2.4.2	Zeitunabhängigkeit	48
2.4.3	Der Satz von Emmy Noether	49
2.5	Das Hamiltonsche Prinzip	50
2.5.1	Das Prinzip	50
2.5.2	Hamilton-Prinzip mit zusätzlichen Zwangsbedingungen .	51
2.6	Verallgemeinerte Lagrange-Formalismen	52
2.6.1	Teilchen im elektromagnetischen Feld	52
2.6.2	Reibung und Dissipationsfunktion	53
2.7	Zusammenfassung: Lagrange-Mechanik	54
2.8	Wissensfragen	55
3	Starre Körper	57
3.1	Beschreibung der Bewegung (Kinematik)	57
3.1.1	Charakterisierung des Körpers	57
3.1.2	Beschreibung des momentanen Zustandes	58
3.1.3	Beschreibung der Bewegung	59
3.2	Dynamische Größen	59
3.2.1	Impuls	59
3.2.2	Drehimpuls	60
3.2.3	Kinetische Energie	60
3.3	Der Trägheitstensor	61
3.3.1	Definition	61
3.3.2	Zusammenhang mit Trägheitsmoment	61
3.3.3	Beispiel: Trägheitstensor des Zylinders	62
3.3.4	Physikalische Skalare, Vektoren, Tensoren	63
3.3.5	Hauptachsentransformation	64
3.3.6	Zusammenfassung und Folgerungen	65
3.4	Dynamik und Bewegungsgleichungen	66
3.4.1	Zugang direkt über Kräfte	66
3.4.2	Zugang über Lagrange-Funktion	68
3.5	Wissensfragen	70

4	Hamiltonsche Mechanik	71
4.1	Generalisierter Impuls	72
4.2	Hamilton-Funktion	72
4.2.1	Vorbemerkung: Legendre-Transformation	73
4.2.2	Anwendung auf Lagrange-Funktion	73
4.2.3	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	74
4.2.4	Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip	75
4.3	Poisson-Klammern	76
4.3.1	Definition	76
4.3.2	Bedeutung und Eigenschaften der Poissonklammer	76
4.3.3	Beispiele für Poissonklammern	77
4.4	Kanonische Transformationen	77
4.4.1	Definition und einfache Beispiele	77
4.4.2	Elementare Eigenschaften	78
4.4.3	Konstruktion kanonischer Transformationen	79
4.4.4	Der Hamilton-Jacobi Formalismus	80
4.5	Der Phasenraum	82
4.5.1	Der Liouville-Satz	82
4.5.2	Hintergrund: Symplektische Struktur des Phasenraums	84
4.6	Zusammenfassung: Hamiltonsche Mechanik	86
4.7	Anwendung: Kleine Schwingungen	87
4.7.1	Lineare Näherung	87
4.7.2	Normalmodenzerlegung	87
4.7.3	Lösung im Hamilton-Jacobi Formalismus	88
4.7.4	Zusammenfassung: Kleine Schwingungen	88
4.8	Ausblick: Ein Ausflug ins Hamiltonsche Chaos	89
4.8.1	Identifizierung von Chaos	90
4.8.2	Eigenarten von Hamiltonschem Chaos	90
4.8.3	Integrable Systeme	91
4.8.4	Kleine Störungen und KAM-Theorem	92
4.9	Wissensfragen	95
5	Grundbegriffe der Hydrodynamik	97
5.1	Fluide und Kontinuumsannahme	97
5.2	Kinematik der Fluide	99
5.3	Dynamik: Bewegungsgleichungen für Fluide	100
5.3.1	Kräfte in allgemeinen Flüssigkeiten	100
5.3.2	Spannungstensor und Deformationstensor	101
5.3.3	Ideale Flüssigkeiten und Euler-Gleichungen	103
5.3.4	Newtonsche Flüssigkeiten und Navier-Stokes Gleichungen	103
5.4	Ideale Flüssigkeiten	105
5.4.1	Bernoulli-Funktion und Bernoulli-Gleichung	105
5.4.2	Wirbel- und Zirkulationserhaltung	106
5.4.3	Zugkraft und Auftrieb	107

Vorbemerkungen

„Theoretische Mechanik“: Erste Vorlesung aus Zyklus „Theoretische Physik“, bestehend aus:

- Mechanik (diese Vorlesung)
- Elektrodynamik
- Quantenmechanik
- Thermodynamik und Statistische Physik
- Höhere Quantenmechanik (nicht mehr verpflichtend; evtl. Master)
- Höhere Statistische Physik (nicht mehr verpflichtend; Master)

Frage: Was sollen Sie dort lernen?

Oder: Was ist „theoretische Physik“? Warum extra Vorlesungen dafür?

Generell: Unterscheidung „Physik“ und „theoretische Physik“ ist unglücklich.

Besser: Vertiefte Beschäftigung mit Grundthemen der Physik auf der Basis der mittlerweile erworbenen mathematischen Kenntnisse

Also nächste Frage: Warum ist Mathematik so wichtig?

Dazu grundsätzlicher: „Was ist eigentlich Physik?“

Nach Friedrich Hund („Grundbegriffe der Physik“):

„Die Physik ist die Lehre von solchen Dingen der Wirklichkeit, bei denen man hoffen darf, dass sie auf Grund weniger Prinzipien in Gedanken nachkonstruiert werden können.“

(NB: Wäre auch heute noch die aktuellste Definition von Physik. Umfasst moderne, interdisziplinäre Gebiete wie Econophysics etc.)

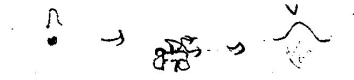
„Grunderfahrung“ in der Physik:

Die Sprache der Physik ist die Mathematik
oder (Jeans) „The great architect seems to be a mathematician“

→ macht die Faszination aus, die für viele von der Physik ausgeht:
Warum kann die Natur so gut rechnen?

Es gibt Bereiche, in denen die Bedeutung der Mathematik nachvollziehbar ist:
Vielteilchensysteme

z.B. Diffusion:



Gesamtdichtevertelung → ergibt sich aus Mittelung über alle möglichen Wege, die einzelne Partikel nehmen

Falls Anfangsverteilung „punktförmig“, erhält man eine sich verbreiternde Gaußverteilung $\varrho(\vec{r}, t) \propto e^{-r^2/4Dt}$ (D =Diffusionskonstante), unabhängig davon, wie sich Partikel im einzelnen bewegen

Allgemeiner: Diffusionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) = D \Delta \varrho(\vec{r}, t)$

Jedoch: Mathematik beschreibt auch die fundamentalen Naturgesetze, und das ist sehr viel erstaunlicher.

z.B. Gravitationsgesetz $F_{12} = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$

NB: Gravitationsgesetz lässt sich auch in lokale Form bringen:

$\vec{F} = \vec{\nabla} U$; (U =Potential)

$\Delta U = 0$ fast überall, $\Delta U = 4\pi\gamma m_1 m_2 \delta(\vec{r})$ bei $\vec{r} \approx 0$

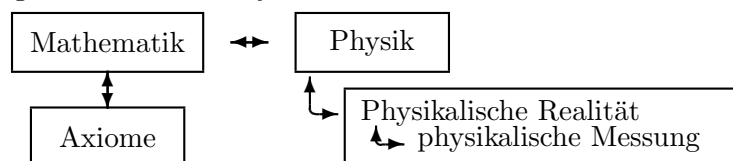
→ gewisse Ähnlichkeit mit Diffusionsgleichung

→ legt nahe, dass fundamentales Gesetz statistischen Ursprung haben könnte (so etwas wie „diffundierende Potentialteilchen“)

Aber: Solche Gedanken verstoßen gegen eine grundlegende Regel des physikalischen „Weltbildes“: Physikalische Realität hat nur, was physikalisch gemessen werden kann. „Diffundierende Potentialteilchen“ sind nur real, wenn sie im Prinzip nachgewiesen werden können. Anderenfalls handelt es sich um philosophische Spekulationen mit dem großen Nachteil, dass sie das Denkbare einschränken. In einem solchen Bild hätte z.B. Allgemeine Relativitätstheorie nicht entwickelt werden können.

→ Frage, warum Naturgesetze mathematisch sind, bleibt offen

Beziehung Mathematik - Physik:



Wichtig für neue Entwicklungen in der Physik:

Unvoreingenommenheit

nichts hinnehmen, was nicht gemessen werden kann

→ Physik im „Entwicklungsstadium“ nicht axiomatisch. Erst etablierte Gebiete der Physik können „im Nachhinein“ eventuell axiomatisch aufgebaut werden.

→ Völlig anderes Vorgehen als in der Mathematik

Grundfragen / Grundbegriffe in der Physik:

- Struktur von Raum und Zeit
- Kausalität (nachher $\neq$ vorher) ?
- Symmetrien
 - (abgeleitet)
 - Erhaltungssätze
 - Extremalprinzipien

In diesem Sinne: Überblick über die Vorlesungen der theoretischen Physik

1) Mechanik (Materie)

klassische Struktur von Raum und Zeit
Symmetrien und Erhaltungssätze
Galileisches Relativitätsprinzip

2) Elektrodynamik (Felder)

Felder: zusätzliche „innere“ Eigenschaften des Raums
Verborgene Symmetrien, Eichinvarianz
Zusätzlich: Spezielle Relativitätstheorie – Einsteinsches Relativitätsprinzip

3) Quantenmechanik

Physikalische Realität in mikroskopischen Dimensionen
Heisenbergsche Unschärferelation

4) Thermodynamik und statistische Physik

Neue Phänomene in makroskopischen Vielteilchensystemen
Zeitpfeil, Entropie
Komplexität

Mathematischer Rahmen (grob)

- 1),2)** Analysis
- 3)** Funktionalanalysis
- 4)** Stochastik

Einige empfohlene Bücher zur Theoretischen Mechanik

W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik Bd. 1, 2 & 4.* (Vieweg)

H. Goldstein: *Klassische Mechanik.* (Akademische Verlagsgesellschaft)

F. Scheck: *Mechanik.* (Springer)

L. D. Landau/ E. M. Lifshitz: *Mechanik.* (Vieweg)

F. Kuypers: *Klassische Mechanik.* (VCH)

H. Stephani, G. Kluge: *Theoretische Mechanik.* (Spektrum)

u.a.

Kapitel 1

Newtonsche Mechanik

© Copyright 2014 Friederike Schmid¹

1.1 Die Newtonschen Axiome

1.1.1 Wortlaut (übersetzt)

aus: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)

- I) „Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.“
- II) „Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht längs jener geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.“
- III) „Die Reaktion auf eine Aktion ist immer entgegengesetzt und gleich, d.h. die Aktionen (Kraftwirkungen) zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.“

1.1.2 Präzisierung der kinematischen Begriffe

Wir verstehen unter

a) einem "Körper": Einen Massenpunkt

idealisierte Objekte mit Masse, aber ohne räumliche Ausdehnung
($\leadsto$ Rotation spielt keine Rolle)

Generell gute Näherung, wenn Ausdehnung des Körpers sehr viel kleiner
als andere typische Längenskalen des Systems

Wir werden in Kapitel 3 S.57 sehen, dass man unter gewissen Umständen
auch ausgedehnte Körper wie Massenpunkte behandeln kann (mit
Zentrum am Massenschwerpunkt).

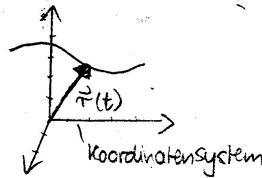
¹Prof. Dr. Friederike Schmid, Vorlesung Theoretische Mechanik, Universität Mainz, WS 2014/2015. Letzte Änderung am 24.11.16.

b) **”Bewegung”**: Die Bahnkurve bzw. Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes

Dahinter steht eine Abbildung „Welt“ $\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \text{physikalischer Raum („Ort“)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \quad (\vec{r}) \\ \text{physikalische Zeit} & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad (t) \end{array}$$

$\leadsto$ Bahnkurve $\vec{r}(t)$



Notwendig für diese Abbildung:

Definition einer Referenzlänge und eines Referenz-Zeitintervalls
Einheiten (z.B. SI-System: $[r] = 1 \text{ m}$, $[t] = 1 \text{ s}$)

Bemerkung: Der Ort $\vec{r}$ ist eine vektorielle Größe in 3 Dimensionen.

Dies ist an zwei Eigenschaften erkennbar:

- Darstellung durch 3 Koordinaten (r_1, r_2, r_3)
in einer Orthonormalbasis $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
(Eigenschaften: $E^T E = E E^T = \mathbb{1}$, $\det(E) = \pm 1 \Rightarrow E \in \mathbb{O}(3)$)

$$\text{Darstellung von } \vec{r}: \vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3 = E \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Berechnung der Koordinaten: } r_i = \vec{r} \vec{e}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = E^T \vec{r}$$

- Transformationsverhalten bei Wechsel der Basis

Neue Orthonormalbasis: $E' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

$$\text{Neue Darstellung: } \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

mit Transformationsmatrix $U = E'^T E$ bzw. $U_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$

$$(\text{Beweis: } \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = E'^T \vec{r} = E'^T \underbrace{E^T E}_{\mathbb{1}} \vec{r} = U \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark)$$

Eigenschaften der Transformationsmatrix: $U^T U = U U^T = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } U^T U &= (E'^T E)^T (E'^T E) = E^T \underbrace{E' E'^T}_{\mathbb{1}} E = E^T E = \mathbb{1} \\ U U^T &= (U^T T)^T = \mathbb{1}^T = \mathbb{1} \quad \checkmark) \end{aligned}$$

c) **”Bewegungszuständen”**

Definiere zunächst von der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ abgeleitete Größen

- Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}} \quad (\text{Einheit } 1 \text{ m/s})$
- Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}} \quad (\text{Einheit } 1 \text{ m/s}^2)$

Wir verstehen unter

- „Zustand der Ruhe“: Bahnkurve $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 = \overrightarrow{\text{const.}}$
- „gleichförmige Bewegung“: Bahnkurve mit $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{const.}}$
 $\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$
- „Änderung der Bewegung“: Beschleunigung $\vec{a}(t)$

1.1.3 Diskussion der Postulate

a) Diskussion des Postulats II

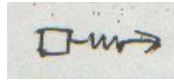
Begriff der „Kraft“ F

Angelehnt an unsere Wahrnehmung, Erfahrung aus dem Alltag

Beispiele

- Schwerkraft an der Erdoberfläche
 - zieht nach unten
 - erscheint überall gleich groß
 Experimentelle Beobachtung (Galilei):
 führt beim freien Fall zu konstanter Beschleunigung

- Angelegte Kraft



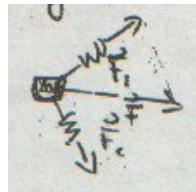
→ Erfahrung: Beschleunigung erfolgt in Richtung der Kraft

→ Postulat:

Kraft ist eine vektorielle Größe $\vec{F}$

Effekt einer Kraft auf Bahnkurve eines Massenpunkts ist $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
 mit m : zunächst nur Proportionalitätsfaktor

Folgerung: Superpositionsprinzip



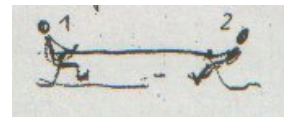
Nimm an, auf Körper wirken verschiedene Kräfte

- Beschleunigungen addieren sich vektoriell auf
- Kräfte addieren sich vektoriell auf: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

b) Diskussion des Postulats III

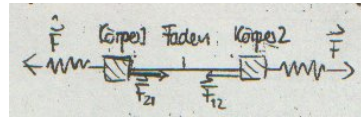
Zwei Aspekte:

- Beschreibt Wahrnehmung:
 Wenn ich eine Kraft ausübe, erfahre ich eine Gegenkraft, z.B. Tauziehen
 Gleichung: $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$
- Ermöglicht den Vergleich der Wirkung von Kräften auf verschiedene Körper → Aussage über Proportionalitätskonstante m :
 m ist eine Eigenschaft von Körpern: Träge Masse



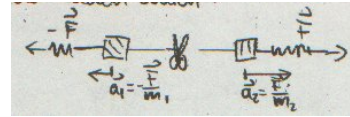
Messvorschrift für die träge Masse

Aufbau:



- Ziehe so, dass Aufbau in Ruhe $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}$

- Schneide Faden durch:



- Miss Beschleunigungen $\vec{a}_1 = -\frac{\vec{F}}{m_1}$ und $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{m_2}$
 $\Rightarrow$ Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ gibt Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$

Damit können im Prinzip die Massen aller Körper in Einheiten der Masse eines Referenzkörpers gemessen werden.

$\leadsto$ Masse hat physikalische Realität

Einheit der Masse: Referenzmasse, z.B. SI-System: 1 kg

Zusammenfassend: Newtonsches Kraftgesetz: $\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

mit m: träge Masse, physikalische Eigenschaft eines Körpers
 (Einheit: $[F] = 1 \text{ kg m/s}^2$)

Alternative Formulierung des Newtonschen Kraftgesetzes

Definiere Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$\rightarrow$ Newtonsches Kraftgesetz: $\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}}$

c) Diskussion des Postulats I

Wahrnehmungserfahrung

- In einem Karussell: sehr starke „Kraft“ nach außen
- Am Boden: weniger Kraft, fast nur noch Schwerkraft nach unten
- Auf dem Mond: noch weniger Kraft

Postulat: Es gibt Bezugssysteme, in denen „kräftefreie Körper“ in gleichförmiger Bewegung verharren. Diese Bezugssysteme nennt man Inertialsysteme.

Problem mit Inertialsystem

Verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Ursprünglich ging Newton sogar noch weiter und postulierte einen „absoluten Raum“, also ein ausgezeichnetes Inertialsystem, das „in Ruhe“ ist.

Problem: Man kann dieses nicht von anderen Bezugssystemen unterscheiden, es hat also keine „physikalische Realität“. In der klassischen Mechanik kann auf absoluten Raum ohne weiteres verzichtet werden.

Aber: Selbst wenn man einen relativen Raum akzeptiert, bleiben noch weitere grundlegende Probleme:

- Inertialsysteme im Sinne der klassischen Mechanik können experimentell im Universum prinzipiell nicht realisiert werden. Das liegt daran, dass es keine „kräftefreien Körper“ geben kann, da Gravitationskräfte wie $1/r^2$ abfallen und sich nicht abschirmen lassen.
(NB: Gravitationskräfte sind die einzigen nicht abschirmbaren Kräfte. Alle anderen Kräfte lassen sich abschirmen.)
- Ein ästhetisches Problem: Es gibt keinen absoluten Raum, aber eine absolute Zeit. Mit welchem Recht?

Lösung: Relativitätstheorie

Klassische Mechanik

Relativer Raum, absolute Zeit

Problem mit Inertialsystem

Spezielle Relativitätstheorie

Keine absolute Zeit mehr

Asymmetrie zwischen Raum und Zeit weitgehend aufgehoben

Problem mit Inertialsystem besteht

Allgemeine Relativitätstheorie

Gravitation ist Eigenschaft des Raums

Inertialsystem (kräftefreie Bewegung) realisiert im „freien Fall“

→ gibt dem Inertialsystem physikalische Realität

1.2 Beispiele: Anwendungen des Kraftgesetzes

1.2.1 Freier Fall im homogenen Schwerefeld

- * Kraft: Schwerkraft an Erdoberfläche



$$\vec{F}_{\text{grav}} = m_s \cdot \vec{g} \text{ mit } m_s: \text{Schwere Masse}$$

Experimentell stellt man fest: Alle Körper fallen gleich (Galilei)

→ $\vec{g}$ ist eine Beschleunigung (konkret: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

und $m_s \approx m$ (träge Masse)

Einsteinsches Äquivalenzprinzip: $m_s = m$

(allgemeine Relativitätstheorie)

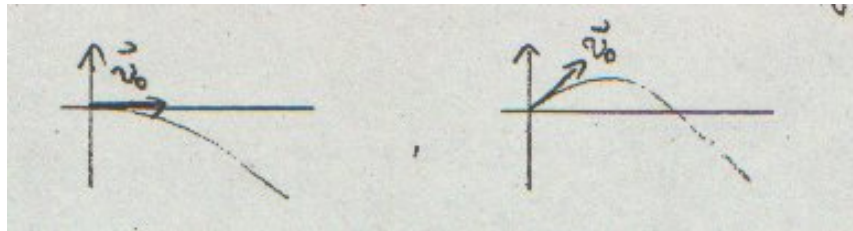
- * Bahnkurve

Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$: Ort $\vec{r}_0$, Geschwindigkeit $\vec{v}_0$

- Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \vec{g}$

- Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t d\tau \vec{a}(\tau) = \vec{v}_0 + \vec{g} t$

- Ort: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t d\tau \vec{v}(\tau) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$



1.2.2 Freier Fall im homogenen Schwerefeld mit Reibung

- * Kräfte:

Schwerkraft $\vec{F}_{\text{grav}} = m \cdot \vec{g}$

Reibungskraft $\vec{F}_{\text{reib}} = -\alpha(v) \cdot \vec{v}$

Nimm an, $\alpha = \text{const.}$ (Stokessche Reibung)

- * Berechne Geschwindigkeitsverlauf

$$\text{Gleichung: } \dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = \vec{g}$$

inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Vorgehen:

(i) Löse zunächst homogene DGL: $\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = 0$
→ Schar von homogenen Lösungen $\vec{v}_{\text{hom}}(t)$

(ii) Suche spezielle Lösung für inhomogene DGL $\vec{v}_s(t)$
→ Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{inh}}(t) = \vec{v}_s(t) + \vec{v}_{\text{hom}}(t)$

Umsetzung:

(i) homogene DGL: $\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = 0$

Ansatz: $\vec{v} = \vec{w} e^{\lambda t} \rightarrow \dot{\vec{v}} = \lambda \vec{w} e^{\lambda t}$

Einsetzen: $\vec{w} e^{\lambda t} (\lambda + \frac{\alpha}{m}) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\alpha}{m}$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{hom}}(t) = \vec{w} e^{-\frac{\alpha}{m} t}$

(ii) Spezielle Lösung $\vec{v}_s(t)$: z.B. die Lösung, bei der $\vec{v} \parallel \vec{g}$ und Reibungskraft die Schwerkraft genau aufwiegt

$\vec{F}_{\text{reib}} = -\vec{F}_{\text{grav}} \Rightarrow \vec{v}_s = \text{const. und } -\alpha \vec{v}_s = -m \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_s = \frac{m}{\alpha} \vec{g}$

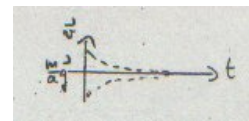
$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{inh}}(t) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + \vec{w} e^{-\frac{\alpha}{m} t}$

* Bahnkurve mit Anfangsbedingungen $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ zur Zeit $t = 0$

- Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

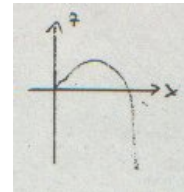


- Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t d\tau \vec{v}(\tau)$$

$$= \vec{r}_0 + \frac{m}{\alpha} \vec{g} t + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) (-\frac{m}{\alpha}) e^{-\frac{\alpha}{m} \tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$= \vec{r}_0 + \frac{m}{\alpha} \vec{g} t + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t})$$



1.2.3 Pendel

* Charakterisiere zunächst Bahnkurve $\vec{r}(t)$: Kreisbewegung

Wähle mitrotierendes Bezugssystem:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r$$

- Bahn: $\vec{r}(t) = l \vec{e}_r$ (l : Fadenlänge)

- Geschwindigkeit:

$$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^2} = \text{const.} \Rightarrow \frac{d\sqrt{\vec{r}^2}}{dt} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_r \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{e}_\varphi$$

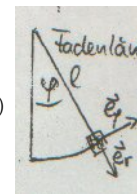
$$\rightarrow \vec{v}(t) = l \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi \quad (\dot{\varphi}(t): \text{Winkelgeschwindigkeit})$$

- Beschleunigung:

$$\left| \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right| = \left| \frac{d(\vec{r}/r)}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot \frac{1}{l} = \frac{|\vec{v}|}{l} = |\dot{\varphi}(t)|$$

und: $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \parallel \vec{e}_r$, zeigt Richtung $-\vec{e}_r$ für $\dot{\varphi} > 0$

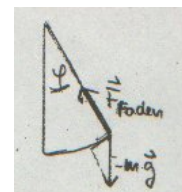
$$\rightarrow \vec{a}(t) = \underbrace{l \ddot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi}_{\text{Tangentialbeschleunigung}} - \underbrace{l \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r}_{\text{Normalbeschleunigung}}$$



* Folgerung für Kraft

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \ddot{\varphi} l \vec{e}_\varphi - m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{m \vec{g}}_{\text{Schwerkraft}} - \underbrace{f_{\text{Faden}} \vec{e}_r}_{\text{Fadenkraft}}$$



Zerlegung:

$$\text{Normalkraft: } \vec{F}_r = m \underbrace{(\vec{g} \cdot \vec{e}_r)}_{g \cos \varphi} \vec{e}_r + f_{\text{Faden}} \vec{e}_r \stackrel{!}{=} -m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$$

sorgt dafür, dass Körper auf Kreisbahn bleibt

$$\text{Tangentialkraft: } \vec{F}_\varphi = m \underbrace{(\vec{g} \cdot \vec{e}_\varphi)}_{g \sin \varphi} \vec{e}_\varphi \stackrel{!}{=} m \ddot{\varphi} l \vec{e}_\varphi$$

* Lösung für Bahnkurve $\varphi(t)$

Newtonsche Gleichung für Tangentialkraft

$$\Rightarrow \text{Differentialgleichung } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Exakte Lösung kann noch nicht (aber bald) berechnet werden

Im Moment beschränken wir uns auf den Spezialfall kleiner Auslenkungen

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow \text{Genäherte Differentialgleichung: } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$\text{Ansatz: } \varphi(t) = e^{\lambda t}$$

$$\text{Einsetzen: } \lambda = \pm i \sqrt{g/l} \quad \underline{\text{imaginär}}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung hat die Form: } \varphi(t) = C_+ e^{i\sqrt{g/l} t} + C_- e^{-i\sqrt{g/l} t}$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\rightarrow \varphi_0 = C_+ + C_-, \quad \omega_0 = i\sqrt{g/l}(C_+ - C_-)$$

$$C_+ = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2i}\omega_0\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad C_- = \frac{1}{2}\varphi_0 - \frac{1}{2i}\omega_0\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t + \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1.3 Bezugssysteme

An den Beispielen 1.2 S.10 wurde deutlich: Je nach Situation bieten sich verschiedene Koordinatensysteme an.

Beispiel Pendel: Mitrotierendes Bezugssystem $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$

Bahnkurve $\vec{r}(t) = l\vec{e}_r$: Für den mitrotierenden Beobachter konstant

Beobachter spürt Kraft auf Faden:

$m(g \cos \varphi) \vec{e}_r$: Schwerkraft

$-m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$: Zusätzliche „Scheinkraft“ - Zentrifugalkraft

Beobachter spürt keine Kraft in Richtung $\vec{e}_\varphi$:

Schwerkraft wird durch weitere Scheinkraft genau aufgehoben.

Wir wollen diese Zusammenhänge nun systematisch untersuchen: Wie hängen Scheinkräfte mit Bezugssystemen zusammen, oder allgemeiner: Wie transformiert man zwischen verschiedenen Bezugssystemen?

Ausgangspunkt:

1. Newtonsches Axiom: Es gibt Inertialsysteme

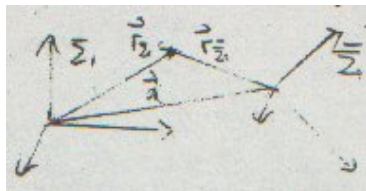
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens ein Inertialsystem Σ

(Newton: „absoluter Raum“, hier: egal, irgendeins)

Dieses soll unser Referenzsystem sein

Die Koordinaten einer Bahnkurve im Referenzsystem Σ seien: $\vec{r}_\Sigma(t)$

Betrachte nun Bezugssystem $\bar{\Sigma}$



Allgemeine Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\Sigma(t) &= \underbrace{\mathcal{D}(t)}_{\text{Drehung}} \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) + \underbrace{\vec{d}(t)}_{\text{Translation}} \\ \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) &= \mathcal{D}^{-1}(t) [\vec{r}_\Sigma(t) - \vec{d}(t)] \\ &= \mathcal{D}^T(t) \vec{r}_\Sigma(t) - \vec{d}'(t) \\ &\text{mit } \vec{d}'(t) = \mathcal{D}^T(t) \dot{\vec{d}}(t)\end{aligned}$$

1.3.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Herleitung : Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen

Falls $\bar{\Sigma}$ ein Inertialsystem ist, gilt generell:

$$\ddot{\vec{r}}_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \text{Bahn ist kräftefrei} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = 0$$

Einsetzen: $\vec{r}_{\bar{\Sigma}} = \mathcal{D}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d})$

$$\dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \dot{\mathcal{D}}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d}) + \mathcal{D}^T(\dot{\vec{r}}_\Sigma - \dot{\vec{d}})$$

$$\ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \ddot{\mathcal{D}}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d}) + 2\dot{\mathcal{D}}^T(\dot{\vec{r}}_\Sigma - \dot{\vec{d}}) + \mathcal{D}^T(\ddot{\vec{r}}_\Sigma - \ddot{\vec{d}})$$

$$\stackrel{!}{=} 0, \text{ falls } \ddot{\vec{r}}_\Sigma = 0 \quad \text{für alle } \dot{\vec{r}}_\Sigma, \vec{r}_\Sigma$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathcal{D}}^T = 0, \dot{\mathcal{D}}^T = 0, \ddot{\vec{d}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \text{const. (feste Drehung)}; \vec{d} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow \text{Transformation: } \vec{r}_{\bar{\Sigma}} = \mathcal{D}^T(\vec{r}_\Sigma(t) - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t)$$

Allgemeine Formulierung (Zeit einbezogen): Galilei-Transformation

$$\boxed{\begin{matrix} t_{\Sigma} = t_{\bar{\Sigma}} + t_0 \\ \vec{r}_{\Sigma} = \mathcal{D} \vec{r}_{\bar{\Sigma}} + \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_{\bar{\Sigma}} \end{matrix}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{matrix} t_{\bar{\Sigma}} = t_{\Sigma} - t'_0 \\ \vec{r}_{\bar{\Sigma}} = \mathcal{D}^T \vec{r}_{\Sigma} - \vec{r}'_0 - \vec{v}'_0 t_{\Sigma} \end{matrix}}$$

mit $t'_0 = t_0$, $\vec{r}'_0 = \mathcal{D}^T (\vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0)$ und $\vec{v}'_0 = \mathcal{D}^T \vec{v}_0$

$$\text{bzw. in Matrixform: } \begin{pmatrix} t_{\Sigma} \\ x_{\Sigma} \\ y_{\Sigma} \\ z_{\Sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_{0x} & & & \\ v_{0y} & & \mathcal{D} & \\ v_{0z} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{\bar{\Sigma}} \\ x_{\bar{\Sigma}} \\ y_{\bar{\Sigma}} \\ z_{\bar{\Sigma}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{\bar{\Sigma}} \\ x_{\bar{\Sigma}} \\ y_{\bar{\Sigma}} \\ z_{\bar{\Sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v'_{0x} & & & \\ -v'_{0y} & & \mathcal{D}^T & \\ -v'_{0z} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{\Sigma} \\ x_{\Sigma} \\ y_{\Sigma} \\ z_{\Sigma} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t'_0 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$$

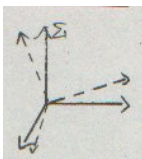
NB: $t'_0 = t_0$ bedeutet: Zeitdifferenzen sind absolut!

$t_{\Sigma} = t_{\bar{\Sigma}} + t_0$ bedeutet: Zeit ist absolut, unabhängig von $\vec{r}$ und $\vec{v}_0$.

Folgerungen :

- (i) Zu jedem Satz $(\mathcal{D}, \vec{v}_0, \vec{r}_0, t_0)$ gehört ein Inertialsystem
 $\rightarrow$ Wenn es ein Inertialsystem gibt, gibt es unendlich viele
- (ii) Transformation von
 - Geschwindigkeiten: $\vec{v}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D} \vec{v}_{\bar{\Sigma}}(t) + \vec{v}_0$
 $\vec{v}_{\bar{\Sigma}}(t) = \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}(t) = \mathcal{D}^T (\vec{v}_{\Sigma}(t) - \vec{v}_0) = \mathcal{D}^T \vec{v}_{\Sigma}(t) - \vec{v}'_0$
 - Beschleunigungen: $\vec{a}_{\Sigma}(t) = \ddot{\vec{r}}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D} \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}(t)$
 - Kräften: wie Beschleunigungen: $\vec{F}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D} \vec{F}_{\bar{\Sigma}}(t)$

1.3.2 Rotierende Bezugssysteme



$$\vec{r}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}(t) \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) = \mathcal{D}^T(t) \vec{r}_{\Sigma}(t)$$

$$\mathcal{D} \text{ ist Drehung: } \mathcal{D}(t) \mathcal{D}^T(t) = \mathcal{D}^T(t) \mathcal{D}(t) = \mathbb{1}; \det(\mathcal{D}) = +1$$

Einfachheitshalber: Betrachte Bahnkurve, Kräfte etc. zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 . Wähle Inertialsystem Σ , welches zu diesem Zeitpunkt mit $\bar{\Sigma}$ übereinstimmt. (Wie man von einem anderen Inertialsystem dahintransformiert, wissen wir ja.)

Vorabklärung : Zeitliche Ableitungen von Vektorfunktionen $\vec{u}(t)$

$$\vec{u}_\Sigma(t) \Big|_{t=t_0} = \mathcal{D}(t_0) \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) = \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0), \text{ da } \mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$$

$$\dot{\vec{u}}_\Sigma(t) \Big|_{t=t_0} = \dot{\mathcal{D}}(t_0) \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) + \mathcal{D}(t_0) \dot{\vec{u}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$$

Es gilt: $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = \mathbb{1} \Rightarrow (\mathcal{D}^T \dot{\mathcal{D}}) = \dot{\mathcal{D}}^T \mathcal{D} + \mathcal{D}^T \dot{\mathcal{D}} = 0$ zu allen Zeiten t

$\Rightarrow$ (wegen $\mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$): $\dot{\mathcal{D}}^T(t_0) + \dot{\mathcal{D}}(t_0) = 0$

$\Rightarrow \dot{\mathcal{D}}(t_0)$ hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$: schiefssymmetrische Matrix

Damit gilt für beliebige Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\dot{\mathcal{D}}(t_0) \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + bx_3 \\ -ax_1 + cx_3 \\ -bx_1 - cx_2 \end{pmatrix} \equiv \vec{\omega} \times \vec{x} \text{ mit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) + \dot{\vec{u}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$$

$\leadsto$ Also Schreibweise: $\boxed{\dot{\mathcal{D}}(t_0) \cdots = \vec{\omega} \times \cdots}$

Zu dem Zeitpunkt, an dem Σ und $\bar{\Sigma}$ identisch sind,

gilt: $\boxed{\left(\frac{d}{dt} \cdots\right)_\Sigma = \vec{\omega} \times \cdots + \left(\frac{d}{dt} \cdots\right)_{\bar{\Sigma}}}$

Bemerkungen

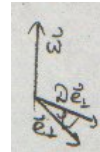
(i) Anschauliche Bedeutung von $\vec{\omega}$

Betrachte infinitesimale Drehung $\mathcal{D} = \mathbb{1} + dt \cdot \dot{\mathcal{D}}$

- Für Vektoren $\vec{x} \parallel \vec{\omega}$ gilt: $\dot{\mathcal{D}} \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x} = 0 \Rightarrow \mathcal{D} \vec{x} = \vec{x}$
 $\Rightarrow \vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse
- Berechne Kreuzprodukt eines gedrehten und ungedrehten Einheitsvektors $\vec{e}_\perp$, der auf $\vec{\omega}$ senkrecht steht.

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_\perp \times (\mathcal{D} \vec{e}_\perp) &= \sin \varphi (\underbrace{\vec{e}_\perp, \mathcal{D} \vec{e}_\perp}_{\varphi dt}) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \varphi dt \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \\ &= \vec{e}_\perp \times (\vec{e}_\perp + dt \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_\perp) = dt \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{\omega}| = \varphi$$

$\Rightarrow |\vec{\omega}|$ entspricht der Winkelgeschwindigkeit



(ii) $\vec{\omega}$ ist strenggenommen kein Vektor, sondern von Matrix abgeleitet. Trotzdem transformiert es unter Drehungen wie ein Vektor. Unter Spiegelungen transformiert es wie ein Vektor, aber mit umgedrehtem Vorzeichen.

Allgemein (Drehung + evtl. Spiegelung) gilt für Koordinatentransformationen U :

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \cdot \det(U)$$

(Grund: Betrachte Vektor $\vec{a}$, transformiert wie ein solcher.

$\rightarrow \vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ ist auch Vektor, transformiert wie ein solcher

$\rightarrow \vec{\omega}$ muss wie Vektor transformieren,

außer wenn Koordinatensystem Händigkeit ändert

z.B. Punktspiegelung: $U = -\mathbb{1} \Rightarrow \vec{a}' = -\vec{a}, \vec{b}' = -\vec{b} = \vec{\omega}' \times \vec{a} \Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}$)

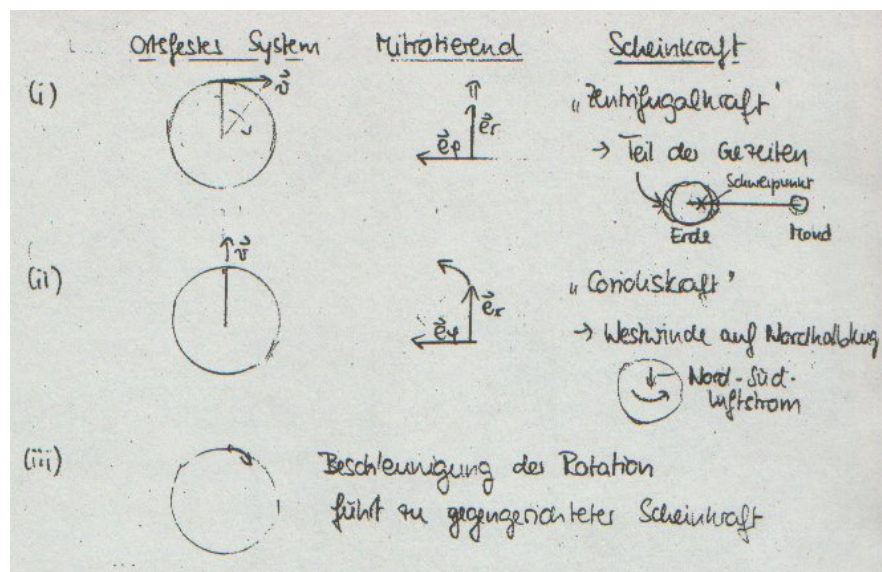
Größen mit einem solchen Transformationsverhalten nennt man auch Pseudovektoren. Wir werden noch mehrere kennenlernen.

Anwendung auf Bahnkurve $\vec{r}(t)$

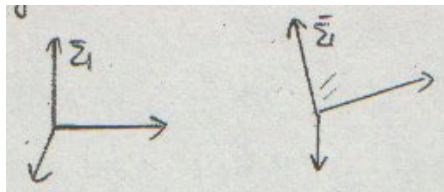
- Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}_{\Sigma}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{\bar{\Sigma}} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$
- Beschleunigung: $\ddot{\vec{r}}_{\Sigma}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\Sigma}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\Sigma} + \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}] + \left(\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}]\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}$
- Kräfte: $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\Sigma} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}$

bzw. Bewegungsgleichung im System $\bar{\Sigma}$:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{echte Kraft}} - \underbrace{m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{(i) Zentrifugalkraft}} - \underbrace{2m \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}}_{\text{(ii) Corioliskraft}} - \underbrace{m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{(iii) (namenlos)}}$$

Anschaulich:**1.3.3 Beliebige beschleunigte Bezugssysteme**

Allgemeiner Fall



$$\vec{r}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}(t)\vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) + \vec{d}(t)$$

Um Kräfte zu berechnen und Bewegungsgleichung aufzustellen:

Betrachte wieder Inertialsystem, das zur Zeit t_0 mit $\bar{\Sigma}$ übereinstimmt

$$(\mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}, \vec{d}(t_0) = 0)$$

Verfahren wie vorher, Ergebnis fast gleich:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \vec{F} - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m \cdot \ddot{\vec{d}}$$

1.4 Energie und Potential

1.4.1 Potentielle Energie

Vorbemerkung : Wir nehmen im folgenden an, dass wir in einem Inertialsystem sind, und wollen uns auf geschwindigkeitsunabhängige Kräfte beschränken. Die allgemeine Form eines Kraftfeldes lautet zwar $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ (ein Teilchen) bzw. $\{\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t)\}$ (N Teilchen); makroskopisch kennt man jedoch nur zwei Arten von geschwindigkeitsabhängigen Feldern: Die Reibungskraft und die Lorentzkraft (Magnetismus). Diese sollen gesondert behandelt werden.

→ Betrachte Kraftfeld der Form

$\vec{F}(\vec{r}, t)$ (ein Teilchen) bzw. $\{\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t)\}$ (N Teilchen)

Erfahrung : Geschwindigkeitsunabhängige Kräfte lassen sich in der Regel von einem Potential ableiten.

Ein Teilchen: $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$

N Teilchen: $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t)$ ($\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial r_{ix} \\ \partial/\partial r_{iy} \\ \partial/\partial r_{iz} \end{pmatrix}$)

Häufig sind Kräfte und Potential zudem nicht explizit zeitabhängig, d.h. $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$. Solche Kraftfelder heißen auch konservativ.

* Beispiele:

- Ein Teilchen in einer Dimension

„trivial“. $F(x, t) = -\frac{d}{dx}U(x, t)$ mit $U(x, t) = -\int_{x_0}^x F(\tilde{x}, t)d\tilde{x} + U_0$

- Ein Teilchen, auf das Zentralkraft der Form $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t)\vec{e}_r$ wirkt.

Dann gilt: $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$ mit $U(r, t) = -\int_{r_0}^r f(\tilde{r}, t)d\tilde{r} + U_0$

(Check: $-\vec{\nabla}U = -\frac{d}{dr}U(r, t) \cdot \vec{\nabla}r$

$$\frac{d}{dr}U(r, t) = -\frac{d}{dr} \int_{r_0}^r f(\tilde{r}, t)d\tilde{r} = -f(r, t)$$

$$\vec{\nabla}r = \vec{\nabla}\sqrt{r^2} = \frac{1}{2\sqrt{r^2}} \cdot 2\vec{r} = \vec{r}/r = \vec{e}_r)$$

* Bemerkung: Nicht jede Funktion $\vec{F}(\vec{r}, t)$ lässt sich auf ein Potential zurückführen.

Beispiel für eine hypothetische Kraft, für die das nicht gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t)\vec{e}_\varphi$$



$(f(r, t) \text{ nicht Null})$

Betrachte Linienintegral entlang eines Kreises mit Radius R . $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) =$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\varphi), t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot R \cdot \vec{e}_\varphi f(R, t) \vec{e}_\varphi = 2\pi R f(R).$$

Gäbe es ein Potential U mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, dann müsste aber gelten:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\varphi), t) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{\nabla}U(\vec{r}(\varphi), t) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d}{d\varphi} U(\vec{r}(\varphi), t) = -U(\vec{r}(\varphi), t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$



Bedingung dafür, dass ein Potential existiert

- (i) Globale Formulierung: Wegintegral über die Kraft muss auf geschlossenen Wegen verschwinden.

Ein Teilchen: $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$

N Teilchen: $\sum_i \oint d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = 0$

Beweis:

Bedingung ist notwendig:

Betrachte geschlossene Kurve $\{\vec{r}_i(s)\}$ ($s \in [0, S]$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_i \oint d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) &= \sum_i \int_0^S ds \frac{d\vec{r}_i}{ds} \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1(s) \dots \vec{r}_N(s), t) \\ &= (\text{falls Potential existiert}) - \int_0^S ds \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{ds} \cdot \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) \\ &= - \int_0^S ds \frac{d}{ds} U(\vec{r}_1(s) \dots \vec{r}_N(s), t) = -U(\vec{r}_1(s) \dots \vec{r}_N(s), t) \Big|_0^S \\ &= 0 \end{aligned}$$



Bedingung ist hinreichend: Konstruktionsbeweis

Konstruiere $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$ folgendermassen über Wegintegral:

- Wähle Referenzpunkt $\{\vec{r}_1^0 \dots \vec{r}_N^0\}$, setze $U_0 = U(\vec{r}_1^0 \dots \vec{r}_N^0)$
 - Wähle beliebigen Verbindungsweg $\{\vec{r}'_1(s) \dots \vec{r}'_N(s)\}$ zwischen $\{\vec{r}_1^0 \dots \vec{r}_N^0\}$ und $\{\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N\}$ ($s \in [0 : S]$)
 - Bestimme $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) := U_0 - \sum_j \int_0^S ds \frac{d\vec{r}'_j}{ds} \cdot \vec{F}_j(\vec{r}'_1(s) \dots \vec{r}'_N(s), t)$
- $$= U_0 - \sum_j \int_{\{\vec{r}_1^0 \dots \vec{r}_N^0\}}^{\{\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N\}} d\vec{r}'_j \cdot \vec{F}_j(\vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_N, t)$$

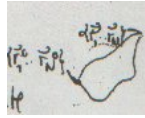
- Falls Integrale über alle geschlossenen Wege verschwinden, ist das Ergebnis eindeutig.

- Dann gilt auch: $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t)$

(Denn: Für beliebige kleine Verschiebungen $d\vec{r}_i$ gilt:

$$\begin{aligned} d\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U &= U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_i + d\vec{r}_i \dots \vec{r}_N) - U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_i \dots \vec{r}_N) \\ &= - \int_{\{\vec{r}_1 \dots \vec{r}_i \dots \vec{r}_N\}}^{\{\vec{r}_1 \dots \vec{r}_i + d\vec{r}_i \dots \vec{r}_N\}} \sum_j d\vec{r}'_j \cdot \vec{F}_j = -d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned}$$

Gilt für alle $d\vec{r}_i \Rightarrow \vec{\nabla}_i U = -\vec{F}_i \quad \checkmark$)



- (ii) Lokale Formulierung: Rotation muss verschwinden

Ein Teilchen $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

N Teilchen: $\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$

Dies sind notwendige Bedingungen für die Existenz eines Potentials, aber sie sind allein noch nicht hinreichend.

Eine hinreichende Zusatzbedingung ist, dass das betrachtete Gebiet einfach zusammenhängend sind, d.h. jede geschlossene Kurve lässt sich in dem Gebiet stetig auf Null zusammenziehen. (Anschaulich: Gebiet hat keine Löcher).

Beweis:

Bedingung ist notwendig:

$$\begin{aligned} \text{Falls Potential existiert, gilt } F_{i\alpha} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}}, F_{j\beta} = -\frac{\partial U}{\partial r_{j\beta}} \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial r_{j\beta} \partial r_{i\alpha}} = -\frac{\partial^2 U}{\partial r_{i\alpha} \partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}} \end{aligned}$$

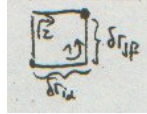
Bedingung ist hinreichend:

– Zeige erst: Falls $\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$, dann sind Linienintegrale

$\int_A^B \sum_i d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ für verschiedene Integrationswege gleich, wenn sie sich stetig ineinander überführen lassen.



Dazu: betrachte infinitesimal deformiertes Teilstück



$$I_1 = \int_{(1)} \sum_i d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = F_{i\alpha} dr_{i\alpha} + (F_{j\beta} + \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}} dr_{i\alpha}) dr_{j\beta}$$

$$I_2 = \int_{(2)} \sum_i d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = F_{j\beta} dr_{j\beta} + (F_{i\alpha} + \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} dr_{j\beta}) dr_{i\alpha}$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2, \text{ falls } \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}.$$

$\Rightarrow$ Linienintegral ist gleich für Integrationswege, die sich durch viele infinitesimale Deformationen ineinander überführen lassen.

– Daraus folgt, dass die globale Bedingung (i) erfüllt ist (da sich in einem einfach zusammenhängenden Gebiet alle geschlossenen Linienintegrale stetig auf Null zusammenziehen lassen.)

Beispiele :

* Wieder Zentralkräfte:

Definition einer allgemeinen Zentralkraft: $\vec{F}(\vec{r}, t) \propto \vec{e}_r$

Wir zeigen, dass eine Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \vec{e}_r$ genau dann ein Potential hat, wenn $f(\vec{r}, t)$ nur von $|\vec{r}|$ abhängt.

$$\text{Beweis: } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (f \cdot \vec{e}_r) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{e}_r + f \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{e}_r) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}_r = \frac{1}{r} (\vec{\nabla} \times \vec{r}) + (\vec{\nabla} \frac{1}{r}) \times \vec{r} = 0 - \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f \times \vec{e}_r = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \parallel \vec{e}_r$$

$$\leadsto \vec{e}_r \propto \vec{\nabla} f \text{ steht senkrecht auf Fläche } f = \text{const.}$$

$$\leadsto f = \text{const. ist Kugeloberfläche } \leadsto f \text{ hängt nur von } r \text{ ab.}$$

* N-Teilchen-System mit Paarwechselwirkungen $\vec{f}_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

Kraftfeld $\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}$ hat Potential

$$\text{Beweis: } i \neq j: \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \Big|_{r_{ij}} \frac{(r_{i\beta} - r_{j\beta})(r_{i\alpha} - r_{j\alpha})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \frac{f}{r} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$$

$$i = j: \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{i\beta}} = \sum_j \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \Big|_{r_{ij}} \frac{(r_{i\beta} - r_{j\beta})(r_{i\alpha} - r_{j\alpha})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{f}{r} \delta_{\alpha\beta} \right] = \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$$

NB: Potential dazu:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \text{ mit } \phi(r) = \phi_0 - \int_{r_0}^r d\tilde{r} f(\tilde{r}) \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dr} = f(r)$$

$$(-\vec{\nabla}_k U = -\vec{\nabla}_k \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|))$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left\{ \delta_{ki} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{ij}} \vec{\nabla}_i |\vec{r}_i - \vec{r}_j| + \delta_{kj} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{ij}} \vec{\nabla}_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{kj}} \left\{ \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \right\} = \sum_{j \neq k} f(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad \checkmark$$

1.4.2 Kinetische Energie

„Herleitung“ und Motivation

Betrachte ein N-Teilchen-System mit einem Potential, das nicht explizit von der Zeit abhängt: $\frac{\partial}{\partial t} U = 0$ bzw. $U = U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$

Dynamische Entwicklung $\rightarrow$ Trajektorie $\{\vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t)\}$

$\rightarrow$ Zeitliche Änderung des Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(\vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t), t) &= \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \frac{d\vec{r}_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2 =: - \frac{d}{dt} T \end{aligned}$$

$$\text{mit } T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 : \underline{\text{Kinetische Energie}}$$

$\Rightarrow$ Die Größe $T + U$ ist zeitlich konstant ($\frac{d}{dt}(T + U) = 0$).

$\Rightarrow$ Motiviert Definition der Gesamtenergie $E = T + U$.

Falls U nicht explizit zeitabhängig ist (d.h. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$), ist die Gesamtenergie E eine „Konstante der Bewegung“ $\rightarrow$ Energieerhaltung

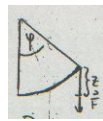
NB: Nur wegen dieser Eigenschaft definiert man überhaupt eine kinetische Energie und eine Gesamtenergie. Wenn E nicht im allgemeinen erhalten wäre, wären diese Größen uninteressant.

Anwendungsbeispiele :

* Eindimensionales System mit Potential $U(x)$

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U(x)) \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} dx \\ \Rightarrow \text{Bahnkurve } x(t) &\text{ aus } t = t_0 \pm \int_{x(0)}^{x(t)} dx \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} \end{aligned}$$

* Speziell: Pendel, Anfangsbedingungen $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ (zur Zeit $t = 0$)



Potentielle Energie: Schwerkraft $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\Rightarrow U = mgz = mgl(1 - \cos \varphi)$$

Kinetische Energie: $v = \dot{\varphi}l \Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}l)^2$

Energieerhaltung: $U + T = ml^2(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos \varphi)) = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung aus $\frac{d}{dt}(U + T) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$
(vgl. 1.2 S.10)

Bewegungskonstante: $\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi = \text{const.}$

am Umkehrpunkt: $= \frac{g}{l} \cos \varphi_{\max}$

zur Zeit $t = 0$: $= \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi_0$

$\leadsto$ Umkehrpunkt: $\cos \varphi_{\max} = \cos \varphi_0 - \frac{l}{2g} \dot{\varphi}_0^2$

Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})$

$$\rightarrow dt = \pm d\varphi / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}$$

Periode: $T = \int_0^T dt = 4 \int_0^{\varphi_{\max}} d\varphi / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}$
 $= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbb{K}(\sin \frac{\varphi_{\max}}{2}) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2 + \dots)$
 wobei $\mathbb{K}(x) = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{1}{4}x^2 + \dots)$ vollständiges elliptisches Integral

Bahnkurve: Aus Umkehrung von $t(\varphi)$

Bis zum ersten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})} \quad \left(\begin{array}{l} + : \varphi_0 > 0 \\ - : \varphi_0 < 0 \end{array} \right)$$

Erster Umkehrpunkt: $t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\pm\varphi_{\max}} d\varphi / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}$

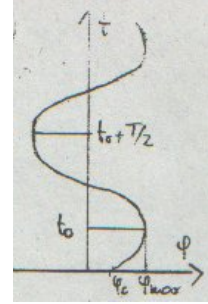
Bis zum zweiten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = t_0 \mp \int_{\pm\varphi_{\max}}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})}$$

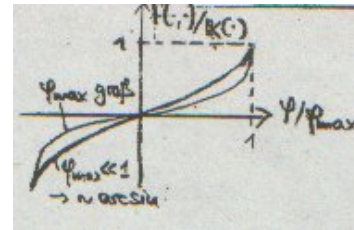
Bis zum dritten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = t_0 + T/2 \pm \int_{\mp\varphi_{\max}}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})}$$

etc.



NB: $\int_0^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max}} = \sqrt{2} F(\arcsin(\frac{\sin \varphi/2}{\sin \varphi_{\max}/2}), \sin \frac{\varphi_{\max}}{2})$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{elliptisches Integral}}$
 mit Maximum: $F(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}) = \mathbb{K}(\sin \frac{\varphi_{\max}}{2})$



1.4.3 Weitere Begriffe (vollständigkeitshalber)

Betrachte nun allgemeine Kraftfelder $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t)$ mit Trajektorien $\{\vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t)\}$

* Arbeit: $W = - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i$

(Arbeit, die in der Zeit von t_0 bis t_1 verrichtet wurde)

* Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = - \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i$

* Dissipatives Kraftfeld

Allgemeines Kraftfeld wird manchmal zerlegt in konservativen Anteil und Rest $\vec{F}_i = \vec{F}_{\text{kons},i} + \vec{F}_{\text{R},i}$ mit $\vec{F}_{\text{kons},i} = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$

Dann gilt: $\frac{d}{dt}(U + T) = \sum_i \vec{F}_{\text{R},i} \cdot \dot{\vec{r}}_i$ (Leistung der nicht-konservativen Kräfte)

Auf geschlossenen Trajektorien, d.h. $\vec{r}_i(t_1) = \vec{r}_i(t_0) \forall i$

$$\text{ist } - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}_i \dot{\vec{r}}_i = - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}_{\text{R},i} \dot{\vec{r}}_i$$

(der konservative Anteil der Kraft verrichtet keine Arbeit).

Nichtkonservative Kräfte, die dauerhaft Arbeit verrichten, nennt man dissipative Kräfte. Sie wandeln mechanische Energie in eine andere Energieform um, z.B. Wärme (Reibungskräfte) oder Strahlung.

1.5 Erhaltungssätze und Symmetrien

In diesem Kapitel nehmen wir an:

- Das Bezugssystem ist ein Inertialsystem.
- Kräfte haben ein Potential (Potentialkräfte).

Erinnerung an 1.4.2 S.20

- Einführung der kinetischen Energie T über Energieerhaltung.
- Falls ein Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ existiert und nicht explizit zeitabhängig ist, dann ist $E = U + T$ eine Erhaltungsgröße.

Nähere Betrachtung:

- Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ charakterisiert dynamische Entwicklung des Systems → legt Bewegungsgleichungen fest.
- Keine explizite Zeitabhängigkeit bedeutet:
 - kein ausgezeichnete Zeitpunkt, keine absolute Zeit
 - Bewegungsgleichungen translationsinvariant bzgl. Zeittranslationen oder „homogen in der Zeit“
- Aus der Homogenität der Zeit folgt: Es existiert eine Erhaltungsgröße → die Energie

Beispiel für ein allgemeineres Prinzip ($\leadsto$ Noethersches Theorem):

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

Dabei ist eine kontinuierliche Symmetrie:

Transformation $K_a: (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \xrightarrow{a} (\vec{r}'_1 \cdots \vec{r}'_N, t')$,

welche Bewegungsgleichungen invariant lässt

mit a : kontinuierlicher Parameter; $a = 0 \Leftrightarrow$ Identität

Im Fall der Homogenität der Zeit: $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t)$ hängt nicht von t ab

→ Bewegungsgleichung invariant unter

$$(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\vec{r}'_1 \cdots \vec{r}'_N, t') = (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t + a)$$

Weitere Symmetrien/Invarianzen

- * Homogenität des Raumes ($\rightarrow$ 1.5.2 S.23)

Invarianz unter räumlichen Translationen $\vec{r}_i = \vec{r}_i + a$

→ Impulserhaltung

- * Isotropie des Raumes ($\rightarrow$ 1.5.3 S.24)

Invarianz unter Drehungen $\vec{r}_i = \mathcal{D}_a(\vec{r}_i)$

$(\mathcal{D}_0 = \mathbb{1})$

→ Drehimpulserhaltung

- * Eichinvarianz im elektromagnetischen Feld

(nicht in dieser Vorlesung)

→ Ladungserhaltung

Grundlegende Symmetrien unserer Raumzeit:

Für "abgeschlossene" Systeme (keine oder fast keine Wechselwirkungen mit der Außenwelt), erwartet man, dass die Bewegungsgleichungen invariant sind unter allgemeinen Galilei-Transformationen $\vec{r}_\Sigma = \mathcal{D}\vec{r}_\Sigma + \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_\Sigma$.

NB: Nicht erfüllt für die Gleichungen der Elektrodynamik
 → Motiviert Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie
 → Invarianz unter Lorentz-Transformationen (siehe Theorie II).

Daraus folgen (nichtrelativistisch und relativistisch) Erhaltungssätze:

$$\begin{array}{lll} t_0 & \rightarrow \text{Invarianz unter Zeittranslationen} & \rightarrow \text{Energie} \\ \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t_\Sigma & \rightarrow \text{Invarianz unter Raumtranslationen} & \rightarrow \text{Impuls} \\ \mathcal{D} & \rightarrow \text{Invarianz unter Drehungen} & \rightarrow \text{Drehimpuls} \end{array}$$

1.5.1 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Bereits besprochen (1.4.2 S.20).

1.5.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung

Homogenität des Raumes:

→ In einem abgeschlossenen System sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation $(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\vec{r}_1 + \vec{a} \dots \vec{r}_N + \vec{a}, t)$
 (Es gibt keinen ausgezeichneten Raumpunkt).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_N + \vec{a}, t) \quad \forall \vec{a} \Rightarrow \frac{d}{da_\alpha} U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_N + \vec{a}, t) \equiv 0 \\ \Rightarrow 0 &= \left. \frac{dU}{da_\alpha} \right|_{a_\alpha=0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}} \frac{d(r_{i\alpha} + a_\alpha)}{da_\alpha} \Big|_{a_\alpha=0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}} = - \sum_i F_{i\alpha} = - \sum_i \dot{p}_{i\alpha} = - \frac{d}{dt} \sum_i p_{i\alpha} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i &= 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} \end{aligned}$$

⇒ Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ ist eine Erhaltungsgröße.

Folgerung: Schwerpunktsatz

Gegeben ein System von N Teilchen, Massen m_i

Definiere Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$, Gesamtmasse $M = \sum m_i$

Falls das System abgeschlossen ist, gilt $\dot{\vec{R}} = \vec{P}/M = \text{const.}$

- * Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{P}/M$
- * Das Schwerpunktsystem, in dem $\vec{R}$ am Ursprung sitzt, ist ein Inertialsystem (d.h. $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}(t)$ ist eine Galileitransformation)

1.5.3 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Isotropie des Raumes:

→ In einem abgeschlossenen System sind die Bewegungsgleichungen invariant unter $(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_1 \cdots \mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_N, t)$

$\mathcal{D}_{\vec{a}}$: Drehung mit Drehachse $\frac{\vec{a}}{a}$, Drehwinkel $|\vec{a}|$

(Es gibt keine ausgezeichnete Raumrichtung).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) &= U(\mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_1 \cdots \mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_N, t) \quad \forall \vec{a} \\
 \text{Speziell } |\vec{a}| \rightarrow 0 \text{ (infinitesimal): } \mathcal{D}_{\vec{a}} &\approx [\mathbf{1} + \vec{a} \times] \quad (\text{nach 1.3.1 S.13}) \\
 \Rightarrow \frac{d}{da_\alpha} U(\vec{r}_1 + \vec{a} \times \vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N + \vec{a} \times \vec{r}_N, t) \Big|_{\vec{a}=0} &= 0 \\
 \Rightarrow 0 = \sum_i \sum_{\beta(x,y,z)} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial r_{i\beta}}}_{-F_{i\beta}} \frac{d}{da_\alpha} [r_{i\beta} + (\vec{a} \times \vec{r}_i)_\beta] &= - \sum_{i\beta} F_{i\beta} \frac{d}{da_\alpha} \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta\beta} a_\gamma r_{i\delta} = - \sum_{i\beta\gamma\delta} F_{i\beta} \varepsilon_{\gamma\delta\beta} \delta_{\alpha\gamma} r_{i\delta} \\
 &= - \sum_{i\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\delta\beta} r_{i\delta} F_{i\beta} = - \sum_{i\beta\delta} \varepsilon_{\delta\beta\alpha} r_{i\delta} F_{i\beta} = - \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)_\alpha = - \sum_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i)_\alpha \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) &= \underbrace{\sum_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i)}_{0 \text{ wegen oben}} + \underbrace{\sum_i (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i)}_{0 \text{ weil } \dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{p}_i} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const.}
 \end{aligned}$$

⇒ Der Gesamtdrehimpuls $\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i}$ ist eine Erhaltungsgröße.

Allgemeiner gilt:

Falls in einem System keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, gilt Drehimpulserhaltung.

Falls ein System invariant ist bzgl. Drehungen um eine Drehachse $\vec{n}$, ist $\vec{n} \cdot \vec{L}$ erhalten (Beweis analog).

Beispiel: Ein Teilchen im Zentralpotential $U(r)$

→ Keine Impulserhaltung (da Ort ausgezeichnet), aber Drehimpulserhaltung (keine ausgezeichnete Richtung) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$

Folgerungen:

(i) Bahn $\vec{r}(t)$ ist immer in einer Ebene ($\vec{r}(t) \perp \vec{L}$)

(ii) "Flächensatz": $\vec{r}(t)$ überstreicht zu gleichen Zeiten gleiche Flächen



$$\begin{aligned}
 \text{Fläche } A(\Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} |\mathrm{d}\vec{A}| = \int_t^{t+\Delta t} \left| \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \right| dt \\
 &= \frac{1}{2m} \int_t^{t+\Delta t} \underbrace{|\vec{r} \times \vec{p}|}_L dt = \frac{L}{2m} \Delta t
 \end{aligned}$$

1.5.4 Skaleninvarianz und Virialsatz

Skaleninvarianz: Eine weniger allgemeine Symmetrie

Angenommen, Potential hat Eigenschaft $U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) = \lambda^K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

Beispiele:

- Gravitationskraft: $U = \sum_{i \neq j} \gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$
 $\rightarrow U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) = \lambda^{-1} U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$
- gekoppelte Oszillatoren: $U = \sum_{ij} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$
 $\rightarrow U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) = \lambda^2 U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichungen sind invariant unter "Skalentransformationen"

$$(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \longrightarrow (\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N, \lambda^{1-\frac{K}{2}} t)$$

$\rightarrow$ kontinuierliche Symmetrie K_a mit $\lambda = e^a$;

Identität bei $a = 0$ bzw. $\lambda = 1$

(Check: Setze $\tilde{r}_{i\alpha} = \lambda r_{i\alpha}$, $\tilde{t} = \lambda^r t$

Aus Bewegungsgleichung $m_i \frac{d^2}{dt^2} r_{i\alpha} = -\frac{\partial}{\partial r_{i\alpha}} U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ folgt:

folgt: $m_i \lambda^{-1+2r} \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \tilde{r}_{i\alpha} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_{i\alpha}} U(\tilde{\vec{r}}_1 / \lambda \cdots \tilde{\vec{r}}_N / \lambda) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_{i\alpha}} \lambda^{-K} U(\tilde{\vec{r}}_1 \cdots \tilde{\vec{r}}_N)$

Bewegungsgleichungen sind invariant, wenn gilt: $m_i \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \tilde{r}_{i\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_{i\alpha}} U(\tilde{\vec{r}}_1 \cdots \tilde{\vec{r}}_N)$

$\Rightarrow$ Es muss gelten: $\lambda^{-1+2r} = \lambda^{1-K} \forall \lambda \Rightarrow r = 1 - \frac{K}{2} \checkmark$

Bei Skaleninvarianz gilt (Rechnung analog wie in den vorigen Kapiteln)

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) = \frac{d}{d\lambda} [\lambda^K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)] = K \lambda^{K-1} U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$$

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) = \sum_i \vec{\nabla}_i U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) \cdot \frac{d(\lambda \vec{r}_i)}{d\lambda} = \sum_i \vec{\nabla}_i U(\lambda \vec{r}_1 \cdots \lambda \vec{r}_N) \cdot \vec{r}_i$$

$$\stackrel{(\lambda=1)}{\Rightarrow} K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N) = \sum_i \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N) \cdot \vec{r}_i = - \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i = - \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \ddot{\vec{p}}_i}_{-K \cdot U} + \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{p}}_i}_{m_i \dot{\vec{r}}_i^2} = -KU + 2T$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i) = -K U + 2T}$$

Folgerungen:

Kein richtig „brauchbarer“ Erhaltungssatz $(\sum \vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i + \int_0^t d\tau (KU - 2T) = \text{const.})$

Aber: nützlicher Satz für zeitliche Mittelwerte $\langle \bullet \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \bullet$:

Für räumlich beschränkte Systeme gilt der Virialsatz:

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{K}{2} \langle U \rangle}$$

(Rechnung: Falls System räumlich beschränkt

$$\Rightarrow \sum \vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i \text{ endlich} \Rightarrow \int_0^t d\tau (KU - 2T) \text{ endlich } \forall t$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T d\tau (KU - 2T) = \lim_{T \rightarrow \infty} T [K \langle U \rangle - 2 \langle T \rangle] \text{ endlich}$$

$$\Rightarrow K \langle U \rangle - 2 \langle T \rangle = 0 \checkmark$$

1.5.5 Beispiele für Anwendungen von Symmetrieprinzipien

Anwendungen der Symmetrieprinzipien auf verschiedene Situationen

- N nichtwechselwirkende Teilchen in einer quaderförmigen Box
 - Invarianz gegen Zeittranslationen,
Keine Invarianz gegen Ortstranslationen, keine Isotropie
 - Energieerhaltung, keine Impulserhaltung, keine Drehimpulserhaltung
- N nichtwechselwirkende Teilchen zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten, die in (x, y) -Ebene orientiert sind
 - Invarianz gegen Translationen von Zeit und Ort in x, y Richtung
Invarianz gegen Drehungen um z -Achse (beliebiger Ursprung)
Keine Invarianz gegen Ortstranslationen in z -Richtung
Keine Invarianz gegen Drehungen um x, y -Achse
 - Erhalten sind: Energie, $P_{x,y}$, L_z , nicht erhalten sind: P_z , $L_{x,y}$
- N nichtwechselwirkende Teilchen in einem unendlich langen Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, das in x -Richtung orientiert ist
 - Invarianz gegen Translationen von Zeit und Ort in x -Richtung
Keine Invarianz gegen Ortstranslationen in y, z -Richtung
Keine Drehinvarianz außer bzgl. Drehungen um zentrale Rohrachse
 - Erhalten sind: Energie, P_x , L_x bzgl. Ursprung in der zentralen Achse
Nicht erhalten: $P_{y,z}$, $L_{y,z}$, L_x bzgl. anderem Ursprung
- 2 Teilchen mit einem Paarpotential der Form $U_{\text{gesamt}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \sin(\Omega t)$
 - Invarianz gegen Ortstranslation und Drehungen
Keine Invarianz gegen Zeittranslationen
 - Impuls- und Drehimpulserhaltung, keine Energieerhaltung

1.6 Zusammenfassung: Newtonsche Mechanik

Konzepte:

- Beschreibung klassischer Systeme von N Teilchen durch Massenpunkte mit Ortskoordinaten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, wobei $\vec{r}_i \in \mathbb{R}$
- Newtonsche Postulate, insbesondere: Konzept des Inertialsystems
- Newtonsche Bewegungsgleichungen $\boxed{m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i}$
(in Inertialsystemen in kartesischen Koordinaten)
- Kraftfelder (konservativ und dissipativ)
- Zentrale Größe, die die Dynamik charakterisiert:
(falls Kraftfelder konservativ)) Potential $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \rightarrow \boxed{m\ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_i U}$
- Zusammenhang von Symmetrien bzw. Homogenitäten mit Erhaltungssätzen
 $\leadsto$ Begriffe von Energie, Impuls, Drehimpuls

Techniken:

- Lösen von Differentialgleichungen
- Wechsel von Bezugssystemen

Physik: (nächster Abschnitt 1.7 S.28)

- Lösung des Zweikörperproblems
- Speziell: Lösung des Keplerproblems

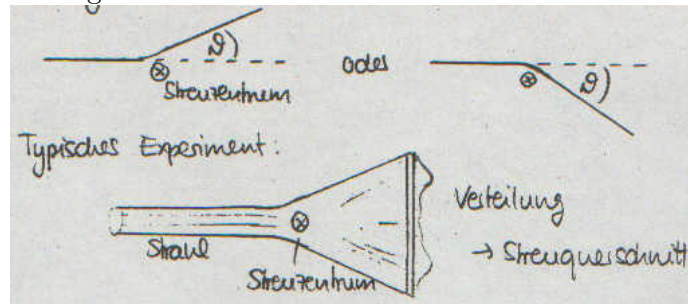
1.7 Anwendung: Das Zweikörperproblem

Wichtiger Spezialfall: „Abgeschlossenes“ System aus zwei Teilchen

→ Potential: $U_{\text{gesamt}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, Massen m_1, m_2

Besondere Bedeutung

- In allgemeiner Form lösbar
(ist ab drei Körpern schon nicht mehr möglich)
- Beschreibt in guter Näherung
 - * Planetenbahnen (Keplerproblem: Sonne-Planet)
 - * Streuung an einem Teilchen



erlaubt Rückschlüsse auf Lage des Streuzentrums und auf Form des Potentials (nicht eindeutig)

Vorbemerkungen

Es gilt

- Impulserhaltung: $m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{const.}$
→ Schwerpunktsatz
- Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \text{const.}$
- Drehimpulserhaltung: $\vec{r}_1 \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \text{const.}$

Definiere Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

1.7.1 Reduktion auf ein eindimensionales Problem

1.7.1.1 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

- Impulserhaltung und Schwerpunktsatz
→ Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit
Gesamtimpuls $\vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const.}$

Nutze diese Information aus: Die Bewegungsgleichungen sind für eine Linearkombination von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ schon gelöst. Brauche nur noch eine weitere Kombination zu betrachten.

- Naheliegende Wahl für zweite Kombination ergibt sich aus Form des Potentials $U_{\text{gesamt}} = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$: Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.
Dann ist $U_{\text{gesamt}} = U(|\vec{r}|)$

Umrechnung:

$$\begin{aligned}
& \boxed{\begin{matrix} \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{matrix}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -\frac{m_1}{M} \end{pmatrix} \\
& \leadsto \boxed{\begin{matrix} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{matrix}}
\end{aligned}$$

1.7.1.2 Bewegungsgleichungen für Relativkoordinaten

Herleitung über Energieerhaltung

- Potentielle Energie: $U = U(r)$
- Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$

muss noch in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
& \text{Dazu: Matrixschreibweise } T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 & \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 \\ \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} \\
& \text{Es gilt: } \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_2/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 \\ \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_2/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \quad \text{und } \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 & \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} & \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m_2/M & -m_1/M \end{pmatrix} \\
& \leadsto T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} & \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m_2/M & -m_1/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_1/M \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m_1 m_2 / M \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} & \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m_1 m_2 / M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 \\
& \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{\text{gesamt}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \\
& \text{mit der reduzierten Masse: } \boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}
\end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Gesamtenergie: } E_{\text{gesamt}} = T + U = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \text{const.}$$

Wegen $\dot{\vec{R}} = \text{const.}$ gilt: $\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) \right] = \mu \vec{r} \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} [\mu \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U] \equiv 0 \text{ (immer!) } \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U \equiv 0$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U}$$

Die Relativbewegung ist identisch mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes der reduzierten Masse μ im Potential $U(r)$.

$$\Rightarrow \text{Problem reduziert auf Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential } U(r)$$

$$\text{Kraft (vgl. 1.4.1 S.17): Zentralkraft } \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dr} \vec{\nabla} |\vec{r}| = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

1.7.1.3 Bewegung im Zentralpotential

Vorbemerkung: Da $U(r)$ konservatives Zentralpotential, sind nach 1.5.3 S.24 der Relativdrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times (\mu \dot{\vec{r}})$ und die Relativenergie $E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$ erhalten.

NB: Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \vec{r}_1 \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{l} + \vec{R} \times (M \dot{\vec{R}})$

(Beweis: Einsetzen)

Folgerung: Fallunterscheidung

(i) $\vec{l} \equiv 0 \Rightarrow \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$  $\vec{r}$ bewegt sich auf Geraden durch Ursprung.

→ Eindimensionale Bewegung: $\mu \ddot{r} = -\frac{dU}{dr}$

(ii) $\vec{l} \neq 0 \Rightarrow$ wegen $\vec{l} \propto \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ist $\vec{r} \perp \vec{l}$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{l}$

$\leadsto \vec{r}(t)$ liegt in Ebene durch Ursprung, die senkrecht zu $\vec{l}$ steht

Ebene Bewegung

Wähle Koordinatensystem mit z-Achse in Richtung $\vec{l}$

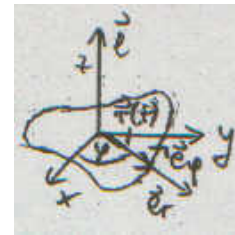
Benutze Polarkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} &= r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = r \dot{\varphi} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}}^2 &= (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)^2 = \underbrace{\dot{r}^2}_{1} + 2 \dot{r} r \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi}_{0} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{\vec{e}_\varphi^2}_{1} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$



Nutze Drehimpulserhaltung aus: $\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = l \vec{e}_z = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \Rightarrow \dot{\varphi} = l / \mu r^2$

Nutze Energieerhaltung aus:

$$E = \text{const.} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mu r^2}{2} \dot{\varphi}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

$$= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \text{ mit } U_{\text{eff}}(r) := U(r) + l^2 / 2\mu r^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \right) = \mu \dot{r} \ddot{r} + \dot{r} \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0$$

→ Bewegungsgleichung: $\mu \ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}$

Zusammenfassung von (i) und (ii)

Bewegung der Relativkoordinate $\vec{r}(t)$

- Ebene Bewegung in derjenigen Ebene durch den Ursprung, die senkrecht auf dem Relativdrehimpuls $\vec{l}$ steht
(bzw. für $\vec{l} = 0$: Eindimensionale Bewegung auf Geraden $\parallel \vec{r}$)

- Betrag von $\vec{r}$ bewegt sich wie eindimensionale Masse μ im effektiven

Potential $\boxed{U_{\text{eff}}(r) = U(r) + l^2/2\mu r^2} \leadsto$ Radialgleichung: $\boxed{\mu \ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}}$

- Winkelkoordinate folgt aus $l = \mu |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \text{const.}$

in Polarkoordinaten mit $\vec{l} \parallel \vec{e}_z$, $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$: $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}}$

1.7.1.4 Integration der Bewegungsgleichungen

- Radialgleichung

Über Energie der Relativbewegung: $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt} \leadsto dt = \pm dr / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = t_0 \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} d\tilde{r} / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))}}$$

Implizite Gleichung für $r(t)$

- Winkelgleichung

Über $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \dot{r} = \pm \frac{d\varphi}{dr} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{\mu r^2} / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))} \leadsto d\varphi = \pm dr \cdot l / r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 \pm \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} d\tilde{r} \frac{l}{\tilde{r}^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))}}}$$

Implizite Gleichung für $r(\varphi)$

1.7.2 Das Kepler-Problem

Wichtigster Spezialfall des Zweikörperproblems: Potential der Form $\boxed{U(r) = -\alpha/r}$

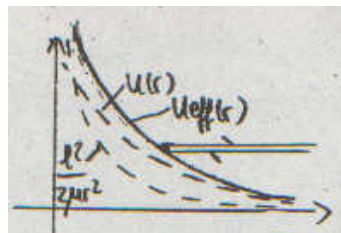
Beispiele: Gravitationskraft: $U(r) = \gamma m_1 m_2 / r$

Coulombkraft: $U(r) = q_1 q_2 / r$

1.7.2.1 Qualitative Analyse

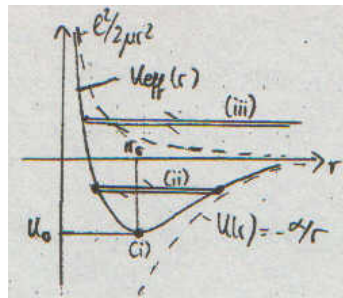
Betrachte das effektive Potential $U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

- * Fall $\alpha < 0$:



Nur Energien $E > 0$ möglich
Alle Bahnen ungebunden



* Fall $\alpha > 0$:

Minimum: $r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$
 $U_0 = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}$

Energie E muss
 größer als U_0 sein

Mögliche Bahnen:

- (i) $E = U_0 : r(t) \equiv r_0 \rightarrow$ Kreisbahn
- (ii) $U_0 < E < 0 : r(t)$ bleibt beschränkt
 $\leadsto$ gebundene Bahn
- (iii) $E > 0 : r(t)$ reicht ins Unendliche
 $\leadsto$ ungebundene Bahn

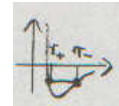
**1.7.2.2 Semiquantitative Analyse**Betrachte Bewegung mit Energie E

Bestimme maximale und minimale Entfernung vom Ursprung

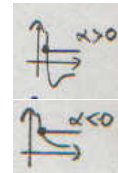
$$\leadsto E = U_{\text{eff}}(r) \Rightarrow E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \right)$$

Fälle: (i) $U_0 < E < 0$ ($\alpha > 0$)

- $\leadsto r_+$ und r_- reell und positiv
- $\leadsto$ Zwei Umkehrpunkte, gebundene Bahn

(ii) $E > 0$ ($\alpha \geq 0$)

- $\leadsto r_+$ positiv, r_- negativ $\leadsto$ unphysikalische Lösung
- $\leadsto$ Nur ein Umkehrpunkt, ungebundene Bahn

**1.7.2.3 Quantitative Lösung**

Benutze Winkelgleichung $\varphi = \phi_0 \pm \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} d\tilde{r} \frac{l}{\tilde{r}^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))}}$

Vereinfache: $E - U_{\text{eff}}(r) = E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{l^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right)$ (mit $\frac{1}{r_{\pm}}$ wie oben in 1.7.2.1)Variablentransformation: $\tilde{r} = \frac{1}{r} \Rightarrow d\tilde{r}/\tilde{r}^2 = -dr$; Wähle x -Achse so, dass $r(\varphi = 0) = r_+$

$$\text{Einsetzen mit } \varphi_0 = 0: \varphi = \mp \int_{1/r_+}^{1/r} d\tau \sqrt{\left(\frac{1}{r_+} - \tau \right) \left(\tau - \frac{1}{r_-} \right)} = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}}{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}}{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}} = \mp \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{r} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)}_{=: 1/p} \pm \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)}_{=: \epsilon/p} \cos(\varphi)$$

$$\text{Setze ein (s.o.) } \frac{1}{r_{\pm}} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \right) \Rightarrow p = \frac{l^2}{\mu\alpha}, \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung für } r(\varphi) \text{ folgt } \boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \text{ mit } \boxed{p = \frac{l^2}{\mu\alpha}} ; \quad \boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$$

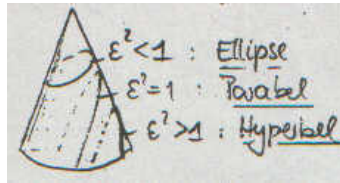
$\leadsto$ Gleichung für einen Kegelschnitt mit Brennpunkt im Ursprung!

$p \hat{=}$ "Parameter"

$\varepsilon \hat{=}$ "Exzentrizität"

$\varphi = 0 \hat{=}$ „Perihel“:

r liegt Zentrum am nächsten



Umrechnung in kartesische Koordinaten $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$

$$p = r + \underbrace{\varepsilon r \cos \varphi}_x = (p - \varepsilon x)^2 = r^2 = x^2 + y^2 \leadsto y^2 + x^2(1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon px - p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \neq 1 : y^2 \left(\frac{1-\varepsilon^2}{p^2} \right) + \left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \right)^2 \left(\frac{1-\varepsilon^2}{p} \right)^2 = 1 \\ \varepsilon = 1 : y^2 = p^2 - 2px \end{cases}$$

Fallunterscheidung

(i) $\varepsilon^2 < 1$ ($E < 0$) $\rightarrow$ Gleichung der Form $\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x+x_0}{b}\right)^2 = 1$

$\leadsto$ Ellipsen-Bahn mit Halbachsen a und b



$$a = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$b = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

Speziell: Berechne Umlaufzeit aus Flächensatz (1.5.3 S.24)

Überstrichene Fläche pro Zeit dt : $dA = \frac{l}{2\mu} dt$

Gesamtfläche: $A = \pi ab = \pi \frac{l\alpha}{\sqrt{8\mu|E|^3}}$

$\Rightarrow$ Umlaufzeit: $T = \frac{2\mu}{l} A = \pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$

• T hängt nicht vom Drehimpuls l ab

• $T^2 \propto |E|^{-3} \propto b^3$: Drittes Keplersches Gesetz

(ii) $\varepsilon^2 = 1$ ($E = 0$) $\rightarrow$ Gleichung $x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$

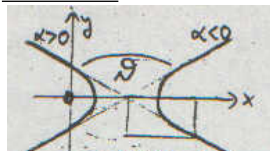
$\leadsto$ Parabel



ungebunden, Geschwindigkeit
verschwindet im Unendlichen

(iii) $\varepsilon^2 > 1$ ($E > 0$) $\rightarrow$ Gleichung der Form $-\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2 = 1$

$\leadsto$ Hyperbel mit Halbachsen a und b



$$a = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}}, \quad b = |\alpha|/2E$$

ungebundene Bahn, am Potential
abgelenkt um ϑ mit $\tan(\vartheta/2) = b/a$

$\Rightarrow$ Ablenkwinkel: $\boxed{\vartheta = 2 \cdot \arctan \sqrt{\frac{\mu\alpha^2}{2El^2}}}$

1.7.2.4 Rückrechnung auf absolute Koordinaten

- Im Schwerpunktsystem ($\vec{R}(t) \equiv 0$)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \vec{r}(t) \cdot m_2/M \\ \vec{r}_2(t) &= -\vec{r}(t) \cdot m_1/M \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bahnen von } \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ gleiche} \\ \text{Form wie } \vec{r}(t), \text{ nur reskaliert} \end{array}$$

Beispiel gebundene Bahnen (Ellipsen)



Falls Massen sehr unterschiedlich, z.B. Planeten: $m_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}}$

→ Große Masse steht nahezu (sehr enge Bahn)

→ Beinahe „echtes“ Zentralkraftproblem

mit reduzierter Masse $\mu = \frac{m_{\text{Planet}} m_{\text{Sonne}}}{m_{\text{Planet}} + m_{\text{Sonne}}} \approx m_{\text{Planet}}$

- In beliebigem System ($\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{P}/M \cdot t$)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \vec{r}(t) \cdot m_2/M + \vec{R}(t) \\ \vec{r}_2(t) &= -\vec{r}(t) \cdot m_1/M + \vec{R}(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Addiere gleichförmige Bewe-} \\ \text{gung zu } \vec{r}(t) \text{ dazu} \end{array}$$

- Bemerkung: Im ungebundenen Fall sind beide Massen in jedem Inertialsystem zur Zeit $t = \pm\infty$ im Unendlichen. Selbst bei sehr großem Massenunterschied gibt es kein Inertialsystem, in dem die schwerere Masse asymptotisch ruht. Eigenart der langen Reichweite des Potentials $-\alpha/r$.

(Beweis: Übungsaufgabe)

1.7.3 Elastische Streuung von Teilchen

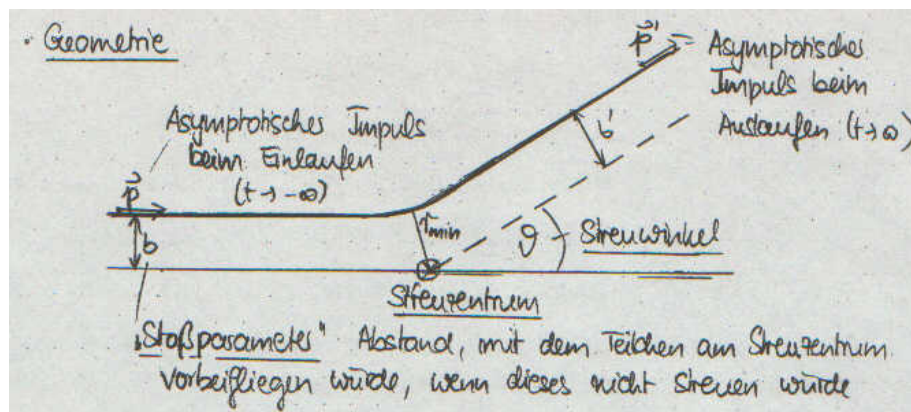
Betrachte nun beliebiges Potential $U(r)$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$

Frage: Wie lenken sich ungebundene Teilchen gegenseitig ab?

Vorweg: Rückführung auf Einteilchenproblem gemäß 1.2.1 S.10.

1.7.3.1 Streuung eines einzelnen Teilchen im Zentralpotential

- Geometrie



Der „Stoßparameter“ b ist der Abstand, mit dem das Teilchen am Streuzentrum vorbeifliegen würde, wenn dieses nicht streuen würde.

- Grundsätzlich gilt:

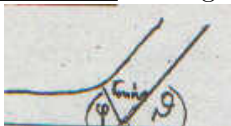
Energieerhaltung: $E = \text{const.} = \begin{cases} t \rightarrow -\infty: & p^2/2\mu \\ t \rightarrow +\infty: & p'^2/2\mu \end{cases} \Rightarrow p = p'$

Drehimpulserhaltung: $\vec{l} = \text{const.} = \begin{cases} t \rightarrow -\infty: & \vec{r}(t) \times \vec{p} \\ t \rightarrow +\infty: & \vec{r}(t) \times \vec{p}' \end{cases}$

$\leadsto$ Bahn liegt in einer „Streuebene“, aufgespannt von $\vec{p}$ und $\vec{p}'$

$\leadsto$ Betrag von l : $l = bp = b'p' \Rightarrow b = b'$

- Streuungswinkel ϑ hängt vom Stoßparameter b ab:



Berechnung nach 1.7.1.4 S.31: $\vartheta = \pi - 2\varphi$

mit $\varphi = - \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} l / \sqrt{2\mu(E - U(\tilde{r}) - l^2/2\mu\tilde{r}^2)}$

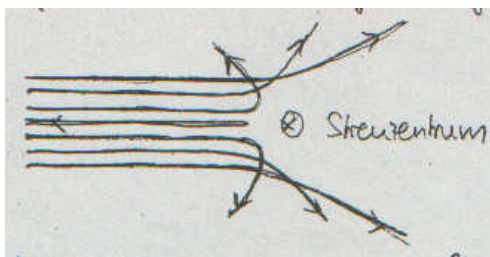
Mit $l = bp$, $E = \frac{p^2}{2\mu}$ folgt:

$$\vartheta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} \frac{b}{\sqrt{1 - 2\mu U(\tilde{r})/p^2 - b^2/\tilde{r}^2}}$$

1.7.3.2 Streuung eines Strahls von Teilchen

In der Praxis typischerweise viele gleichartige Streuereignisse

$\leadsto$ Streuung eines „Strahls“ von gleichartigen Teilchen



- * Charakterisierung durch „differentiellen Streuquerschnitt“:

Zahl der Teilchen, die in einem bestimmten Winkelbereich gestreut werden, pro einlaufendem Teilchenstrom

- Einfallender Strahl

Impuls $\vec{p}$

Teilchenstromdichte $J = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Querschnittsfläche } A_0}$



- Auslaufende Teilchen

Impulse $\vec{p}'$ mit $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$

$\leadsto$ Kugel von möglichen Richtungen $\vec{p}'/|\vec{p}'|$



Teilbereich von Impulsen $\vec{p}'$ wird durch „Raumwinkel“ charakterisiert: „Flächenanteil“ auf Einheitskugel von möglichen $\vec{p}'/|\vec{p}'|$

Infinitesimaler Raumwinkel: $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$



- Differentieller Streuquerschnitt

Aus der Zahl der Teilchen dN pro Zeit, die in den Raumwinkel $d\Omega$

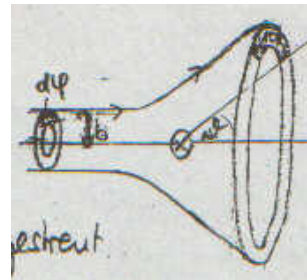
gestreut werden:
$$dN = d\Omega \cdot J \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$: Differentieller Streuquerschnitt, Eigenschaft des Streupotentials

* Berechnung von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

- Für gegebenes Potential $U(r)$ sei Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Stoßparameter bekannt: $\vartheta(b)$

- Anzahl der Teilchen
mit Stoßparameter in $[b, b + db]$
und Azimutwinkel in $[\varphi, \varphi + d\varphi]$:
 $dN = J b db d\varphi$



- Diese Teilchen werden in Raumwinkel $d\Omega = |\sin \vartheta d\vartheta| d\varphi$ gestreut

- (i) Falls $\vartheta(b)$ eindeutig umkehrbar ist: $b(\vartheta)$

$$\leadsto dN = J b db d\varphi = d\Omega J \frac{d\sigma}{d\Omega} = |\sin \vartheta d\vartheta| d\varphi J \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

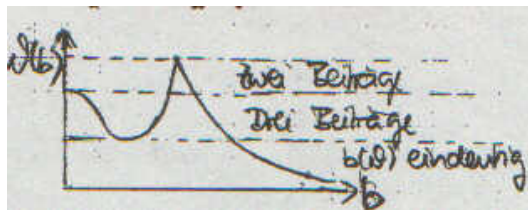
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \frac{db}{d\vartheta} \right|$$

- (ii) Falls es zu einem gegebenen ϑ mehrere b gibt

$\leadsto$ mehrere Stoßparameterbereiche streuen in den gleichen Winkelbereich

$\leadsto$ Beiträge (b_α =Lösungen von $\vartheta(b_\alpha) = \vartheta_0$) müssen aufsummiert werden: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{b_\alpha} \left| \frac{b_\alpha(\vartheta)}{\sin \vartheta} \frac{db_\alpha}{d\vartheta} \right|$

Beispiel:



- (iii) Spezialfälle:

(1) $\frac{d\vartheta}{db} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$: „Regenbogenstreuung“

(2) $\sin \vartheta = 0, \quad b \neq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$:

„Glory“ ($\theta = 0$) oder Rückwärtsstreuung ($\theta = \pi$)

(3) $\sin \vartheta = 0, \quad b = 0 \Rightarrow$ alles möglich!

1.7.3.3 Rutherfordstreuung

Streuung speziell an einem Potential der Form $U(r) = -\alpha/r$
(z.B. Streuung an geladenen Teilchen)

Zusammenhang $\vartheta(b)$ bekannt aus 1.7.2.3 S.32:

$$\vartheta = 2 \arctan \sqrt{\frac{\mu \alpha^2}{2El^2}} \text{ mit } l = bp, \ E = \frac{p^2}{2\mu} \Rightarrow \boxed{\vartheta = 2 \arctan \frac{|\alpha|}{2Eb}}$$

$$\leadsto b(\vartheta) = \frac{|\alpha|}{2E} \cdot \frac{1}{\tan(\vartheta/2)}$$

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{|\alpha|}{4E} \cdot \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}$$

$\Rightarrow$ Berechne Differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \cdot \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|$
durch Einsetzen (mit $\sin(\theta) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$):

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\alpha|^2}{16E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}}$$

1.8 Wissensfragen

1. Was versteht man unter einem Massenpunkt?
2. Wie kann man die Bahn eines Massenpunktes parametrisieren? Wie berechnet man in einer solchen Parametrisierung Geschwindigkeit und Beschleunigung?
3. Was versteht man unter einer Orthonormalbasis?
4. Wie transformieren sich die Koordinaten eines physikalischen Vektors unter Koordinatentransformation zwischen zwei Orthonormalbasen?
5. Nennen Sie einige physikalische Größen, die durch Vektoren beschrieben werden.
6. Wie lautet das Superpositionsprinzip für Kräfte?
7. Was versteht man unter der trägen Masse?
8. Wie ist der Newtonsche Impuls eines Massenpunktes definiert?
9. Wie lautet das Newtonsche Kraftgesetz?
10. Was ist ein Inertialsystem?
11. Beschreiben und diskutieren Sie die drei Newtonschen Postulate.
12. Was versteht man unter der Galilei-Transformation und wie lautet sie?
13. Warum treten in beschleunigten Bezugssystemen Scheinkräfte auf?
14. Was ist die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft? Geben Sie Beispiele. Wie lauten die Gleichungen dafür?
15. Was ist ein Kraftfeld? Was versteht man konkret unter einem konservativen und einem dissipativen Kraftfeld? Geben Sie jeweils ein Beispiel.
16. Was versteht man unter einem Potential?
17. Unter welchen Bedingungen besitzt ein Kraftfeld ein Potential? (Erläutern Sie die lokale und die globale Formulierung).
18. Welche Form muß eine konservative Zentralkraft haben? Warum?
19. Wie ist die kinetische Energie definiert?
20. Wie sind Arbeit und Leistung definiert?
21. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Erhaltungssätzen (z.B. Energie, Impuls, Drehimpuls) und den Symmetrieeigenschaften in einem System.
22. Was versteht man konkret unter "Homogenität der Zeit", "Homogenität des Raums", und "Isotropie des Raums"?
23. Wie ist der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten definiert?
24. Wie bewegt sich der Schwerpunkt eines Systems, in dem der Impuls erhalten ist?
25. Unter welchen Voraussetzungen gilt Energieerhaltung?
26. Unter welchen Voraussetzungen gilt Impulserhaltung?
27. Unter welchen Voraussetzungen gilt Drehimpulserhaltung?
28. Geben Sie ein Beispiel für ein System, in dem nur Energieerhaltung gilt, aber keine Impuls- und Drehimpulserhaltung.
29. Welche Erhaltungssätze gelten in einem System von N Teilchen zwischen zwei parallelen Platten und warum?

30. Welche Erhaltungssätze gelten in einem Zentralpotential $U(r)$?
31. Was besagt der Keplersche Flächensatz?
32. Warum bewegen sich Teilchen, deren Drehimpuls erhalten ist, immer in einer Ebene? Wie kann man diese Ebene beschreiben?
33. Was versteht man unter Schwerpunkt- und Relativkoordinaten?
34. Was ist die reduzierte Masse?
35. Was versteht man unter einem Zentralpotential? Welche Form muss eine konservative Zentralkraft haben?
36. Was für mögliche Bahnen kann ein Teilchen in einem Zentralpotential der Form $U(r) = -\alpha/r$ ausführen?
37. Was versteht man unter dem differentiellen Streuquerschnitt?
38. Was versteht man unter dem totalen Streuquerschnitt?
39. Was ist Rutherford-Streuung?

Kapitel 2

Lagrange-Mechanik

© Copyright 2014 Friederike Schmid¹

Motivation:

Bis jetzt: Newtonsche Mechanik

N Teilchen, Koordinaten $\vec{r}_i$, Kräfte $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$
(ggf. Potential $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$)

kartesische Koordinaten (manchmal umgeschrieben)

So kann man im Prinzip alles beschreiben

Aber: Oft ungünstig. Besser wäre es häufig, von vornherein mit anderen Variablen („Koordinaten“) zu arbeiten.

Beispiele:

* Pendel



Kräfte: Schwerkraft $\vec{F}_g$, Fadenkraft $\vec{F}_{\text{Faden}}$

Aber: $\vec{F}_{\text{Faden}}$ eigentlich uninteressant

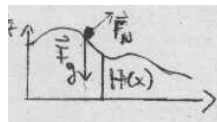
Interessant ist nur, dass $\vec{F}_{\text{Faden}}$ gerade dafür sorgt, dass l konstant bleibt!

→ Zwangsbedingung $l = \text{const.}$

wird gewährleistet durch Zwangskraft $\vec{F}_{\text{Faden}}$

Ökonomische Behandlung nutzt Kenntnis der Zwangsbedingung aus und arbeitet nur noch mit einer Koordinate φ .

* Bewegung auf strukturierter Oberfläche



Körper gleitet auf einem „Gebirge“

feste Höhe: $z = H(x, y)$

Kräfte: Schwerkraft $\vec{F}_g$, Normalkraft von Ebene $\vec{F}_N$

Normalkraft sorgt dafür, dass Körper immer auf Ebene bleibt.

¹Prof. Dr. Friederike Schmid, Vorlesung Theoretische Mechanik, Universität Mainz, WS 2014/2015. Letzte Änderung am 24.11.16.

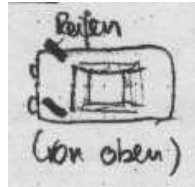
Bewegungsgleichungen nach Newton:

Man müsste $\vec{F}_g$ zerlegen in Anteil $\vec{F}_{\parallel}$ parallel zur Oberfläche und $\vec{F}_{\perp}$ senkrecht zur Oberfläche. $\vec{F}_{\parallel}$ beschleunigt den Körper parallel zur Oberfläche. Dann muss diese Bewegung noch umgerechnet werden in die entsprechende Bewegung in x -Richtung.

→ kompliziertes geometrisches Problem, fehleranfällig

Frage: Gibt es ein einfaches, sicheres Verfahren, die Bewegungsgleichungen für einen solchen Fall aufzustellen?

* Auto



Freiheitsgrade: Zwei (in der Ebene)

Aber: Nur Bewegung entlang der Vorderräder bzw. quer zur Radachse $\vec{e}^{(\text{Achse})}$ ist erlaubt. (keine seitliche Bewegung)

2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

2.1.1 Klassifizierung von Zwangsbedingungen

skleronom: zeitunabhängig

rheonom: zeitabhängig

holonom: lassen sich durch geschlossene Gleichung der Form $f(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = 0$ beschreiben

(z.B. Pendel: $f(x, z) := x^2 + z^2 - l^2 = 0$)

Strukturierte Oberfläche: $f(x, y, z) := z - H(x, y) = 0$)

nicht holonom: Keine Gleichung der Form $f(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = 0$ möglich.

Eventuell lässt sich differentielle Gleichung aufstellen

$$\left(\sum_i \vec{a}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) d\vec{r}_i = a_0(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) dt \right)$$

(z.B. Auto: $d\vec{r} \cdot \vec{e}^{\text{Achse}}(t) = 0$)

2.1.2 Zwangskräfte

Kräfte $\vec{Z}_i$, die zusätzlich zu den bekannten Kräften $\vec{F}_i$ wirken, um die Zwangsbedingungen sicherzustellen.

(z.B. Pendel: Fadenkraft)

Strukturierte Oberfläche: Normalkraft auf Oberfläche etc.)

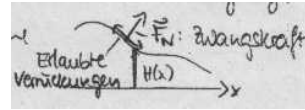
Es gilt: $\boxed{\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i}$

im Allgemeinen uninteressant, Berechnung nur manchmal nötig (z.B. beim Pendel, wenn Faden nur gewisse Spannung aushält!)

2.1.3 Prinzip der virtuellen Verrückungen

Bisherigen Beispiele haben gezeigt: Zwangskräfte senkrecht auf möglichen Verrückungen des Systems (alle möglichen Verrückungen, nicht zu verwechseln mit tatsächlicher Bewegung)

Etwa bei strukturierter Oberfläche



Konkreter: Definiere „Virtuelle Verrückungen“ $\delta \vec{r}_i$:

Alle infinitesimalen Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen zu gegebenem festen Zeitpunkt vereinbar sind.

Falls Zwangsbedingungen skleronom: Virtuellen Verrückungen $\delta \vec{r}_i$ schließen tatsächliche Bewegungen $d\vec{r}_i$ ein.

Falls Zwangsbedingungen rheonom (zeitabhängig): Tatsächliche Bewegungen $d\vec{r}_i$ u.U. virtuell (bei eingefrorener Zeit) nicht möglich, $d\vec{r}_i \neq \delta \vec{r}_i$

Prinzip der virtuellen Verrückungen: Zwangskräfte stehen senkrecht auf allen

möglichen virtuellen Verrückungen: $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_i$

2.1.4 d'Alembertsches Prinzip

Alternative Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, in der unbekannte Zwangskräfte nicht mehr explizit vorkommen.

Aus $\sum_i \vec{Z}_i \delta \vec{r}_i = 0$ und $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ folgt: $\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$
für alle erlaubten virtuellen Verrückungen $\delta \vec{r}_i$

$\leadsto$ Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Speziell: Keine Zwangsbedingungen $\leadsto$ alle $\delta \vec{r}_i$ erlaubt

$\Rightarrow \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ für alle $\delta \vec{r}_i \Rightarrow \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$ (Newtonsche Gleichungen)

2.2 Lagrange-Gleichungen erster Art

Verfahren, Zwangskräfte aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu gewinnen und Bewegungsgleichungen aufzustellen

2.2.1 Allgemein

Gegeben seien K Zwangsbedingungen in der differentiellen Form:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^N \vec{a}_i^{(\alpha)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) \cdot d\vec{r}_i = a_0^{(\alpha)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) dt \quad (\alpha = 1 \dots K)$$

$\leadsto$ Virtuelle Verrückungen $\delta \vec{r}_i$ erfüllen $\sum_i \vec{a}_i^{(\alpha)} \delta \vec{r}_i = 0$ (feste Zeit $\Rightarrow dt = 0$)

Vergleiche mit Prinzip der virtuellen Verrückungen: $\sum_i \vec{Z}_i \delta \vec{r}_i = 0$

$\leadsto$ Ansatz für Zwangskräfte: $\vec{Z}_i = \sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)} \vec{a}_i^{(\alpha)}$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gleichungen erster Art:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)} \vec{a}_i^{(\alpha)}$$

Bemerkung: Holonome Zwangsbedingungen $f^{(\alpha)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = 0$ lassen sich in

$$\text{die Form } (*) \text{ bringen mit } \boxed{\vec{a}_i^{(\alpha)} = \vec{\nabla}_i f^{(\alpha)}, \quad a_0^{(\alpha)} = -\frac{\partial f}{\partial t}}$$

$$(f^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow \frac{df^{(\alpha)}}{dt} = 0 = \sum_i (\vec{\nabla}_i f^{(\alpha)}) \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial t} \Rightarrow \sum_i (\vec{\nabla}_i f^{(\alpha)}) d\vec{r}_i = -\frac{\partial f}{\partial t} dt)$$

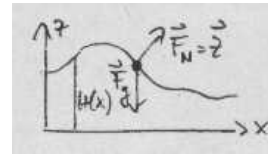
Vorgehensweise in der Praxis

- (i) Stelle Zwangsbedingung auf, bringe sie in die Form (*)
 - (ii) Stelle Lagrange-Gleichung erster Art auf
 - (iii) Wähle $\lambda^{(\alpha)}$ so, dass Zwangsbedingungen erfüllt sind
 - (iv) Löse die Gleichungen
- ((iii) und (iv) können u.U. auch vertauscht werden.)

2.2.2 Beispiele

* Bewegung in "Gebirge" in 2 Dimensionen (x, z)

Bekannte Kraft: Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$



(i) Zwangsbedingung: $f(x, z) = z - H(x) = 0 \Rightarrow df = -H'(x)dx + dz = 0$
 $\Rightarrow$ Differentielle Bedingung: $\vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$ mit $\vec{a} = (-H'(x), 1)$

(ii) Lagrange-Gleichung erster Art: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \lambda \cdot \vec{a} = (-\lambda H', -mg + \lambda)$

(iii) Bestimmung von λ aus Zwangsbedingung $\vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0 &\Rightarrow \vec{a} \cdot m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{p}) \Big|_{t=0} = 0 \text{ und } \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{p}) = 0 \\ &\leadsto \vec{a} \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{a}} \vec{p} = \vec{a} \dot{\vec{p}} + \frac{d\vec{a}}{dx} \cdot \dot{x} \vec{p} = 0 \\ &\quad \left| \vec{a}(x) = \begin{pmatrix} -H' \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{d\vec{a}}{dx} = \begin{pmatrix} -H'' \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{p} = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}; \dot{\vec{p}} = \vec{F} + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} -\lambda H' \\ -mg + \lambda \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \leadsto \lambda H'^2 - mg + \lambda - H'' \cdot m \dot{x}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = m(g + H'' \dot{x}^2) / (1 + H'^2) \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Zwangskraft: } \vec{Z} = \frac{m}{1+H'^2} \left(\underbrace{g}_{\text{Anteil der Schwerkraft}} + \underbrace{H'' \dot{x}^2}_{\text{Zentripetal-kraft}} \right) \cdot \begin{pmatrix} -H' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } \dot{\vec{p}} = \vec{F} + \vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \frac{m(g + \dot{x}^2 H''(x))}{1+H'^2} \begin{pmatrix} -H'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Auto, das mit einer Kraft $\vec{F}$ angeschoben wird

(i) Zwangsbedingung: $\vec{e}^{\text{Achse}}(t) \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}}(t)$.

(ii) Lagrange-Gleichung 1. Art: $\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \lambda \vec{a} = \lambda \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}}(t) + \vec{F}$

(iii) Bestimmung von λ aus $\vec{a} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{p}) &= \dot{\vec{a}} \cdot \vec{p} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{p} + \vec{a} \cdot (\vec{F} + \lambda \vec{a}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{a}} (\vec{F} \cdot \vec{a} + \vec{p} \cdot \dot{\vec{a}}) \quad \underbrace{\quad}_{|\vec{a}|=|\dot{\vec{e}}^{\text{Achse}}|=1} = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}} - m \vec{v} \cdot \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } \dot{\vec{p}} = \vec{F} + \lambda \vec{a} = \vec{F} - \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}} + m \vec{v} \cdot \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}})$$

* Auto auf schiefer Ebene $z = -\kappa x$ unter Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$

(i) Zwei Zwangsbedingungen:

$$(1): \vec{e}^{\text{Achse}}(t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^{(1)} = \vec{e}^{\text{Achse}}(t)$$

$$(2): f(x, y, z) = z + \kappa x = 0 \Rightarrow \kappa dx + dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^{(2)} = (\kappa, 0, 1)$$

(ii) Lagrange-Gleichung 1. Art: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}_g + \lambda^{(1)}\vec{a}^{(1)} + \lambda^{(2)}\vec{a}^{(2)}$

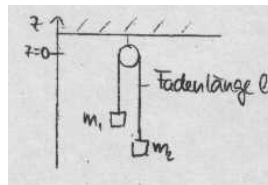
(iii) Bestimme $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ so, dass $d\vec{r} \cdot \vec{a}^{(\alpha)} = 0$ für $\alpha = 1, 2$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{a}^{(\alpha)} = 0 \text{ bzw. } \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{a}^{(\alpha)}) = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{a}^{(\alpha)} + \vec{p} \cdot \frac{d}{dt}\vec{a}^{(\alpha)} = 0$$

$$(\text{Hier: } \frac{d}{dt}\vec{a}^{(1)} = \dot{\vec{e}}^{\text{Achse}}, \frac{d}{dt}\vec{a}^{(2)} = 0)$$

$$\text{Mit } \dot{\vec{p}} = \vec{F}_g + \sum_{\alpha=1}^2 \vec{a}^{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)} \leadsto \text{Lineares Gleichungssystem für } \lambda^{(1,2)}.$$

* Atwoodsche Fallmaschine Beispiel für Lagrange-Gleichungen erster Art in einem System mit mehreren Massenpunkten



Betrachte nur z -Koordinaten z_i

Bekannte Kraft: Schwerkraft $F_i = -m_i g$

(i) Zwangsbedingung: $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l \stackrel{!}{=} 0$

$$\text{bzw. differentiell: } dz_1 + dz_2 = 0. \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^2 a_i dz_i \text{ mit } a_i = 1 \quad \forall i$$

(ii) Lagrangegleichung erster Art: $\dot{p}_i = F_i + \lambda a_i = -m_i g + \lambda$

(iii) Bestimmung von λ aus Zwangsbedingung $dz_1 + dz_2 = 0 \Rightarrow \dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} \right) \Big|_{t=0} = 0 \text{ und } \frac{d}{dt} \left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} \right) = \frac{\dot{p}_1}{m_1} + \frac{\dot{p}_2}{m_2} = 0$$

$$\leadsto (\text{Einsetzen}) \frac{-m_1 g + \lambda}{m_1} + \frac{-m_2 g + \lambda}{m_2} = 0 \Rightarrow \lambda = 2g / \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Zwangskraft: } Z_1 = Z_2 = 2g / \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } m_i \ddot{z}_i = -m_i g + 2g / \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

2.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Voraussetzungen im Folgenden:

- Betrachte Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen
 $\leadsto$ lassen sich in K Gleichungen $f^{(\alpha)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = 0$ fassen ($\alpha = 1 \dots K$)
- Alle Kräfte bis auf die Zwangskräfte lassen sich auf ein Potential zurückführen.

Ohne Zwangsbedingungen: $3N$ Freiheitsgrade, $3N$ Bewegungsgleichungen

Mit Zwangsbedingungen: $m = 3N - K$ Freiheitsgrade

$\leadsto$ Beschreibung durch nur noch m Bewegungsgleichungen sollte reichen.

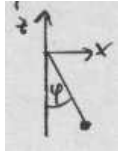
Ziel: Allgemeines Verfahren, diese m Bewegungsgleichungen aufzustellen.

Vorgehen: Beschreibe System durch m Variablen $q_1 \cdots q_m$.

Folge schrittweise Definitionen in 2.1 S.42. Das d'Alembertsche Prinzip (2.1.4 S.43) wird zu Bewegungsgleichungen für die q_i führen.

2.3.1 Generalisierte Koordinaten

Beschreibe durch Variablen $(q_1 \cdots q_m)$ mit $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \cdots q_m, t)$

(Beispiel Pendel:  Raumkoordinaten x, z
Zwangsbedingung $x^2 + z^2 - l^2 = 0$
Generalisierte Koordinate: φ mit $\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ z = -l \cos \varphi \end{cases}$)

$\leadsto$ Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ lässt sich auch als Funktion der generalisierten Koordinaten ausdrücken: $U(q_1 \cdots q_m, t)$

(Beispiel Pendel: $U(x, z) = z \cdot m \cdot g = -l \cos \varphi \cdot m \cdot g = U(\varphi)$)

2.3.2 Generalisierte Kräfte

Definition: Reale Kräfte $\vec{F}_i \leadsto$ Generalisierte Kräfte: $Q_j := \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Definition lässt sich auf beliebige Kräfte (Zwangskräfte und Potentialkräfte) anwenden. Motivation wird weiter unten ersichtlich.

Speziell Potentialkräfte: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \leadsto Q_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1 \cdots q_m, t)$

$$(Q_j = -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(\vec{r}_1(q_1 \cdots q_m, t) \cdots \vec{r}_N(q_1 \cdots q_m, t), t))$$

2.3.3 Generalisiertes Prinzip der virtuellen Verrückungen

Erlaubte virtuelle Verrückungen $\delta \vec{r}_i$ hängen zusammen mit Verschiebungen

(„Variationen“) δq_j der Variablen q_j : $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$

$\Rightarrow$ Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen wird

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{\vec{Z}_i}_{\text{Zwangs-kräfte}} \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^m \left(\underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\text{generalisierte Zwangskräfte nach 2.3.2}} \right) \delta q_j \stackrel{!}{=} 0$$

2.3.4 d'Alembertsches Prinzip und Bewegungsgleichungen

Das d'Alembertsche Prinzip besagt: $\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ für erlaubte $\delta \vec{r}_i$

Daraus folgt analog zu 2.3.3 $\sum_{j=1}^m \delta q_j \left[\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{\vec{p}}_i}_{(i)} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{F}_i}_{(ii)} \right] = 0$

Betrachte erst (ii): Laut Voraussetzung gilt $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$ (Potentialkraft)

Daraus folgt $\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \vec{F}_i = Q_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1 \cdots q_m, t)$ nach (2.3.2 S.46)

Ferner: (i) $\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$ mit $T(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, t)$: kinetische Energie
(Beweis: Betrachte $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$)

$$\text{Aus } \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i(q_1 \dots q_m, t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \text{ folgt: } \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \\ \leadsto \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ \leadsto \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\sum_{j=1}^m \delta q_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right] = 0$ für alle δq_j

$$\Rightarrow [\dots] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U) \quad (\text{wg. } \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0)$$

Fazit:

Definiere Lagrange-Funktion:

$$L(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, t) = T - U$$

Dann gelten: Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

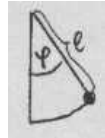
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$\Rightarrow$ Gewünschter Satz von m Bewegungsgleichungen !!!

Bemerkung: Gilt unabhängig davon, ob tatsächlich Zwangsbedingungen vorliegen. Zum Beispiel kann $(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \rightarrow (q_1 \dots q_{3N})$ einfach Umwandlung von kartesischen Koordinaten in andere, „günstigere“ Variablen sein.
 $\leadsto$ Lagrange-Gleichungen liefern zugehörigen Bewegungsgleichungen.

2.3.5 Beispiele

* Pendel



Kinetische Energie: $T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$

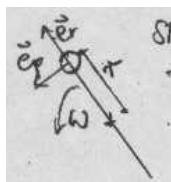
Potential $U = -mgl \cos \varphi$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - U$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \text{Lagrange-Gleichung: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \ddot{\varphi} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

* Perle auf rotierendem Stab



Stab rotiert mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$

Perle gleitet reibungsfrei auf dem Stab, Lage r

(Beispiel für rheonome Zwangsbedingungen)

Geschwindigkeit der Perle: $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \omega \vec{e}_\varphi$

($\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$; $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r$: Einheitsvektor in Drehebene)

Kinetische Energie: $T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$

Potential: $U = 0$ (Stab ist waagerecht, Schwerkraft spielt keine Rolle)

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion: $L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) = L(r, \dot{r})$

$$\Rightarrow \text{Lagrange-Gleichung: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial r} = m \omega^2 r \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$$

NB: Lösung hat allgemeine Form $r(t) = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a e^{\omega t}$

Energie bleibt nicht erhalten.

(Zwangsbedingung zerstört Homogenität der Zeit)

2.4 Invarianzen und Erhaltungsgrößen

Betrachte ein System, das durch eine Lagrange-Funktion $L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$ beschrieben wird. Aus Invarianzen der Lagrange-Funktion bei bestimmten Variablentransformationen ($\leftrightarrow$ Symmetrien des Systems) lassen sich Erhaltungsgrößen ableiten (Verallgemeinerung und Erweiterung von 1.5 S.22).

2.4.1 Zyklische Variablen

Falls L von einer Variablen q_i nicht explizit abhängt: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$ eine Erhaltungsgröße (wegen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$)

Die Variable q_i heißt dann zyklische Variable.

Beispiel: N Nichtwechselwirkende freie Teilchen (1 Raumdimension)

Lagrange-Funktion: $L(x_1 \cdots x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow$ alle x_i sind zyklische Variablen! $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$ ist erhalten für alle i .

2.4.2 Zeitunabhängigkeit

Falls L von der Zeit t nicht explizit abhängt: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $\boxed{H := \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L}$ eine Erhaltungsgröße

(wegen: $\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} (\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{d}{dt} L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$
 $= \sum_{j=1}^m (\ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \sum_{j=1}^m (\ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j}) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0 = 0 \quad \checkmark$)

Speziell: $L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 - U$

$\leadsto E = \sum_i \dot{x}_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{m_i \dot{x}_i} - L = \sum m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 + U = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 + U = T + U$

Allgemeiner: Bei skleronomen gleichbedeutend mit der nach Homogenität der Zeit, und die Erhaltungsgröße ist die Energie. Bei rheonomen Zwangsbedingungen ist das nicht unbedingt der Fall!

Beispiele:

* Pendel (siehe 2.3.5 S.47)

$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mlg \cos(\varphi)$ nicht explizit zeitabhängig!

$\Rightarrow H = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L$ (mit $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}$)

$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mlg \cos(\varphi) = E$ (Energie) ist erhalten.

* Perle auf rotierendem Stab (siehe 2.3.5 S.47)

$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$ nicht explizit zeitabhängig!

$\Rightarrow H = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 - r^2 \omega^2)$ ist erhalten.

Aber: H ist nicht die Energie ($H \neq E$)!

Energie $E = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$ ist nicht erhalten!

2.4.3 Der Satz von Emmy Noether

Vorab: Addiert man zu der Lagrange-Funktion eine totale Zeitableitung hinzu, $L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt}D(q_1 \cdots q_m, t)$, so bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert. (Beweis: in Lagrange-Gleichungen 2. Art einsetzen, Übungsaufgabe)

Satz: Die Lagrange-Funktion $L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$ eines Systems sei "quasi-invariant" unter einer kontinuierlichen Symmetrie-Transformation $K_a : (q_1 \cdots q_m) \rightarrow (\tilde{q}_1(a) \cdots \tilde{q}_m(a))$ (hier ist a ein kontinuierlicher Parameter, $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(a)$ und $(\tilde{q}_i(0) = q_i)$, vgl. 1.5 S.22).

Quasi-invariant heisst, L ist invariant bis auf eine totale Zeitableitung

$$L(\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_m, \dot{\tilde{q}}_1 \cdots \dot{\tilde{q}}_m, t) = L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t) + \frac{d}{dt}D(q_1 \cdots q_m, t; a)$$

Dann gibt es ein Integral der Bewegung (eine Erhaltungsgröße)

$$J(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \left(\frac{d\tilde{q}_j(a)}{da} \right)_{a=0} - \left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)_{a=0}$$

$$\begin{aligned} \text{(Beweis: Aus Quasi-Invarianz folgt: } \frac{d}{da} L(\tilde{q}_1(a) \cdots \tilde{q}_m(a), \dot{\tilde{q}}_1(a) \cdots \dot{\tilde{q}}_m(a), t) \Big|_{a=0} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial D}{\partial a} \Big|_{a=0} \\ \frac{d}{da} L(\tilde{q}_1(a) \cdots \tilde{q}_m(a), \dot{\tilde{q}}_1(a) \cdots \dot{\tilde{q}}_m(a), t) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_j} \frac{d\tilde{q}_j}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \frac{d\dot{\tilde{q}}_j}{da} \right)_{a=0} \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{d\tilde{q}_j}{da} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_j}{da} \right) \right)_{a=0} = \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \frac{d\tilde{q}_j}{da} \right)_{a=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \left(\frac{d\tilde{q}_j}{da} \right)_{a=0} \right] \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \left(\frac{d\tilde{q}_j}{da} \right)_{a=0} - \left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)_{a=0} \right] &= 0 \Rightarrow \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \left(\frac{d\tilde{q}_j}{da} \right)_{a=0} - \left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)_{a=0} \right] = \text{const. } \checkmark \end{aligned}$$

Folgerungen:

- (i) Zeit-Translationen: $\tilde{q}_i(t) = q_i(t+a) \stackrel{a \rightarrow 0}{\approx} q_i(t) + a \dot{q}_i(t)$
 Allgemein gilt: $L(\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_m, \dot{\tilde{q}}_1 \cdots \dot{\tilde{q}}_m, t+a) = L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t) + a \frac{d}{dt}L$
 Falls L nicht explizit zeitabhängig, ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), ist L quasi-invariant:
 $L(\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_m, \dot{\tilde{q}}_1 \cdots \dot{\tilde{q}}_m) = L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m) + \frac{d}{dt}D(t, a)$ mit $D(t, a) = aL$
 $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße: $J = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{d\tilde{q}_j(a)}{da} \right)_{a=0}}_{\dot{q}_j} - \underbrace{\left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)_{a=0}}_L = \sum_{j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = H$
 (Reproduziert 2.4.2 !)
- (ii) Falls $(q_1 \cdots q_m) \cong$ kartesische Raumkoordinaten $(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$
 $\Rightarrow$ Aus Noether-Theorem folgt 1.5 S.22
 (Homogenität der Zeit $\rightarrow$ Energieerhaltung (s. (i))
 Homogenität des Raums $\rightarrow$ Impulserhaltung
 Isotropie des Raums $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung)
 z.B. Impulserhaltung in einer Dimension:
 $L(x_1 \cdots x_N, \dot{x}_1 \cdots \dot{x}_N, t) = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1 \cdots x_N, t)$
 Falls L invariant unter $K_a : x_i \rightarrow \tilde{x}_i(a) = x_i + a$
 $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße: $J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \left(\frac{d\tilde{x}_i(a)}{da} \right)_{a=0}$
 mit $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_i$, $\frac{d\tilde{x}_i(a)}{da} = 1$
 $\Rightarrow J = \sum_{i=1}^N p_i$: Gesamtimpuls bleibt erhalten.
 Allgemein: Rechnungen analog zu 1.5, daher nicht wiederholt.

2.5 Das Hamiltonsche Prinzip

Alternativer Zugang, äquivalent zu Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Gegeben sei ein System mit m Freiheitsgraden q_j (generalisierte Koordinaten) und bekannter Lagrange-Funktion $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$; Notation $\underline{q} = (q_1 \cdots q_m)$.

Definiere Wirkung einer "Trajektorie" $\underline{q}(t)$ in dem Zeitintervall $[t_0, t_1]$:

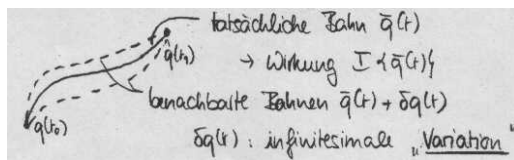
$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)$$

2.5.1 Das Prinzip

Die Bewegung eines Systems zwischen zwei Zeiten t_0 und t_1 bei vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten $\underline{q}(t_0)$, $\underline{q}(t_1)$ verläuft derart, dass die Wirkung $I = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ extremal wird.

(im Allgemeinen minimal. „Prinzip der kleinsten Wirkung“)

* Was bedeutet das?



tatsächliche Bahn $\bar{q}(t)$

→ Wirkung $I[\bar{q}(t)]$

benachbarte Bahnen $\bar{q}(t) + \delta \underline{q}(t)$

$\delta \underline{q}(t)$ infinitesimale Variation

→ Wirkung $I[\bar{q}(t) + \delta \underline{q}(t)]$

„I minimal“ heißt: $I[\bar{q}] < I[\bar{q} + \delta \underline{q}]$ für alle $\delta \underline{q}$

„I extremal“ heißt: $\delta I := I[\bar{q} + \delta \underline{q}] - I[\bar{q}] = 0 + \underbrace{\mathcal{O}((\delta q)^2)}$

Abweichung der Ordnung $(\delta q)^2$

* Mathematisch etwas präziser

Wirkung I ist extremal, wenn für die differenzierbaren Wege $\underline{\eta}(t)$ mit $\underline{\eta}(t_0) = \underline{\eta}(t_1) = 0$ gilt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I[\bar{q} + \varepsilon \underline{\eta}] - I[\bar{q}]) = 0$.

Sei nun $I[\bar{q} + \delta \underline{q}] - I[\bar{q}] = 0$ für alle Variationen $\delta \underline{q}$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \{ L(\bar{q} + \delta \underline{q}, \bar{\dot{q}} + \delta \dot{\underline{q}}, t) - L(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t) \}$$

- Taylorentwicklung des Integranden um $\bar{q}_j(t)$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \mathcal{O}((\delta q)^2) \right\}$$

- Partielle Integration bzgl. $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$

$$= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right\}$$

- $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \text{ für alle } \{ \delta q_j \}$$

⇒ Da die δq_j unabhängig sind, folgt: $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$

↪ Hamilton-Prinzip ist äquivalent zu Lagrange-Gleichungen zweiter Art.

- * Bemerkung: Rechnung oben ist ein Beispiel für die Lösung eines Extremalproblems mit Hilfe von Variationsrechnung. Führt oft (wie hier) auf Differentialgleichungen, den sogenannten "Euler-Lagrange Gleichungen".

Beispiele für Extremalprobleme in anderen Bereichen der Physik:

Castigliano-Prinzip (Elastostatik), Fermatsches Prinzip (Strahlenoptik), Jaynesches Prinzip (statistische Physik).

2.5.2 Hamilton-Prinzip mit zusätzlichen Zwangsbedingungen

Zugang über Hamilton-Prinzip ermöglicht Kombination von Lagrange-Gleichungen erster und zweiter Art - z.B. wenn Zwangsbedingungen teilweise holonom und teilweise nicht holonom sind.

Gegeben: m generalisierte Koordinaten q_j , und Lagrange-Funktion $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$
Aber: q_j nicht unabhängig, zusätzliche Zwangsbedingungen liegen vor.

Einfachheitshalber zunächst nur eine Zusatzbedingung. Unterscheide zwischen

- (i) Zwangsbedingung holonom: $f(\underline{q}, t) = 0$

Erweitere Hamilton-Prinzip um "Lagrange-Multiplikator" Term $\lambda(t)$ (siehe Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden")

- Fordere, dass $I - \int_{t_0}^{t_1} dt \lambda(t) f(\underline{q}, t)$ extremal

→ Variationsrechnung: $I[\underline{\bar{q}} + \delta \underline{q}] - I[\underline{\bar{q}}] - \int_{t_0}^{t_1} dt \lambda(t) \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i \stackrel{!}{=} 0$

⇒ Bewegungsgleichungen: $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial q_j}$

- Wähle $\lambda(t)$ so, dass Zwangsbedingung erfüllt ist.

- (ii) Zwangsbedingungen nichtholonom, aber lassen sich in differentieller

Form ausdrücken: $\sum_{j=1}^m a_j(\underline{q}, t) dq_j = a_0(\underline{q}, t) dt$

Vergleiche mit differentieller Form der holonomen Zwangsbedin-

gung: $\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$ (aus: $f \equiv 0 \Rightarrow \frac{df}{dt} \equiv 0$)

→ Legt Verallgemeinerung von (i) nahe:

$$I[\underline{\bar{q}} + \delta \underline{q}] - I[\underline{\bar{q}}] - \int_{t_0}^{t_1} dt \lambda(t) \sum_{i=1}^m a_i \delta q_i \stackrel{!}{=} 0$$

⇒ Bewegungsgleichungen: $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \lambda(t) \cdot a_j(\underline{q}, t)$

Mehrere Zwangsbedingungen $a_j^{(\alpha)}$: Analog $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)}(t) a_j^{(\alpha)}$

(für jede Zwangsbedingung ein Lagrange-Multiplikator $\lambda^{(\alpha)}(t)$)

2.6 Verallgemeinerte Lagrange-Formalismen

Bis jetzt: Existenz eines geschwindigkeitsunabhängigen Potentials $U(q_1, \dots, q_m, t)$ wurde gefordert, war notwendig zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen.

Aber: Existenz eines Potentials nicht a priori zwingend. Die Hauptsache ist, dass die Lagrange-Funktion die richtigen Bewegungsgleichungen liefert. Unter dieser Voraussetzung dürfen auch andere Systeme mit dem Lagrange-Formalismus behandelt werden.

Weitere Möglichkeit: Erweiterung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art um einen Beitrag aus zusätzlichen Kräften $\vec{F}_i^{(R)}$, die sich nicht auf ein Potential zurückführen lassen. Erweiterte Lagrangegleichung hat dann die

$$\text{Form } \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = R_j} \quad \text{mit (vgl. 2.3.2 S.46)} \quad \boxed{R_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(R)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$$

(Herleitung analog 2.3.4 S.46: Teile Kräfte $\vec{F}_i$ in konservative und sonstige Kräfte auf: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U + \vec{F}_i^{(R)}$. Aus dem d'Alembertschen Prinzip $\sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0$ folgt zunächst $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0$ mit der generalisierten Kraft (vgl. 2.3.2 S.46) $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + R_j$.)

Prominente Beispiele für geschwindigkeitsabhängige Kräfte: Lorentzkraft (Kraft auf ein Teilchen im elektromagnetischen Feld) und Reibungskräfte

2.6.1 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Prominentestes Beispiel einer verallgemeinerten Lagrange-Funktion für ein System mit geschwindigkeitsabhängigen Kräften.

Ladung q ; elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$; magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$;

$$\text{Bewegungsgleichung: } \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{q \vec{E}}_{\text{elektrische Kraft}} + \underbrace{\frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}}_{\text{Lorentz-Kraft geschwindigkeitsabhängig!}}} \quad (*)$$

Es gilt (Vorgriff auf Vorlesung "Elektrodynamik" (Theorie 2)):

$\vec{E}, \vec{B}$ lassen sich durch „Potentiale“ $\phi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$ ausdrücken:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \phi}$$

Damit lässt sich eine Lagrange-Funktion aufstellen, die die richtigen Bewegungsgleichungen (*) erzeugt:

$$\begin{aligned} \boxed{L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q \cdot \phi + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = -q \frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha} + \frac{q}{c} \sum_\beta \dot{r}_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} = m \dot{r}_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha \right) \\ \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = m \ddot{r}_\alpha + \frac{q}{c} \sum_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta} \dot{r}_\beta + \frac{q}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + q \frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha} - \frac{q}{c} \sum_\beta \dot{r}_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha} \\ \Rightarrow m \ddot{r}_\alpha = q \left(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}}_{E_\alpha} \right) + \frac{q}{c} \sum_\beta \left(\underbrace{\dot{r}_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha} - \dot{r}_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}}_{[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_\alpha = [\vec{v} \times \vec{B}]_\alpha} \right) \\ \Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.6.2 Reibung und Dissipationsfunktion

Reibungskräfte: Beispiele für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, die sich nicht auf eine Lagrangefunktion zurückführen lassen.

(NB: Sind allerdings auch nicht "fundamental" – im Gegensatz zu z.B. Gravitationskräften oder elektromagnetische Kräften).

- * Allgemein: Reibungskraft $\vec{F}_i^{(R)} \rightarrow$ verallgemeinerte Reibungskraft $R_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \vec{F}_i^{(R)}$.
Berechnung von R_j über diese Formel ist im Allgemeinen mühsam!

- * Häufiger Spezialfall: Reibungskräfte auf Teilchen i sind der Geschwindigkeit des Teilchens entgegengesetzt: $\vec{F}_i^{(R)} \propto -\dot{\vec{r}}_i$. In diesem Fall kann man eine

Dissipationsfunktion $\mathcal{P}$ bestimmen, so dass $R_j = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{q}_j}$.

Konkret: $\vec{F}_i^{(R)} = -\lambda_i \dot{\vec{r}}_i \Rightarrow$ Rayleighsche Dissipationsfunktion: $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i |\dot{\vec{r}}_i|^2$

$$\text{Allgemeiner: } \vec{F}_i^{(R)} = -\lambda_i(v_i) \dot{\vec{r}}_i \Rightarrow \mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} \lambda_i(v') v' dv'$$

(Rechnung: Für $\vec{r}_i(q_1, \dots, q_m, t)$ gilt: $\dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$.

$$\Rightarrow R_j = -\sum_i \lambda_i(v_i) \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \lambda_i(v_i) \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i(v_i) \frac{\partial (\dot{\vec{r}}_i)^2}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{Andererseits } \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \int_0^{v_i} \lambda_i(v') v' dv' = \sum_i \lambda_i(v_i) v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i(v_i) v_i \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j}.$$

Mit $|\dot{\vec{r}}_i|^2 = v_i^2$ folgt $R_j = -\partial \mathcal{P} / \partial \dot{q}_j \quad \checkmark$.)

- * Folgerung für diesen Spezialfall: Lagrange-Gleichung kann durch einfachen

$$\text{Dissipationsterm ergänzt werden: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

$\Rightarrow$ Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen braucht man zwei Funktionen L und $\mathcal{P}$.

- * Beispiel: Pendel (vgl. 2.3.5 S.47) mit Luftreibung $\vec{F}^{(R)} = -\lambda \dot{\vec{r}}$.

Lagrange-Funktion (siehe 2.3.5 S.47):

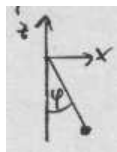
$$L(\phi, \dot{\phi}) = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi$$

$$\text{Dissipationsfunktion: } \mathcal{P} = \frac{\lambda}{2} v^2 = \frac{\lambda}{2} l^2 \dot{\phi}^2.$$

$\leadsto$ Verallgemeinerte Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2 \ddot{\phi} + mgl \sin \phi = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{\phi}} = -\lambda l^2 \dot{\phi}.$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi - \frac{\lambda}{m} \dot{\phi}.$$



2.7 Zusammenfassung: Lagrange-Mechanik

Konzepte:

- Verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \dots, q_m$
(ermöglicht u.a. eleganten Einbau von Zwangsbedingungen)
- Zentrale Größe, die die Dynamik charakterisiert:
Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$ $\rightarrow$ $\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]$
(NB: Allgemeiner als Potential $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ aus der Newtonschen Mechanik (1.7 S.28). Damit kann u.a. auch Lorentzkraft im elektromagnetischen Feld beschrieben werden (2.6.1 S.52)).
- Wirkung $I = \int_{t_0}^{t_1} dt L$ und Hamiltonsches Prinzip (I extremal)
- Systematischer Satz zum Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem

Techniken:

Lösung von Extremalproblemen mittels Variationsrechnung
Umgang mit Nebenbedingungen über Lagrange-Parameter

2.8 Wissensfragen

40. Was sind rheonome, skleronome, holonome Zwangsbedingungen? Geben Sie jeweils konkrete Beispiele.
41. Was sind Zwangskräfte? Nennen Sie die Zwangskräfte in Ihren Beispielen aus der vorigen Frage und geben Sie die Richtung an, in die diese zeigen.
42. Was sind virtuelle Verrückungen?
43. Unter welchen Umständen gehören tatsächliche Bewegungen eines Systems nicht zur Klasse der virtuellen Verrückungen? Begründen Sie Ihre Antwort.
44. Wie lautet das d'Alembertsche Prinzip?
45. Erklären Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art
46. Was versteht man unter generalisierten Koordinaten?
47. Was ist eine Lagrange-Funktion und wie berechnet man sie?
48. Unter welchen Bedingungen kann man Lagrange-Gleichungen zweiter Art aufstellen? Wie lauten diese Gleichungen?
49. Welche Größe ist erhalten wenn eine Lagrange-Funktion nicht von der Zeit abhängt?
50. Was ist eine zyklische Variable?
51. Was besagt das Noethersche Theorem? Geben Sie Beispiele.
52. Wie lautet das Hamiltonsche Prinzip bzw. Wirkungsprinzip? Wie ist in diesem Kontext die Lagrangesche Wirkung definiert?
53. Wie kann man das Hamiltonsche Prinzip formulieren, wenn die generalisierten Koordinaten zusätzlichen Zwangsbedingungen unterliegen?
54. Wie lautet die Lagrange-Funktion für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld?
55. Was versteht man unter der Dissipationsfunktion? Wann kann man sie formulieren und wie kann man in diesem Fall die Lagrange-Gleichungen zweiter Art um Reibungskräfte ergänzen?
56. Wie kann man Reibungskräfte einführen, wenn keine Dissipationsfunktion gefunden werden kann?

Kapitel 3

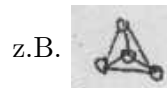
Starre Körper

© Copyright 2014 Friederike Schmid¹

Starre Körper: Ein Beispiel für Zwangsbedingungen

„Definition“ eines starren Körpers
(ähnlich wie beim Massenpunkt ein idealisiertes Konzept)

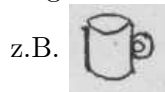
- System von Massenpunkten m_i mit festen Abständen



z.B. Gesamtmasse $M = \sum m_i$

→ offensichtlich klarer Fall von holonomen Zwangsbedingungen

- Verallgemeinerung: Kontinuierliche starre Massenverteilung



z.B. Dichteverteilung $\varrho(\vec{r})$
Gesamtmasse $M = \int d^3r \varrho(\vec{r})$

In beiden Fällen: Insgesamt sechs Freiheitsgrade

- Drei für Position

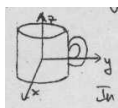
- Drei für Orientierung



($|\vec{u}| = 1$ und Richtung des Henkels)

3.1 Beschreibung der Bewegung (Kinematik)

3.1.1 Charakterisierung des Körpers



Wähle ein Bezugssystem, das sich mit dem Körper mitbewegt („körperfestes“ Koordinatensystem)

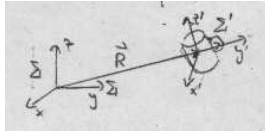
In diesem Bezugssystem gilt:

- Diskreter Fall: Jeder Massenpunkt m_i hat feste Koordinate $\vec{s}_i$
- Kontinuierlicher Fall: Unveränderliche Dichteverteilung $\varrho(\vec{s})$

¹Prof. Dr. Friederike Schmid, Vorlesung Theoretische Mechanik, Universität Mainz, WS 2014/2015. Letzte Änderung am 24.11.16.

Sinnvoll ist es, den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems in den Schwerpunkt zu legen ($\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$ bzw. $\vec{R} = \frac{1}{M} \int d^3r \varrho(\vec{r}) \vec{r}$).
So soll es in Zukunft geschehen.

3.1.2 Beschreibung des momentanen Zustandes



Zustand bzgl- „raumfestem“ Koordinatensystem Σ (Inertialsystem)

(i) Lage des Schwerpunktes $\vec{R}$

→ Drei Freiheitsgrade R_x, R_y, R_z

Definiere: $\vec{u} = \vec{r} - \vec{R}$: Koordinaten relativ zum Schwerpunkt

(ii) Orientierung des körperfesten Bezugssystems Σ'

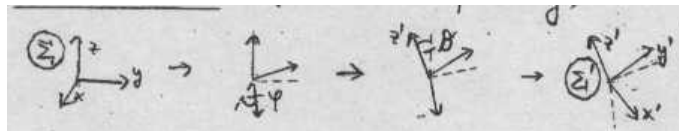
→ Drehmatrix $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{D}^T \vec{u} = \vec{s}$ bzw. $\vec{u} = \mathcal{D} \vec{s}$
($\vec{s}$: körperfeste Koordinaten)

$\mathcal{D}$ beschreibt Koordinatentransformation $\Sigma' \rightarrow \Sigma$

→ Drei Freiheitsgrade

Konkret z.B.

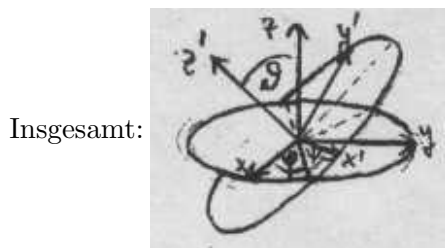
* Eulersche Winkel (z.B. Goldstein, Nolting)



- 1. Drehung um z-Achse, Winkel φ : $\mathcal{D}_\varphi^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 2. Drehung um x-Achse, Winkel ϑ : $\mathcal{D}_\vartheta^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$

- 3. Drehung um z-Achse, Winkel ψ : $\mathcal{D}_\psi^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Insgesamt:

$$\mathcal{D}^T = \mathcal{D}_\psi^T \mathcal{D}_\vartheta^T \mathcal{D}_\varphi^T$$

Freiheitsgrade: $(\psi, \vartheta, \varphi)$

- * Drehachse und Drehwinkel: Jede Drehung lässt sich als Drehung um eine Drehachse und einen Drehwinkel beschreiben.
 $\rightarrow$ Freiheitsgrade $\varphi: \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$ mit $|\vec{\varphi}|$: Drehwinkel, $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$: Drehachse
- * Cayley-Klein Parameter oder Quaternionen
 (siehe z.B. Goldstein)

3.1.3 Beschreibung der Bewegung

Bewegung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus:

- (i) Translationsbewegung des Schwerpunkts $\vec{R}$
- (ii) Rotation um eine Achse, die durch den Schwerpunkt geht.

Also: Für diskrete Massenpunkte: $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{u}_i$

Für kontinuierliche Verteilung: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{u}$

Anschaulich: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{u} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}}$

Aber: $|\vec{u}| = \text{const.}$ (Abstand zum Schwerpunkt unveränderlich)

$$\leadsto \frac{d}{dt} \vec{u}^2 = 2\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 0 \leadsto \vec{u} \perp \dot{\vec{u}} \quad \text{Rotation}$$



Formal: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{u}$, $\vec{u} = \mathcal{D}^T \vec{s}$ mit $\vec{s} = \text{const.}$ (körperfeste Koordinaten)

$$\rightarrow \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{(i)} + \underbrace{\dot{\vec{u}}}_{(ii)} \quad \text{mit } \dot{\vec{u}} = \dot{\mathcal{D}}^T \vec{s}$$

- Für ein Inertialsystem $\bar{\Sigma}$, das zur Zeit t_0 mit dem körperfesten Bezugssystem übereinstimmt ($\mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$, $\vec{u} = \vec{s}$ zur Zeit t_0), gilt:
 $\dot{\mathcal{D}}^T$ wirkt gemäß $\dot{\vec{u}} = \dot{\mathcal{D}}^T \vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{u}$ für ein $\vec{\Omega}$
- In anderen Koordinatensystemen muss dieses immer noch gelten mit entsprechend koordinatentransformiertem $\vec{\Omega}$:
 $\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u}$ mit $\vec{\omega} = \mathcal{D} \vec{\Omega}$

3.2 Dynamische Größen

3.2.1 Impuls

- Diskrete Massenverteilung:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{u}_i) = \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{u}_i}_0 = M \dot{\vec{R}}$$

- Kontinuierliche Verteilung:

$$\text{Analog } \rightarrow \vec{P} = \underbrace{\int d^3u \varrho(\vec{u})}_{M} \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \underbrace{\int d^3u \varrho(\vec{u}) \vec{u}}_0 = M \dot{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = M \dot{\vec{R}}}$$

3.2.2 Drehimpuls

- Diskrete Massenverteilung:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
 &= \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] = \sum_i m_i [(\vec{R} + \vec{u}_i) \times (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{u}_i)] \\
 &= \underbrace{\sum_i m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_M + \underbrace{\vec{R} \times (\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{u}_i)}_0 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{u}_i \times \dot{\vec{R}}}_0 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{u}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_i)}_{\vec{u}_i^2 \vec{\omega} - \vec{u}_i (\vec{u}_i \vec{\omega})} \\
 &= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i m_i [\vec{\omega} (\vec{u}_i^2) - \vec{u}_i (\vec{\omega} \vec{u}_i)] \\
 \Rightarrow \vec{L} &= \vec{R} \times \vec{P} + \vec{I} \vec{\omega} \\
 &\quad \text{mit } \boxed{I_{\alpha\beta} = \sum m_i [\vec{u}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - u_{i\alpha} u_{i\beta}]} : \underline{\text{Trägheitstensor}}
 \end{aligned}$$

- Kontinuierliche Verteilung: Analoge Rechnung mit $\sum m_i \rightarrow \int d^3u \varrho(\vec{u})$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{L} &= \vec{R} \times \vec{P} + \vec{I} \vec{\omega} \\
 &\quad \text{mit } \boxed{I_{\alpha\beta} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) [\vec{u}^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta]} : \underline{\text{Trägheitstensor}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{I} \vec{\omega}}$$

3.2.3 Kinetische Energie

- Diskrete Massenverteilung:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{u}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2}_M + \underbrace{\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{u}_i}_0 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{u}_i)^2}_{\vec{\omega}^2 \vec{u}_i^2 - (\vec{\omega} \vec{u}_i)^2} \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{\omega}^2 \vec{u}_i^2 - (\vec{\omega} \vec{u}_i)^2] = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha\beta} [\vec{u}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - u_{i\alpha} u_{i\beta}] \omega_\alpha \omega_\beta \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{I} \vec{\omega} \quad \text{mit } \vec{I}: \text{Trägheitstensor wie oben}
 \end{aligned}$$

- Kontinuierliche Verteilung: Wieder analoge Rechnung

$$\Rightarrow \boxed{T = T_{\text{Transl}} + T_{\text{Rot}}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\begin{aligned} T_{\text{Transl}} &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \\ T_{\text{Rot}} &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{I} \vec{\omega} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\leftrightarrow \text{Translation} \\ &\leftrightarrow \text{Rotation} \end{aligned}$$

3.3 Der Trägheitstensor

3.3.1 Definition

Gemäß 3.2 S.59: diskrete Massenverteilung: $I_{\alpha\beta} = \sum m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{u}_i^2 - u_{i\alpha} u_{i\beta})$
 kontinuierliche Verteilung: $I_{\alpha\beta} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) (\delta_{\alpha\beta} \vec{u}^2 - u_\alpha u_\beta)$

Alternativ in Vektorschreibweise: diskret: $\overset{\leftrightarrow}{I} = \sum m_i (\mathbb{1} \vec{u}_i^2 - \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i)$
 kontinuierlich: $\overset{\leftrightarrow}{I} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) (\mathbb{1} \vec{u}^2 - \vec{u} \otimes \vec{u})$

mit $\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$: dyadisches Produkt

Üblicherweise wird Trägheitstensor wie oben bzgl. dem Schwerpunkt definiert.

Aber: allgemeine Definition bzgl. (beliebigem) Ursprung auch möglich

$\leadsto$ Diskreter Fall: $\overset{\leftrightarrow}{I} = \sum m_i (\mathbb{1} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i \otimes \vec{r}_i)$
 kontinuierlich: $\overset{\leftrightarrow}{I} = \int d^3r \varrho(\vec{r}) (\mathbb{1} \vec{r}^2 - \vec{r} \otimes \vec{r})$

Nützlich vor allem bei Drehung um festen Drehpunkt

Wähle Ursprung $\equiv$ Drehpunkt; $\hat{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit der Drehung

Dann gilt: Drehimpuls $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \hat{\omega}$; kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \hat{\omega} \overset{\leftrightarrow}{I} \hat{\omega}$

(Diskreter Fall:

$$\vec{L} = \sum m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \stackrel{\dot{\vec{r}}_i = \hat{\omega} \times \vec{r}_i}{=} \sum m_i (\vec{r}_i \times (\hat{\omega} \times \vec{r}_i)) = \sum m_i (\vec{r}_i^2 \hat{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \hat{\omega})) = \overset{\leftrightarrow}{I} \hat{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\hat{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\hat{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\hat{\omega} \vec{r}_i)^2) = \frac{1}{2} \hat{\omega} \overset{\leftrightarrow}{I} \hat{\omega}$$

Kontinuierlicher Fall: analog)

Zusammenhang von $\overset{\leftrightarrow}{I}$ und $\hat{\overset{\leftrightarrow}{I}}$:

Verallgemeinerter Satz von Steiner:

$$\hat{\overset{\leftrightarrow}{I}} = \overset{\leftrightarrow}{I} + \mathbb{1} M \vec{R}^2 - M \vec{R} \otimes \vec{R}$$

(Diskreter Fall:

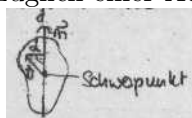
$$\begin{aligned} \hat{\overset{\leftrightarrow}{I}} &= \sum m_i (\mathbb{1} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i \otimes \vec{r}_i) = \sum m_i (\mathbb{1} (\vec{u}_i + \vec{R})^2 - (\vec{u}_i + \vec{R}) \otimes (\vec{u}_i + \vec{R})) \\ &= \sum m_i (\mathbb{1} \vec{u}_i^2 - \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) + 2 \underbrace{\mathbb{1} \sum m_i \vec{u}_i \vec{R}}_0 + \underbrace{\sum m_i \mathbb{1} \vec{R}^2}_M - \underbrace{(\sum m_i \vec{u}_i \otimes \vec{R})}_0 \\ &\quad + \underbrace{\vec{R} \otimes \sum m_i \vec{u}_i}_0 - \underbrace{\sum m_i \vec{R} \otimes \vec{R}}_M \quad \checkmark \end{aligned}$$

Kontinuierlicher Fall: analog)

3.3.2 Zusammenhang mit Trägheitsmoment

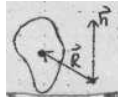
Trägheitsmoment aus der Vorlesung Experimentalphysik I bekannt

- Bezüglich einer Achse $\vec{n}$ durch den Schwerpunkt



$$\begin{aligned} \theta &= \int d^3u \varrho(\vec{u}) \cdot d^2 = \int d^3u \varrho(\vec{u}) (\vec{n} \times \vec{u})^2 \\ &= \int d^3u \varrho(\vec{u}) (\vec{n}^2 \vec{u}^2 - (\vec{n} \vec{u})^2) \leadsto \boxed{\theta = \vec{n} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{n}} \end{aligned}$$

- Bezüglich einer Achse $\vec{n}$ durch den Ursprung

Analog: $\hat{\theta} = \vec{n} \hat{I} \vec{n}$  $= \vec{n} (\vec{I} + \mathbb{1} M \vec{R}^2 - M \vec{R} \otimes \vec{R}) \vec{n}$

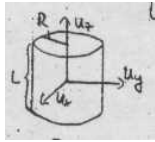
$$= \vec{n} \vec{I} \vec{n} + M (\underbrace{\vec{R}^2}_{\vec{n}^2} \underbrace{\vec{n} \vec{n}}_{\vec{n}^2} - \underbrace{\vec{n} \vec{R} \otimes \vec{R} \vec{n}}_{(\vec{n} \vec{R})^2})$$

$$= \vec{n} \vec{I} \vec{n} + M (\vec{R} \times \vec{n})^2$$

$\leadsto \boxed{\hat{\theta} = \theta + M (\vec{R} \times \vec{n})^2}$: Satz von Steiner

3.3.3 Beispiel: Trägheitstensor des Zylinders

Länge L , Radius R , Masse $M \Rightarrow$ Volumen $V = L\pi R^2$, Dichte $\tilde{\varrho} = \frac{M}{V}$



Wähle Koordinatensystem mit z-Achse=Längsachse (Bild)

$\leadsto$ Massenverteilung: $\varrho(\vec{u}) = \begin{cases} \tilde{\varrho}^2 & |z| < L/2, x^2 + y^2 < R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Benutze Zylinderkoordinaten $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \cos \varphi \\ \tau \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow u^2 = \tau^2 + z^2; \int d^3u \varrho(\vec{u}) \dots = \tilde{\varrho} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\tau \cdot \tau \dots$

$$\leadsto I_{xx} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) \underbrace{\{\vec{u}^2 - u_x^2\}}_{z^2 + \tau^2 \sin^2 \varphi} = \tilde{\varrho} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz \cdot z^2}_{L^3/12} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R d\tau \cdot \tau}_{R^2/2} + \tilde{\varrho} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz}_{L} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi}_{\pi} \underbrace{\int_0^R d\tau \cdot \tau^3}_{R^4/4}$$

$$= \tilde{\varrho} \left(\frac{L^3 \pi R^2}{12} + \frac{L \pi R^4}{4} \right) = \frac{M}{12} (L^2 + 3R^2)$$

$$I_{xy} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) \underbrace{\{-u_x u_y\}}_{-\tau^2 \cos \varphi \sin \varphi} = -\tilde{\varrho} \int_{-L/2}^{L/2} dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi}_{0} \int_0^R d\tau \cdot \tau^3 = 0 = I_{yx}$$

$$I_{xz} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) \underbrace{\{-u_x u_z\}}_{-\tau z \cos \varphi} = -\tilde{\varrho} \int_{-L/2}^{L/2} dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi}_{0} \int_0^R d\tau \cdot \tau = 0 = I_{zx}$$

$I_{yy} = I_{xx}$ und $I_{yz} = I_{xz}$ aus Symmetriegründen (da x- und y-Richtung äquivalent)

$$I_{zz} = \int d^3u \varrho(\vec{u}) \underbrace{\{\vec{u}^2 - u_z^2\}}_{\tau^2} = \tilde{\varrho} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz}_{L} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R d\tau \cdot \tau^3}_{R^4/4} = \tilde{\varrho} \frac{L \pi R^4}{2} = \frac{1}{2} M R^2$$

$\leadsto$ Zusammenfassend: $\vec{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M (L^2 + 3R^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M (L^2 + 3R^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} M R^2 \end{pmatrix}$

(NB: Hier keine Nichtdiagonalelemente, aber im allgemeinen Fall natürlich schon!)

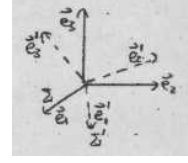
Anwendung: Kinetische Energie eines rollenden Zylinders



$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_{zz}}_{MR^2/2} \underbrace{(\omega)^2}_{v/R} = \frac{3}{4} M v^2$$

3.3.4 Einschub und Erinnerung: Physikalische Skalare, Vektoren, und Tensoren

Betrachte eine Koordinatentransformation $\Sigma \rightarrow \Sigma'$
 zwischen zwei orthonormalen Systemen
 mit demselben Ursprung
Basen: $\Sigma: (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad \Sigma': (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$



Darstellung eines Ortsvektors $\vec{r}$

in Σ : Koordinaten (r_1, r_2, r_3) mit $r_\alpha = (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{r}) \rightarrow \vec{r} = \sum_\alpha \vec{e}_\alpha r_\alpha$
 in Σ' : Koordinaten (r'_1, r'_2, r'_3) mit $r'_\alpha = (\vec{e}'_\alpha \cdot \vec{r}) \rightarrow \vec{r} = \sum_\alpha \vec{e}'_\alpha r'_\alpha$
 $\leadsto$ Transformation $\Sigma \rightarrow \Sigma'$: $r'_\alpha = (\vec{e}'_\alpha \cdot \vec{r}) = (\vec{e}'_\alpha \cdot \sum_\beta \vec{e}_\beta r_\beta) = \sum_\beta U_{\alpha\beta} r_\beta$

$\leadsto$ mit Transformationsmatrix: $U_{\alpha\beta} = (\vec{e}'_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) = \cos(\underbrace{\angle(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}_\beta)}_{\text{Winkel}})$

NB: U ist orthonormal: $UU^T = U^T U = \mathbb{1}$

$$([UU^T]_{\alpha\beta} = \sum_\gamma U_{\alpha\gamma} U_{\beta\gamma} = \sum_\gamma (\vec{e}'_\alpha \cdot \vec{e}_\gamma)(\vec{e}_\gamma \cdot \vec{e}'_\beta) = \vec{e}'_\alpha \cdot \underbrace{\sum_\gamma \vec{e}_\gamma (\vec{e}_\gamma \cdot \vec{e}'_\beta)}_{\vec{e}'_\beta} = \vec{e}'_\alpha \cdot \vec{e}'_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \checkmark)$$

Definitionen:

(i) Physikalischer Skalar: Einkomponentige Größe a , die sich unter der Koordinatentransformation $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ nicht verändert: $a' = a$

(ii) Physikalischer Vektor: Dreikomponentige Größe $\underline{u}$, die sich unter $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ gemäß $u'_\alpha = \sum_\beta U_{\alpha\beta} u_\beta$ bzw. $\underline{u}' = U \underline{u}$ verändert.

(d.h.: Transformiert sich unter Drehung wie ein Ortsvektor)

(iii) Physikalischer Tensor: Neunkomponentige Größe $\underline{\underline{A}}$, die sich unter $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ gemäß $A'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} U_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta} A_{\gamma\delta}$ bzw. $\underline{\underline{A}}' = U \underline{\underline{A}} U^T$ verändert.

(Falls $\underline{u}$ Vektor, $\underline{\underline{A}}$ Tensor, ist $\underline{\underline{A}} \underline{u}$ wieder Vektor, $\underline{\underline{A}}' \underline{u}' = U \underline{\underline{A}} U^T U \underline{u} = U \underline{\underline{A}} \underline{u}$)

(iv) Physikalischer Tensor nter Stufe: 3^n -komponentige Größe $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, die sich unter

$\Sigma \rightarrow \Sigma'$ gemäß $T'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sum_{\beta_1 \dots \beta_n} U_{\alpha_1 \beta_1} \dots U_{\alpha_n \beta_n} T_{\beta_1 \dots \beta_n}$ verändert.

Folgerungen

- 1 ist ein Skalar (klar)

$\mathbb{1}$ ist ein Tensor ($\mathbb{1} \rightarrow U \mathbb{1} U^T = \mathbb{1}$ invariant)

- Falls $\underline{u}$ und $\underline{v}$ Vektoren sind, ist $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ein Skalar.

$$(\underline{u} \cdot \underline{v} = (u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \underline{u}^T \underline{v} \xrightarrow{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \underline{u}'^T \underline{v}' = (U \underline{u})^T (U \underline{v}) = \underline{u}^T \underbrace{U^T U}_{\mathbb{1}} \underline{v} = \underline{u}^T \underline{v})$$

- Falls $\underline{u}$ und $\underline{v}$ Vektoren sind, ist $\underline{u} \otimes \underline{v}$ ein Tensor.

$$(\underline{u} \otimes \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (v_1 \ v_2 \ v_3) = \underline{u} \underline{v}^T \xrightarrow{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \underline{u}' \underline{v}'^T = (U \underline{u})(U \underline{v})^T = U \underline{u} \underline{v}^T U^T)$$

Darstellung von Skalaren, Vektoren, Tensoren in einer Basis Σ

(i) Skalar a : klar $\rightarrow a$

(ii) Vektor $\vec{u}$:
$$u_\alpha = (\vec{u} \vec{e}_\alpha) \Leftrightarrow \vec{u} = \sum_\alpha u_\alpha \vec{e}_\alpha \quad (\text{siehe oben})$$

(iii) Tensor $\vec{A}$:
$$A_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \vec{A} \vec{e}_\beta \Leftrightarrow \vec{A} = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

(Gilt für Basis Σ : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow$ check durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \text{Andere Basis } \Sigma': A'_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma\delta} U_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta} A_{\gamma\delta} = \sum_{\gamma\delta} (\vec{e}'_\alpha \vec{e}_\gamma) (\vec{e}'_\beta \vec{e}_\delta) \vec{e}_\gamma \vec{A} \vec{e}_\delta \\ &= \underbrace{\sum_\gamma \vec{e}_\gamma (\vec{e}_\gamma \vec{e}'_\alpha)}_{\vec{e}'_\alpha} \underbrace{\vec{A} \sum_\delta \vec{e}_\delta (\vec{e}_\delta \vec{e}'_\beta)}_{\vec{e}'_\beta} = \vec{e}'_\alpha \vec{A} \vec{e}'_\beta \checkmark \end{aligned}$$

3.3.5 Hauptachsentransformation

* Transformationsverhalten des Trägheitstensors

$$\text{Zur Erinnerung: } \vec{I} = \begin{cases} \sum m_i (\mathbb{1} \vec{u}_i^2 - \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) & (\text{diskreter Fall}) \\ \int d^3u \varrho(\vec{u}) (\mathbb{1} \vec{u}^2 - \vec{u} \otimes \vec{u}) & (\text{kontinuierlicher Fall}) \end{cases}$$

Nun gilt:

$\mathbb{1}$ ist ein Tensor, $\vec{u}_i^2$ ein Skalar, $\vec{u}_i \otimes \vec{u}_i$ ein Tensor

$\leadsto \mathbb{1} \vec{u}_i^2 - \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i$ ist ein Tensor

analog natürlich auch $\mathbb{1} \vec{u}^2 - \vec{u} \otimes \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{I}$ ist ein Tensor !

(Daher natürlich der Name „Trägheitstensor“)

* Hauptachsentransformation

Fazit bis jetzt:

I transformiert sich unter Basiswechsel gemäß $I \rightarrow UIU^T$

Weiterhin: I ist symmetrisch: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$

Spektralsatz der linearen Algebra

- I hat reelle Eigenwerte
- Eigenvektoren spannen den dreidimensionalen Raum auf
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander

„Erklärung“: Eigenwerte und Eigenvektoren

Ausgangspunkt: Eigenwertgleichung $\vec{I} \vec{n} = \lambda \vec{n}$

hat Lösungen für spezielle Werte von λ : Eigenwerte

Die Lösungen $\vec{n}$ zu einem Wert λ heißen Eigenvektoren zu λ

Es gilt:

- Falls $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert
 $\rightarrow a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2$ ist auch Eigenvektor
- Falls $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten
 und $\vec{I}$ symmetrisch $\rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, also $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
 ($\vec{I}$ symmetrisch $\Rightarrow \vec{n}_1 \vec{I} \vec{n}_2 = \vec{n}_2 \vec{I} \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \lambda_2 \vec{n}_2 = \vec{n}_2 \lambda_1 \vec{n}_1$
 $\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0$ da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ✓)

Folgerung: Aus den Eigenvektoren kann man eine Orthonormalbasis $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ konstruieren. In dieser Basis ist $\vec{I}$ diagonal.

Nomenklatur:

Basisvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ heißen Hauptträgheitsachsen
 (bieten sich an als Achsen eines körperfesten Bezugssystems)
 Zugehörige Eigenwerte $\lambda_\alpha = I_\alpha$ heißen Hauptträgheitsmomente.

3.3.6 Zusammenfassung und Folgerungen

Allgemeine Darstellung des Trägheitstensors: $\vec{I} = \sum_{\alpha=1}^3 I_\alpha \vec{n}_\alpha \otimes \vec{n}_\alpha$
 I_α : Hauptträgheitsachsen, $\vec{n}_\alpha$: Einheitsvektoren entlang Hauptträgheitsachsen

Koordinaten des Trägheitstensors in beliebigem Bezugssystem $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$I_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \vec{I} \vec{e}_\beta = \sum_{\gamma} I_{\gamma} \vec{e}_\alpha \vec{n}_\gamma \otimes \vec{n}_\gamma \vec{e}_\beta \rightsquigarrow I_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 I_{\gamma} (\vec{e}_\alpha \vec{n}_\gamma) (\vec{e}_\beta \vec{n}_\gamma)$$

$\Rightarrow$ Rotationsanteil der kinetischen Energie

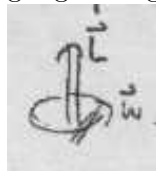
$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} I_{\gamma} (\vec{\omega} \vec{n}_\gamma)^2$$

Rotationsanteil des Drehimpulses

$$\vec{L}_{\text{Rot}} = \vec{I} \vec{\omega} = \sum_{\alpha} I_{\alpha} (\vec{n}_\alpha \vec{\omega}) \vec{n}_\alpha$$

$\rightsquigarrow$ zeigt nicht unbedingt in Richtung von $\vec{\omega}$

$\rightsquigarrow$ Bereits bei kräftefreier Bewegung mit $\vec{L} = \text{const.}$ komplizierte Bewegungen möglich



Falls $\vec{\omega} \nparallel \vec{L}$: Drehachse muss sich ständig drehen

3.4 Dynamik und Bewegungsgleichungen

3.4.1 Zugang direkt über Kräfte

3.4.1.1 Drehmoment

Zunächst diskrete Massenverteilung

$$\begin{aligned} \text{Impuls: } \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = \sum \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{F}_i &&= \vec{F}: \text{Gesamtkraft} \\ \text{Drehimpuls: } \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=0 \text{ da parallel}}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i =: \vec{M}: \text{Drehmoment} \end{aligned}$$

Falls Ursprung im Schwerpunkt liegt, gilt speziell

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{I} \vec{\omega}) = \sum \vec{u}_i \times \vec{F}_i =: \vec{M}^{(0)}$$

Allgemein (beliebiger Ursprung)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{R} \times \vec{P} + \vec{I} \vec{\omega}) = \vec{R} \times \dot{\vec{P}} + \frac{d}{dt} (\vec{I} \vec{\omega}) \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{M}^{(0)} \end{aligned}$$

Kontinuierliche Massenverteilung: analog

Kraftdichte $\vec{f}(\vec{r})$: Auf Massenelement $\varrho(\vec{r})d^3r$ wirkt Kraft $\vec{f}(\vec{r})d^3r$

$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F} = \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \quad \rightarrow \dot{\vec{P}} = \vec{F}$$

$$\text{Drehmoment: } \vec{M}^{(0)} = \int d^3r (\vec{u} \times \vec{f}(\vec{u})) \quad \rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{M}^{(0)}$$

3.4.1.2 Eulersche Gleichungen

Ausgangspunkt: $\vec{M}^{(0)} = \frac{d}{dt} (\vec{I} \vec{\omega})$ (raumfestes Schwerpunktsystem)

↪ Transformation in rotierendes körperfestes System

$$\text{mittels } \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{raumfest}} \cdots = \vec{\omega} \times \cdots + \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{körperfest}} \cdots \quad (\text{siehe 1.3.2 S.14})$$

$$\text{Daraus folgt: } \vec{M}^{(0)} = \frac{d}{dt} (\vec{I} \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times (\vec{I} \vec{\omega}) + \frac{d}{dt} \Big|_{\text{körperfest}} (\vec{I} \vec{\omega}).$$

$$\text{NB: Im Hauptachsensystem ist } \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{I} \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \frac{d}{dt} \Big|_{\text{körperfest}} (\vec{I} \vec{\omega}) = \vec{I} \left(\frac{d}{dt} \vec{\omega} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \right) = \vec{I} \frac{d}{dt} \vec{\omega}.$$

⇒ Bewegungsgleichungen im körperfesten Hauptachsensystem

Eulersche Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1^{(0)} \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= M_2^{(0)} \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3^{(0)} \end{aligned}$$

3.4.1.3 Beispiel: Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

Betrachte einen uniaxialen Kreisel mit Symmetrieachse $\vec{e}_s = \vec{e}_3'$ im körperfesten System, d.h. den Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2 \neq I_3$

(a) Körperfestes Bezugssystem

Dritte Euler-Gleichung: $I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.}$

Definiere $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$

$\leadsto$ 1. und 2. Euler-Gleichung: $\frac{d\omega_1}{dt} + \Omega \omega_2 = 0, \frac{d\omega_2}{dt} - \Omega \omega_1 = 0.$

Definiere komplexe Funktion $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2 \Rightarrow \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - i\Omega \tilde{\omega} = 0 \Rightarrow \tilde{\omega}(t) \propto e^{i\Omega t}$

$\leadsto$ Im körperfesten System ist $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_\perp \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_\perp \sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

(mit Integrationskonstanten $\omega_\perp$ und α).

Insbesondere: Der Anteil ω_3 der Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieachse ist konstant.

Weiterhin: Betrag $|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_\perp^2 + \omega_3^2}$ ist fest. $\vec{\omega}$ rotiert gleichmäßig um Symmetrieachse $\vec{e}_s = \vec{e}_3$ mit Winkelgeschwindigkeit Ω .

(b) Raumfestes Bezugssystem (raumfestes Inertialsystem)

Fester Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega} = \text{const.}$, Symmetrieachse $\vec{e}_s$

Wähle raumfestes Bezugssystem so, dass es zum Zeitpunkt t_0 identisch mit dem körperfesten Hauptachsensystem ist mit $\vec{e}_s = \vec{e}_3$.

$\Rightarrow \vec{L} = I_1 \vec{\omega}_\perp + I_3 \omega_3 \vec{e}_s$ mit $\omega_\perp = \tilde{\omega} - \omega_3 \vec{e}_s$ ($\omega_\perp \perp \vec{e}_s$)

Verwende $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \Rightarrow \vec{L} = I_1 (\tilde{\omega}_\perp + (\omega_3 + \Omega) \vec{e}_s)$

Vergleiche damit $\vec{\omega} = \tilde{\omega}_\perp + \omega_3 \vec{e}_s \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \vec{L}/I_1 - \Omega \vec{e}_s}$

Daraus folgt:

- $\vec{\omega}, \vec{L}$ und $\vec{e}_s$ (Symmetrieachse) liegen in einer Ebene!
- Falls $\vec{L}$ nicht parallel zu Kreiselachse $\vec{e}_s$:
 $\leadsto \vec{e}_s$ führt Präzession um (raumfeste) Achse $\vec{L}/L$ durch.

NB: Allgemein versteht man unter Präzession die "Drehende Bewegung der Achse eines Kreisels um eine außerhalb des Kreisels liegende feste Achse". Wir diskutieren hier den Fall der "drehmoment-freien" Präzession. Präzession kann auch durch ein äußeres Drehmoment induziert werden, z.B. durch ein Schwerfeld. Unter Einfluss eines Drehmoments macht auch der Drehimpuls $\vec{L}$ eine kreisende Bewegung (siehe 3.4.2.2).

- Winkelgeschwindigkeit der Präzession $\omega_{\text{Präzession}} = \vec{L}/I_1$
 (da $\frac{d\vec{e}_s}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_s = \frac{\vec{L}}{I_1} \times \vec{e}_s$)
- Winkelgeschwindigkeit der Drehung um Symmetrieachse im raumfesten System: $\omega_{\text{Symmetrie}} = -\Omega$.

3.4.2 Zugang über Lagrange-Funktion

Allgemein: $L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \vec{I} \vec{\omega} - U(\vec{R}, \text{Winkelvariablen})$

$\leadsto U$ und $\vec{\omega}$ müssen als Funktion der Winkelvariablen und ihrer zeitlichen Ableitungen ausgedrückt werden.

3.4.2.1 Lagrange-Funktion starrer Körper in Eulerschen Winkeln

Konkrete Form der Lagrange-Funktion, falls als Winkelvariablen die Eulerschen Winkel gewählt werden (vgl. 3.1.2 S.58) und als körperfestes Koordinatensystem das Hauptachsensystem.

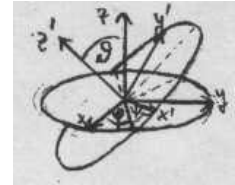
Erinnerung: Euler-Winkel ϕ, θ, ψ beschreiben sukzessive Drehung des Koordinatensystems vom raumfesten System Σ zum körperfesten System Σ' mittels

$$\text{Drehung um z-Achse, Winkel } \varphi: \mathcal{D}_{\varphi}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung um x-Achse, Winkel } \vartheta: \mathcal{D}_{\vartheta}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung um z-Achse, Winkel } \psi: \mathcal{D}_{\psi}^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang zwischen
raumfesten Koordinaten $\vec{u}$
und körperfesten Koordinaten $\vec{u}'$:
 $\vec{u}' = \mathcal{D}^T \vec{u}$ mit $\mathcal{D}^T = \mathcal{D}_{\psi}^T \mathcal{D}_{\vartheta}^T \mathcal{D}_{\varphi}^T$



$\Rightarrow$ Drei zeitlich veränderliche Winkelvariablen

$\leadsto$ drei Beiträge zur Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \vec{\omega}_{\psi} + \vec{\omega}_{\theta} + \vec{\omega}_{\phi}$.

Betrachte nun Koordinaten von $\vec{\omega}$ im körperfesten System.

- Beitrag von $\dot{\phi}$: Im raumfesten System ist $\vec{\omega}_{\phi} = (0, 0, \dot{\phi}) = \mathcal{D}_{\phi}^T \vec{\omega}_{\phi}$
Körperfestes System:

$$\vec{\omega}'_{\phi} = \mathcal{D}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \mathcal{D}_{\psi}^T \mathcal{D}_{\theta}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- Beitrag von $\dot{\theta}$: $\vec{\omega}_{\theta}'' = (\dot{\theta}, 0, 0) = \mathcal{D}_{\theta}^T \vec{\omega}_{\theta}$ in einem Koordinatensystem Σ'' , in dem Drehung bzgl. ϕ schon stattgefunden hat.

$$\leadsto \text{Körperfestes System: } \vec{\omega}'_{\theta} = \mathcal{D}_{\psi}^T \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Beitrag von $\dot{\psi}$: $\vec{\omega}'_{\psi} = (0, 0, \dot{\psi}) = \mathcal{D}_{\psi}^T \vec{\omega}_{\psi}$ im körperfesten System.

⇒ Kinetischer Beitrag der Rotation:

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1'^2 + I_2 \omega_2'^2 + I_3 \omega_3'^2)$$

$$\text{mit } \vec{\omega}' = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

⇒ Lagrange-Funktion: $L = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 I_\alpha \omega_\alpha'^2 - U$

3.4.2.2 Beispiel: Symmetrischer Kreisel im Schwerfeld

Symmetrischer Kreisel ($I_1 = I_2 \neq I_3$), wird an einem "Unterstützungspunkt" festgehalten, der den Abstand l zum Schwerpunkt hat.

Wähle als Nullpunkt aller Koordinatensysteme (körperfest und raumfest) den Unterstützungspunkt (nicht den Schwerpunkt). Überlegungen aus 3.4.2.1 S.68 können trotzdem übernommen werden. I_1, I_2, I_3 sind nun Hauptträgheitsmomente für Drehungen um den Unterstützungspunkt.

⇒ Rotationsenergie: $T_{\text{Rot}} = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$
 Potentielle Energie: $U = Mgl \cos \theta$

⇒ $L = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta$

Bewegungsgleichungen können nur numerisch gelöst werden.

Hier: Analyse anhand der Erhaltungssätze.

Erhaltungsgrößen:

- Zyklische Variablen: ϕ, ψ
 $\Rightarrow p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3' = \text{const.}$
 (Rotation um Symmetrieachse)
 $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta = \text{const.}$
 (Präzession von ϕ bei gegebenem θ)
- Energie: $E = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta$
 $= \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta$

Analyse: Substituiere $u = \cos \theta \rightarrow \dot{\theta}^2 = \dot{u}^2 / (1 - u^2)$

⇒ $E = \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{2I_1(1-u^2)} + \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl u$

⇒ $\frac{1}{2} \dot{u}^2 + V_{\text{eff}}(u) = 0$

mit $V_{\text{eff}}(u) = \frac{1}{I_1} \left[\left(\frac{p_\psi^2}{2I_3} - E + Mgl u \right) (1 - u^2) + \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{2I_1} \right]$

↪ entspricht Bewegung eines Teilchens der "Gesamtenergie" 0 im effektiven Potential $V_{\text{eff}}(u)$, $u \in [-1, 1]$.

NB: $V_{\text{eff}}(u)$ ist ein Polynom 3. Grades,

$V_{\text{eff}}(\pm\infty) \rightarrow \mp\infty$, $V_{\text{eff}}(\pm 1) = \frac{(p_\phi \mp p_\psi)^2}{2I_1^2} > 0$

↪ maximal zwei Nullstellen im Bereich $u \in [-1, 1]$

Diskussion:

- Nullstellen von $V_{\text{eff}}(\pm 1)$ entsprechen den Umkehrpunkten einer oszillatorischen Bewegung in θ : "Nutation" zusätzlich zur Präzession.
 - Nutationsfreie Bewegung möglich, wenn die Nullstellen von $V_{\text{eff}}(u)$ aufeinanderfallen.
 - Weiterhin gilt wegen $p_\phi - p_\psi u = \dot{\phi} I_1 (1 - u^2)$: $\dot{\phi}$ wechselt periodisch das Vorzeichen, falls $p_\phi - p_\psi u$ das Vorzeichen wechselt.
- $\Rightarrow$ Verschiedene Kategorien von Kurven.
- Vorzeichen von $\dot{\phi}$ bleibt gleich: Wellenförmige Bewegung.
 - Vorzeichen von $\dot{\phi}$ wechselt: Schraubenförmige Bewegung.
 - Unter sehr speziellen Bedingungen auch möglich: Umkehrpunkte von u fallen aufeinander, nutationsfreie Präzession.
- Drehimpuls $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$ ist nicht erhalten!
(es lohnt sich nicht einmal, $\vec{L}$ hier auszurechnen!)

3.5 Wissensfragen

57. Was versteht man unter einem starren Körper?
58. Was sind die Eulerschen Winkel?
59. Was zeichnet einen physikalischen Tensor aus?
60. Wie ist der Trägheitstensor eines starren Körpers mit der Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert?
61. Wie hängt der Trägheitstensor mit dem Trägheitsmoment zusammen?
62. Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Drehimpuls und die kinetische Energie eines starren Körpers an. Welches ist der Translationsanteil? Welches ist der Rotationsanteil?
63. Was ist eine Hauptachsentransformation?
64. Was sind Hauptträgheitsmomente? Was sind Hauptträgheitsachsen?
65. Wie lautet der Satz von Steiner und der verallgemeinerte Satz von Steiner?
66. Wie ist das Drehmoment definiert?
67. Wie stellt man allgemein die Lagrangegleichung für starre Körper auf?
68. Wie lauten die Eulerschen Gleichungen? Was beschreiben sie?

Kapitel 4

Hamiltonsche Mechanik

© Copyright 2014 Friederike Schmid¹

Annahme in diesem Kapitel:

Es existiert eine Lagrange-Funktion $L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$, die die Zeitentwicklung des Systems vollständig beschreibt.

(Also insbesondere: alle Zwangsbedingungen sind holonom)

↪ Lagrange-Mechanik reicht völlig aus, um Dynamik zu beschreiben und Bewegungsgleichungen aufzustellen ($\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \forall j$)

Aber: Lagrange-Formalismus hat einige „Nachteile“:

- Grundlegende Erhaltungsgrößen (Energie, Impuls) tief „vergraben“
- L hat keine physikalische Interpretation
- q_i und $\dot{q}_i$ gehen nicht gleich ein, asymmetrisch → „unästhetisch“

Hier: Einführung eines alternativen Formalismus ohne diese Nachteile.

Variablenwechsel $(\cdots q_j \cdots, \cdots \dot{q}_j \cdots) \rightarrow (\cdots q_j \cdots, \cdots p_j \cdots)$

↪ generalisierte Orte und generalisierte Impulse.

Wird nichts bringen für die Bewegungsgleichungen, aber:

- Erhaltungsgrößen sichtbarer
- Neue charakteristische Funktion $\mathcal{H}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)$, die oft eine physikalische Interpretation besitzt: Energie
- Verdeutlichung der mathematischen Struktur der klassischen Mechanik

⇒ Besserer Ausgangspunkt für manche mechanischen Probleme.

Natürlicher Ausgangspunkt für statistische Mechanik und Quantenmechanik (wird in entsprechenden Vorlesungen klar werden)

¹Prof. Dr. Friederike Schmid, Vorlesung Theoretische Mechanik, Universität Mainz, WS 2014/2015. Letzte Änderung am 24.11.16.

4.1 Generalisierter Impuls

Definition:

Gegeben Lagrange-Funktion $L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$

$\leadsto$ Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$

Formaler Vergleich mit Newtonschen Gleichungen: $\frac{d}{dt} \vec{p}_i = \vec{F}_i$
mit $\vec{p}_i$ = gewöhnlicher Impuls $\rightarrow$ motiviert Verallgemeinerung:

Generalisierter Impuls: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

NB: Falls $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, ist p_j eine Erhaltungsgröße: $p_j = \text{const.}$

Beispiele:

(i) N Massenpunkte im Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$, kartesische Koordinaten

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,\alpha} m_i \dot{r}_{i,\alpha}^2 - U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$$

$$\Rightarrow p_{i,\alpha} = \frac{dL}{d\dot{r}_{i,\alpha}} = m_i \dot{r}_{i,\alpha} \leadsto \text{gewöhnliche Impulse } \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

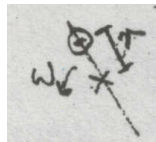
(ii) Geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld (2.6.1 S.52)

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} = m\dot{r}_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha \text{ bzw. } \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

$\leadsto$ generalisierter Impuls $\neq$ gewöhnlicher Impuls ! ($\vec{p}_{\text{gewöhnlich}} = m\dot{\vec{r}}$)

(iii) Perle auf rotierendem Stab (Beispiel in 2.3.5 S.47)



$$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \hat{=} \text{Radialimpuls } p_r$$

$\leadsto$ wieder verschieden vom gewöhnlichen Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{r}\vec{e}_r + m\omega r\vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow$ Generalisierter Impuls p_j ist oft ungleich dem gewöhnlichen Impuls.

Aber: hat Aussichten, Erhaltungsgröße zu sein

(falls q_j zyklisch ist, siehe 2.4.1 S.48)

$\leadsto$ Wunsch: Formalismus, in dem $\dot{q}_j$ durch p_j ersetzt ist.

4.2 Legendre-Transformation und Hamilton-Funktion

Ausgangspunkt: Lagrange-Funktion $L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$, die ein bestimmtes dynamisches System vollständig beschreibt.

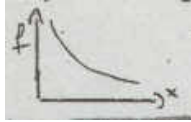
Gesucht: Funktion $\mathcal{H}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t)$ mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, die dasselbe leistet

Weg: Legendre-Transformation

4.2.1 Vorbemerkung: Legendre-Transformation

- Zunächst in nur einer Variablen

Gegeben stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, streng konvex oder konkav ($f''(x) \neq 0 \forall x$)



→ $f'(x)$ streng monoton steigend oder fallend
 → $\xi = f'(x)$ eindeutig umkehrbar: $x = x(\xi)$

Wunsch: Eine Funktion $F(\xi)$ finden, die dieselbe Information wie $f(x)$ enthält $\leadsto$ aus $F(\xi)$ muss $f(x)$ sich eindeutig rekonstruieren lassen

1. Versuch: Ordne jeder Steigung ξ den Wert $f(x(\xi))$ zu:

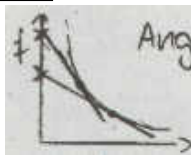
$$F(\xi) = f(x(\xi))$$



Problem: $f(x)$ kann aus $F(\xi)$ nicht eindeutig rekonstruiert werden: Falls $f(x)$ Lösung von $F(\xi) = f$, ist $f(x-a)$ auch Lösung für alle a !

⇒ Informationsverlust: nicht akzeptabel

Ausweg: Ordne jeder Steigung ξ den zugehörigen Achsenabschnitt zu



Angabe des Achsenabschnitts definiert $f(x)$ vollständig: Konvexe/Konkave Einhüllende der Tangentenschar mit Steigung ξ und Achsenabschnitt $F(\xi)$

$$\Rightarrow \boxed{F(\xi) = f - \xi x} \text{ mit } \boxed{\xi = f'(x)} : \text{Legendre-Transformation}$$

- Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

Sei $f(x_1 \dots x_k)$ konvex: $\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \neq 0$ überall

$$\boxed{f(x_1 \dots x_k) \rightarrow F\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = f - \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i}$$

4.2.2 Anwendung auf Lagrange-Funktion

Zurück zur Lagrange-Funktion $L(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, t)$

Nimm an: L konvex in $\dot{q}_j \leadsto \boxed{\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0 \text{ überall}}$

(für kinetische Energie $\sim \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2$ typischerweise erfüllt)

$\leadsto$ Dann lässt sich $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ eindeutig nach $\dot{q}_j$ auflösen und Legendre-T. kann angewendet werden bzgl. $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} : L \rightarrow L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = L - \sum p_j \dot{q}_j$

Führt zur Hamiltonfunktion $\boxed{\mathcal{H}(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m, t) = \sum p_j \dot{q}_j - L}$
 enthält die gesamte Information über das dynamische System

Bemerkung: $\mathcal{H} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$ ist gerade die Erhaltungsgröße, die nach 2.4.2 S.48 aus Zeitunabhängigkeit von L folgt. ($\mathcal{H} = \text{const.}$, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$).
Bei skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen kann der Wert von $\mathcal{H}$ mit der Energie E identifiziert werden.

Beispiele:

(i) N Massenpunkte im Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

$$L = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U; \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \\ \Rightarrow \mathcal{H} = \sum \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i - L = \frac{1}{2} \sum \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} + U: \text{Energie}$$

(ii) Geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \vec{A}; \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \vec{A} \text{ bzw. } \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}) \\ \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \vec{p} \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2 + q\phi} \quad (\cong \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q\phi \text{ „Energie“})$$

(iii) Perle auf rotierendem Stab

$$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2); \quad p = m\dot{r} \Rightarrow \mathcal{H} = p\dot{r} - L = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \\ \leadsto \mathcal{H} \text{ ist } \underline{\text{Erhaltungsgröße}}, \text{ aber } \underline{\text{nicht}} \text{ die Energie } (E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = L \neq \text{const.})$$

4.2.3 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Im Lagrange-Formalismus gilt:

$$\underline{\text{Lagrange-Funktion:}} \quad L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t) \\ \rightarrow \underline{\text{Lagrange-Gleichungen:}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Daraus folgt im Hamilton-Formalismus:

$$\underline{\text{Hamilton-Funktion:}} \quad \mathcal{H}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t)$$

$$\rightarrow \underline{\text{Hamilton-Gleichungen:}} \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j}$$

(Rechnung: Schreibe $\tilde{L}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) := L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m)$ mit $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)$
($L, \tilde{L}$: gleicher Zahlenwert, andere funktionale Form)

$$\mathcal{H} = \sum p_j \dot{q}_j(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) - \tilde{L}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) \\ \leadsto \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} = \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \right)}_0 - \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\delta_{jk}} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \right) \\ = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k \quad \checkmark$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} \right)}_{\delta_{jk}} - \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_0 \frac{\partial q_j}{\partial p_k} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} \right) = \dot{q}_k \quad \checkmark$$

Folgerung: Zeitentwicklung des Werts von $\mathcal{H}$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(q_1(t) \cdots q_m(t), p_1(t) \cdots p_m(t), t) = \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right)}_{-\dot{p}_j \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\leadsto \boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}} \leadsto \mathcal{H} = \text{const.}, \text{ falls } \mathcal{H} \text{ nicht explizit zeitabhängig } (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0)$$

Beispiele(i) N Massenpunkte im Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} + U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$$

$$\leadsto \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i\alpha}} = \frac{p_{i\alpha}}{m_i} \equiv \dot{r}_{i\alpha} \quad \& \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_{i\alpha}} = \frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}} \equiv -\dot{p}_{i\alpha}$$

(ii) Geladener Massenpunkt im elektromagnetischen Feld

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi$$

$$\leadsto \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{m} \left(p_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha \right) \equiv \dot{r}_\alpha \quad \& \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_\alpha} = -\frac{q}{mc} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial r_\alpha} + q \frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha} \equiv -\dot{p}_\alpha$$

(iii) Perle auf rotierendem Stab

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2$$

$$\leadsto \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \equiv \dot{r} \quad \& \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = mr\omega^2 \equiv -\dot{p}$$

4.2.4 Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip

Dynamik im Lagrange-Formalismus $\leftrightarrow L(q_1 \cdots q_m, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_m, t)$

Zwei äquivalente Formulierungen: (2.5 S.50)

- Lagrange-Gleichungen: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
- Hamilton-Prinzip: $I\{q_1(t) \cdots q_m(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} dt L \text{ extremal,}$
d.h. $\delta I = I\{\underline{q} + \delta \underline{q}\} - I\{\underline{q}\} = 0$ für alle Variationen δq_j ,
die bei t_0, t_1 verschwinden ($\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$)
(Notation hier: $\underline{q} \hat{=} q_1 \cdots q_m$)

Im Hamilton-Formalismus $\leftrightarrow \mathcal{H}(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t)$

Wieder Äquivalenz zw. Bewegungsgleichungen und Variationsprinzip:

- Hamilton-Gleichungen: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j$
- Modifiziertes Hamilton-Prinzip:
 $I'\{q_1(t) \cdots q_m(t), p_1(t) \cdots p_m(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) \text{ extremal,}$
d.h. $\delta I' = I'\{\underline{q} + \delta \underline{q}, \underline{p} + \delta \underline{p}\} - I'\{\underline{q}, \underline{p}\} = 0$ für alle Variationen
 $\delta q_j, \delta p_k$ mit $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$ (keine Bedingungen an $\delta p_k(t)$!)
(Notation wieder: $\underline{q} \hat{=} q_1 \cdots q_m, \underline{p} \hat{=} p_1 \cdots p_m$)

(Nachweis der Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \delta I' &= I'\{\underline{q} + \delta \underline{q}, \underline{p} + \delta \underline{p}\} - I'\{\underline{q}, \underline{p}\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_j (\delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j) - \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right] \\ &\quad \text{partielle Integration bzgl. } \delta \dot{q}_j. \text{ Benutze } \delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_j \delta p_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) + \sum_j \delta q_j \left(-\dot{p}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \right] \\ &\quad \text{verschwindet genau dann für alle } \delta q_j, \delta p_j \text{ (mit } \delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0), \\ &\quad \text{wenn } \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \equiv 0 \text{ und } \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \equiv 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

4.3 Poisson-Klammern

Definieren mathematische Struktur der klassischen Mechanik

Ab jetzt häufig Kurznotation: $q := q_1 \cdots q_m, p := p_1 \cdots p_m,$

$$\frac{\partial}{\partial q} := \frac{\partial}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial}{\partial p} := \frac{\partial}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial}{\partial p_m},$$

4.3.1 Definition

Motivation: Zeitliche Entwicklung von dynamischen Größen.

Dynamische Größe oder "Observable": Funktion $f(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t) = f(\underline{q}, \underline{p}, t)$

(z.B. kinetische Energie, Schwerpunkt, Drehimpuls, ...)

$$\text{Es gilt: } \frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Allgemeiner Ausdruck für zeitliche Entwicklung einer Observablen:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad \text{mit } \{\cdot, \cdot\}: \text{Poissonklammer}$$

$$\boxed{\{f, g\} := \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{q}}}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen f und g

Speziell: Falls f nicht explizit zeitabhängig ($f(\underline{q}, \underline{p})$), gilt $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\}$

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn } \{f, \mathcal{H}\} = 0}$$

$\leadsto$ Allgemeines Kriterium, mit dem man schnell feststellen kann, ob eine gegebene Observable erhalten ist.

4.3.2 Bedeutung und Eigenschaften der Poissonklammer

Grundlegender Raum: Menge der unendlich oft differenzierbaren dynamischen Größen $f(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t)$, d.h. die Menge $C^\infty(D)$ mit $D = \Omega \times \mathbb{R}$, wobei $\Omega = \{(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)\}$ der $2m$ -dimensionale "Phasenraum" der zugänglichen Orts/Impulskoordinaten (mehr zu diesem Begriff siehe 4.5 S.82).

$\leadsto$ bilden Vektorraum V über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$\text{Poissonklammern: Definieren „Produkt“: } \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (f, g) & \longmapsto & \{f, g\} \end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften: (Beweis: (i),(ii) klar, (iii): Einsetzen)

$$(i) \text{ Bilinear: } \{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha \{f_1, g\} + \beta \{f_2, g\}$$

$$\{f, \alpha g_1 + \beta g_2\} = \alpha \{f, g_1\} + \beta \{f, g_2\}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$); $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in V$

$$(ii) \text{ Antisymmetrisch: } \{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$(iii) \text{ Jacobi-Identität: } \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

für alle $f, g, h \in V$

Einen Vektorraum mit einem Produkt (einer inneren Verknüpfung), das die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt, nennt man eine Lie-Algebra.

(Weiteres Beispiel einer Lie-Algebra: $\mathbb{R}^3$ mit Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$)

→ Mathematische Struktur der klassischen Mechanik:

- Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: Menge C^∞ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f(q, p)$
- Lie-Algebra darin, Poissonklammer

4.3.3 Beispiele für Poissonklammern

- Fundamentale Poissonklammern

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\} &= \{p_j, p_k\} = 0 \\ \{q_j, p_k\} &= \delta_{jk} \quad ; \quad \{p_j, q_k\} = -\delta_{jk} \end{aligned}$$

- Drehimpulskomponenten

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x; \quad \{L_z, L_x\} = L_y \\ &(\text{Beweis: Einsetzen}) \end{aligned}$$

- Partielle Ableitungen dynamischer Größen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p_j} &= \{q_j, f\}; \quad \frac{\partial f}{\partial q_j} = -\{p_j, f\} \\ &(\text{Beweis: Einsetzen}) \end{aligned}$$

4.4 Kanonische Transformationen

4.4.1 Definition und einfache Beispiele

Ausgangspunkt: „Phasenraum“ $\{(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)\} = \{(\underline{q}, \underline{p})\}$

Definition :

Eine kanonische Transformation ist eine Koordinatentransformation

$$(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) \mapsto (Q_1 \cdots Q_m, P_1 \cdots P_m) \text{ bzw. } (\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (\underline{Q}, \underline{P})$$

die Hamiltonsche Strukturen erhält. Das heisst, dass es für jedes dynamische System, dessen Bewegung durch eine Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}, t)$ bestimmt wird, eine Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(\underline{Q}, \underline{P}, t)$ gibt, so dass die Bewegungsgleichungen des Systems bzgl. $\underline{Q}$ und $\underline{P}$ wieder Hamilton-Gleichungen sind ($\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j} = -\dot{P}_j$; $\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} = \dot{Q}_j$).

Falls sogar $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ (dem Wert nach), spricht man von einer kanonischen Transformation im engeren Sinne.

Beispiele für kanonische Transformationen

- Vertauschung von Ort und Impuls

$$(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) \mapsto (p_1 \cdots p_m, -q_1 \cdots -q_m) \text{ bzw. } (\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (\underline{p}, -\underline{q})$$

→ Bewegungsgleichungen: Hamiltongleichungen mit $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$

Dagegen: Vertauschung $(\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (\underline{p}, \underline{q})$ ist nicht kanonisch: Man kann keine Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'$ finden, so dass Bewegungsgleichungen die kanonische Hamiltonsche Form haben.

- Punkttransformationen

im Lagrange-Formalismus können die generalisierten Koordinaten beliebig gewählt werden.

→ alle Transformationen $(q_1 \dots q_m) \mapsto (Q_1 \dots Q_m)$ erlaubt!

im Hamilton-Formalismus entspricht das $(\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (Q, P)$

$$\text{mit } P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} (\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}) = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} (\sum p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \mathcal{H})$$

(partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i}$ ausgeführt bei festgehaltenem Q_i).

$$\text{Neue Hamiltonfunktion: } \mathcal{H}' = \sum P_i \dot{Q}_i - L = \sum P_i \dot{Q}_i - \sum p_i \dot{q}_i + \mathcal{H}$$

4.4.2 Elementare Eigenschaften

* Es gilt: Poissonklammern sind unter kanonischen Transformationen invariant.

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q} \text{ bzw. } \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \right)$$

(Beweis hier nur für kanonische Transformationen im engeren Sinne)

- zunächst sei f nicht explizit zeitabhängig
 g definiert fiktives dynamisches System mit $\hat{\mathcal{H}} = g$
 In diesem System ist $\frac{df}{dt} = \{f, \hat{\mathcal{H}}\} = \{f, g\}$
 → darf von der Wahl der Koordinaten nicht abhängen
 → $\{f, g\}$ koordinatenunabhängig
- falls f doch explizit zeitabhängig: Fasse expliziten Parameter t einfach als zusätzlichen (unabhängigen) Parameter auf, darf nichts ändern an Invarianz von $\{f, g\}$. ✓

* Umgekehrt gilt: Eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn für die neuen Koordinaten gilt:

$$\boxed{\{Q_j, P_k\} = \delta_{jk}}, \quad \boxed{\{Q_j, Q_k\} = 0}, \quad \boxed{\{P_j, P_k\} = 0}$$

(Poissonklammern in alten Koordinaten ausgewertet.)

→ Allgemeines Kriterium dafür, ob eine Transformation kanonisch ist.

Falls die Transformation darüber hinaus noch zeitunabhängig ist, ist sie sogar kanonisch im engeren Sinn.

(Beweis: Notwendig - klar, da Poissonklammer invariant)

Hinreichend - soll hier nur für zeitunabhängige Transformationen gezeigt werden

$$\text{also } Q_j = Q_j(\underline{q}, \underline{p}); P_j = P_j(\underline{q}, \underline{p}) \text{ bzw. } \frac{\partial Q_j}{\partial t} = \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0$$

(und Umkehrung $q_j = q_j(Q, P); p_j = p_j(Q, P)$)

Dann gilt: $\dot{Q}_j = \{Q_j, \mathcal{H}\}$ und $\dot{P}_j = \{P_j, \mathcal{H}\}$ nach 4.3.1 S.76

Weiterhin gilt für $\mathcal{H}'(Q, P) := \mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l} &= \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_l} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) \\ \text{Einsetzen: } \dot{Q}_j &= \sum_{kl} \left[\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \right) - \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \left(\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) \right] \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \underbrace{\{Q_j, Q_k\}}_0 + \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \underbrace{\{Q_j, P_k\}}_{\delta_{jk}} \right] = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j}$$

→ Hamiltongleichungen mit transformierter Hamiltonfunktion $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$

→ Transformation kanonisch im engeren Sinne!
 (für zeitunabhängige Transformationen) ✓

4.4.3 Konstruktion kanonischer Transformationen

Ausgangspunkt: Modifiziertes Hamilton-Prinzip (4.2.4 S.75): Für kanonische Transformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ muss mit $I'_{\text{alt}} = \int_{t_0}^{t_1} dt (\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H})$ auch $I'_{\text{neu}} = \int_{t_0}^{t_1} dt (\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}')$ extremal sein. Also dürfen sich $(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H})$ und $(\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}')$ maximal um eine totale Zeitableitung unterscheiden.

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) - \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' \right)} \quad (*)$$

Motiviert folgendes Konstruktionsprinzip: In $(*)$ ist F eine Funktion von $2m$ unabhängigen Phasenraumkoordinaten (und evtl. der Zeit). Wähle als Argumente m alte Variablen und m neue Variablen (Kombination beliebig). Dann ist F eine "Erzeugende", die über $(*)$ eine kanonische Transformation vermittelt (Beweis dazu siehe Ende des Abschnitts (4.4.3))

NB: Die Existenz einer Erzeugenden F ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Transformation kanonisch ist.

Anwendung

(i) Erzeugende F in Gl. $(*)$ hängt von den q_j und Q_j ab: $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow dF = \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j dQ_j + (\mathcal{H}' - \mathcal{H})dt \\ &\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_j} = p_j} \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial Q_j} = -P_j}}_{\text{definieren Zusammenhang } Q_j(\underline{q}, \underline{p}, t), P_j(\underline{q}, \underline{p}, t)} \quad \underbrace{\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{H}' - \mathcal{H}}}_{\text{legt } \mathcal{H}' \text{ fest}} \end{aligned}$$

(ii) Erzeugende F in Gl. $(*)$ hängt von den q_j und P_j ab: $F(\underline{q}, \underline{P}, t)$

$$\begin{aligned} &\leadsto \text{Konstruiere neue Erzeugende } \Phi(\underline{q}, \underline{P}, t) = F + \sum_j P_j Q_j \\ &\Rightarrow d\Phi = dF + \sum_j (P_j dQ_j + Q_j dP_j) \\ &= \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j dQ_j + (\mathcal{H}' - \mathcal{H})dt + \sum_j (P_j dQ_j + Q_j dP_j) \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = p_j} \quad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial P_j} = Q_j} \quad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{H}' - \mathcal{H}} \end{aligned}$$

(iii) Erzeugende F hängt von den Q_j und p_j ab: $F(\underline{Q}, \underline{p}, t)$

$$\begin{aligned} &\leadsto \text{Konstruiere neue Erzeugende } \Psi(\underline{Q}, \underline{p}, t) = F - \sum_j p_j q_j \\ &\Rightarrow d\Psi = dF - \sum_j (p_j dq_j + q_j dp_j) \\ &= \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j dQ_j + (\mathcal{H}' - \mathcal{H})dt - \sum_j (p_j dq_j + q_j dp_j) \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial p_j} = -q_j} \quad \boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial Q_j} = -P_j} \quad \boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}' - \mathcal{H}} \end{aligned}$$

usw.

Beachte: Falls F nicht explizit zeitabhängig ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$), ist $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$

$\leadsto$ Transformation ist kanonisch im engeren Sinne

Zum Schluss wird nun noch der Beweis nachgeliefert, dass die Gleichung (*) eine gültige Konstruktion vermittelt.

Startpunkt: Modifiziertes Hamiltonprinzip (4.2.4 S.75)

Es gilt: $I'_{\text{alt}} = \int_{t_0}^{t_1} dt (\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H})$ extremal bzgl. Variationen $\delta q, \delta p$ mit $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$.

Zu zeigen: I'_{neu} extremal bzgl. Variationen $\delta \underline{Q}, \delta \underline{P}$ mit $\delta \underline{Q}(t_0) = \delta \underline{Q}(t_1) = 0$,

wobei $I'_{\text{neu}} = \int_{t_0}^{t_1} dt (\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}') = I'_{\text{alt}} - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dF}{dt} = I'_{\text{alt}} - F|_{t_0}^{t_1}$ laut (*)

NB: $\delta \underline{q}(t_0) = \delta \underline{q}(t_1) = 0$ impliziert nicht automatisch $\delta \underline{Q}(t_0) = \delta \underline{Q}(t_1) = 0$!

Zeige vorab: $\delta F = \sum_j (p_j \delta q_j - P_j \delta Q_j)$ unabhängig von der Wahl der Argumente von F bzgl. allgemeiner Variationen $\delta \underline{Q}, \delta \underline{P}$.

($\delta \underline{q}, \delta \underline{p}$ sind dann von $\delta \underline{Q}, \delta \underline{P}$ abhängig, z.B. $\delta \underline{q} = \underline{q}(\underline{Q} + \delta \underline{Q}, \underline{P} + \delta \underline{P}) - \underline{q}(\underline{Q}, \underline{P})$)

Dazu: Fallunterscheidung nach Argumenten wie oben

$$(i) F(\underline{q}, \underline{Q}, t) \rightsquigarrow \delta F = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_j}}_{p_j} \delta q_j + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Q_j}}_{-P_j} \delta Q_j \right) = \sum_j (p_j \delta q_j - P_j \delta Q_j) \quad \checkmark$$

$$(ii) F(\underline{q}, \underline{P}, t) = \Phi(\underline{q}, \underline{P}, t) - \sum_j P_j Q_j \\ \rightsquigarrow \delta F = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}}_{p_j} \delta q_j + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial P_j}}_{Q_j} \delta P_j \right) - \sum_j (P_j \delta Q_j + Q_j \delta P_j) = \sum_j (p_j \delta q_j - P_j \delta Q_j) \quad \checkmark$$

$$(iii) F(\underline{Q}, \underline{p}, t) = \Psi(\underline{Q}, \underline{p}, t) + \sum_j p_j q_j \\ \rightsquigarrow \delta F = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial Q_j}}_{-P_j} \delta Q_j + \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial p_j}}_{-q_j} \delta p_j \right) + \sum_j (p_j \delta q_j + q_j \delta p_j) = \sum_j (p_j \delta q_j - P_j \delta Q_j) \quad \checkmark$$

(iv) übrige Fälle analog!

Dann: Berechne Variation von $I'_{\text{neu}} = I'_{\text{alt}} - F|_{t_0}^{t_1}$ bzgl. $\delta \underline{Q}, \delta \underline{P}$ mit $\delta \underline{Q}(t_0) = \delta \underline{Q}(t_1) = 0$.

$$\text{Es gilt: } \delta I'_{\text{alt}} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}}_{-p_j} \delta q_j - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j} \delta p_j \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Partielle Integration: } \int_{t_0}^{t_1} dt p_j \delta \dot{q}_j = - \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{p}_j \delta q_j + p_j \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} \\ = \sum_j p_j \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} \end{array} \right.$$

(NB: $\delta I'_{\text{alt}} \neq 0$, da wir $\delta \underline{Q}(t_{0,1}) = 0$ fordern und nicht $\delta \underline{q}(t_{0,1}) = 0$!)

$$\Rightarrow \delta I'_{\text{neu}} = \delta I'_{\text{alt}} - \delta F|_{t_0}^{t_1} = \sum_j p_j \delta q_j - \sum_j (p_j \delta q_j - P_j \delta Q_j) = \sum_j P_j \delta Q_j \\ = 0 \quad \text{für } \delta \underline{Q}(t_0) = \delta \underline{Q}(t_1) = 0 \quad \checkmark$$

4.4.4 Der Hamilton-Jacobi Formalismus

Idee der Hamilton-Jacobi Theorie: Suche spezielle kanonische Transformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ mit $\mathcal{H}'(\underline{Q}, \underline{P}, t) \equiv 0$.

Voraussetzung: Es gibt m unabhängige Erhaltungsgrößen P_j die "Poisson-kommutieren", d.h. $\{P_j, P_k\} = 0$.

(notwendig, da mit $\mathcal{H}' \equiv 0$ folgt: $\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j} = -\dot{P}_j = 0 \Rightarrow P_j = \text{const.}$)

Systeme, die das erfüllen, nennt man Liouville-integrabel.

$\rightsquigarrow$ sehr starke Einschränkung, für $m > 1$ in der Regel nicht der Fall!

Motivation: (Warum soll man sich trotzdem damit beschäftigen ?)

- Guter Ausgangspunkt für Theorie des Hamiltonschen Chaos
- Formale Ähnlichkeit zu Gleichungen der Quantenmechanik

NB: Wenn einmal ein Satz Koordinaten $\underline{Q}, \underline{P}$ mit $\mathcal{H}'(\underline{Q}, \underline{P}) \equiv 0$ gefunden ist, ist die Lösung der Hamiltongleichungen trivial.

($\dot{\underline{Q}} = 0, \dot{\underline{P}} = 0 \Rightarrow Q_j = \text{const.}, P_j = \text{const.}$)

$\rightsquigarrow$ Problem wird verlagert auf Ermittlung der Erzeugendenfunktion

Konkret: Hamilton-Jacobi-GleichungenAllgemein: Suche Erzeugendenfunktion $\Phi(\underline{q}, \underline{P}, t) \equiv W_P(\underline{q}, t)$ (Index $\underline{P}$ steht für festen Satz von Erhaltungsgrößen P_j).Mit $\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{H}' - \mathcal{H}$, $\mathcal{H}' \equiv 0$, $p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}$ und Notation $\frac{\partial}{\partial \underline{q}} = \frac{\partial}{\partial q_1} \dots \frac{\partial}{\partial q_m}$ folgt

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{H}(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}, t) = 0} \quad \text{zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung}$$

Physikalische Bedeutung von W :

$$\frac{dW}{dt} = (\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}) - (\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}') = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = L$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_0}^t dt' L: \text{Wert entspricht der Lagrangesche Wirkung!}$$

Speziell konservatives System: Keine explizite Zeitabhängigkeit

$$\Rightarrow \mathcal{H} = E = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = -E \Rightarrow W(\underline{q}, t) = -Et + S(\underline{q}) \text{ mit } \frac{\partial W}{\partial \underline{q}} = \frac{\partial S}{\partial \underline{q}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \mathcal{H}(\underline{q}, \frac{\partial S}{\partial \underline{q}})} \quad \text{zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung}$$

Nun kann $S(\underline{q})$ selbst als Erzeugende genutzt werden. Die Erzeugendenfunktion $\tilde{\Phi}(\underline{q}, \underline{P}) := S_P(\underline{q})$ vermittelt eine kanonische Transformation im engeren Sinne $(\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (\underline{Q}, \underline{P})$ mit $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \tilde{\mathcal{H}}(\underline{Q}, \underline{P}) = E$.

Wegen $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = \dot{P}_j = 0$ folgt: $\tilde{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}(\underline{P})$: alle Variablen Q_j sind zyklisch!

Beispiele:

- 1)
- Freies Teilchen in einer Dimension
- :
- $\mathcal{H}(x, p) = p^2/2m$

$$\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung: } E = \mathcal{H}(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dx} \right)^2.$$

$$\text{Lösung: } \frac{dS}{dx} = \sqrt{2mE} \Rightarrow S(x) = \sqrt{2mE} x = S_E(x)$$

Setze $P = E$ und definiere Erzeugende $\tilde{\Phi}(x, E) := S_E(x)$

$$\tilde{\Phi} \text{ generiert Transformation } (x, p) \mapsto (Q, E) \text{ mit } Q = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} x$$

$$\text{Es gilt } \tilde{\mathcal{H}}(Q, E) = E \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = 1 \Rightarrow Q = t - t_0$$

Rekonstruiere Bahnkurve:

$$\text{Kombiniere Ausdrücke für } Q \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{2E}} (t - t_0)$$

$$\text{Nutze noch } E = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow x = v(t - t_0) =: x_0 + vt \quad \checkmark$$

- 2)
- Harmonischer Oszillator
- :
- $\mathcal{H}(x, p) = p^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$\text{Hamilton-Jacobi-Gleichung: } E = \mathcal{H}(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

$$\text{Lösung: } S_E(x) = \frac{x}{2} \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 x^2} + \frac{E}{\omega} \arctan\left(\frac{m\omega x}{\sqrt{2mE - m^2 \omega^2 x^2}}\right)$$

Setze $P = E/\omega =: I$ (Konvention), definiere Erzeugende $\tilde{\Phi}(x, I) := S_E(x)$

$$\tilde{\Phi}(x, I) \text{ generiert } (x, p) \mapsto (Q, I) \text{ mit } Q = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial I} = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2I/m\omega - x^2}}\right)$$

$$\text{Es gilt } \tilde{\mathcal{H}}(Q, I) = E = I\omega \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial I} = \omega \Rightarrow Q = \omega t - \theta_0$$

Rekonstruiere Bahnkurve:

$$\text{Kombiniere Ausdrücke für } Q \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin(\omega t - \theta_0)$$

$$\text{Nutze } I = E/\omega = \frac{1}{2} m \omega^2 x_{\max}^2 \Rightarrow x = x_{\max} \sin(\omega t - \theta_0) \quad \checkmark$$

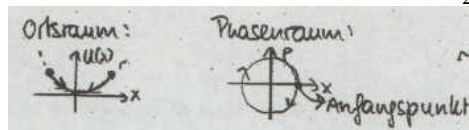
Bemerkung: Variable $Q = \omega t - \theta_0$ ist de facto ein Winkel! $I = E/\omega$ hat die Dimension einer Wirkung!

$\leadsto$ Beispiel von sogenannten "Winkel/Wirkungs-Variablen"
(mehr dazu in Kapitel 4.8.3 S.91 !)

4.5 Der Phasenraum

Wichtige Begriffe

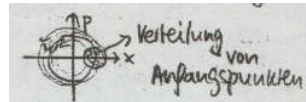
- Phasenraum: $2m$ -dimensionaler Raum der $\{(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)\} = \{q, p\}$
(z.B. N freie Teilchen in 3 Dimensionen $\Rightarrow$ Phasenraum hat $6N$ Dimensionen)
- Phasenraumpunkt: $\underline{\Gamma} = (q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) = (\underline{q}, \underline{p})$
charakterisiert Zustand eines Systems und gesamte zukünftige und vergangene Entwicklung (deterministische Dynamik, Anfangsbedingungen bekannt)
- Phasenraumtrajektorie: $\underline{\Gamma}(t)$, beschreibt Zeitentwicklung eines Systems,
z.B. harmonischer Oszillator, $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + U(x)$ mit $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$



$\leadsto$ periodische Schwingung
 $\hat{=}$ geschlossene Trajektorie

- Phasenraumdichte: $\varrho(\underline{\Gamma}, t) = \varrho(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m, t)$ Gleiches Beispiel, aber nun Schar unabhängiger gleicher Oszillatoren mit leicht verschiedenen Anfangsbedingungen.

$\leadsto$ Dichteverteilung im Phasenraum
charakterisiert durch $\varrho(x, p, t)$



NB: Solche Überlegungen macht man nicht nur, wenn man es mit!
einer Schar unabhängiger Systeme zum tun hat, sondern auch
bei einem einzelnen System, wenn Anfangsbedingung nicht ge-
nau bekannt $\leadsto$ Wahrscheinlichkeitsverteilung $\varrho(\underline{\Gamma}, t)$

4.5.1 Der Liouville-Satz

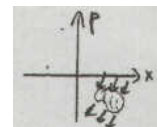
Einer der wichtigsten Sätze der Mechanik. Beschreibt charakteristischste Eigenschaft eines "Hamiltonschen Systems", also eines dynamischen Systems mit einer Zeitentwicklung, die durch einen Hamiltonoperator definiert wird.

Zentrale Frage: Wie entwickelt sich die Phasenraumdichte mit der Zeit bzw. wie verformt sich ein Volumen im Phasenraum, dessen Punkte sich gemäß einer Hamiltonschen Dynamik fortentwickeln?

- * Zunächst im 2-dimensionalen Phasenraum $\{(x, p)\}$
(Beispiel der harmonischen Oszillatoren)

- Zeitentwicklung von $\varrho(x, p, t)$ an festem Phasenraumpunkt (x, p)

$\leadsto$ in gegebenem Zeitraum $[t, t + dt]$ laufen
Trajektorien in Volumenelement $dx dp$ hinein,
und andere heraus $\leadsto$ Bewirkt Änderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$



Quantifizierung:

- Definiere "Geschwindigkeit" einer Trajektorie, $\dot{\underline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$

→ „Strom“ im Phasenraum: $\underline{J} = \varrho \cdot \dot{\underline{\Gamma}} = \varrho(x, p, t) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$

→ Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} &= \{ \text{Hereinfließender Strom} - \text{Herausfließender Strom} \} \\ &= -\nabla \underline{J} = -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial p}(\varrho \dot{p}) \end{aligned}$$

→ Kontinuitätsgleichung: Sorgt dafür, dass keine Trajektorien verloren gehen.

Gilt allgemein (auch in nicht-Hamiltonschen Systemen) !

– Zeitentwicklung von $\varrho(x(t), p(t), t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{\Gamma}(t)$

$$\begin{aligned} \text{Rechnung: } \frac{d}{dt}(\varrho(x(t), p(t), t)) &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varrho}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{Kontinuitätsgleichung}}{=} \frac{\partial \varrho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varrho}{\partial p} \dot{p} - \frac{\partial(\varrho \dot{x})}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial(\varrho \dot{p})}{\partial p} \dot{p} = -\varrho \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) \\ &\stackrel{\text{Hamiltongleichungen: } \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}}{=} -\varrho \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varrho(x(t), p(t), t) = \text{const.}} \quad \underline{\text{Liouville-Satz}}$$

* Allgemein: 2m-dimensionaler Phasenraum → Selbes Resultat!

– „Geschwindigkeit“ im Phasenraum: $\dot{\underline{\Gamma}} = \frac{d\underline{\Gamma}}{dt}$

– Strom im Phasenraum: $\underline{J} = \varrho \cdot \dot{\underline{\Gamma}}$

– Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \underline{J} = 0$

$$\text{bzw. } \frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial(\varrho \dot{q}_j)}{\partial q_j} + \frac{\partial(\varrho \dot{p}_j)}{\partial p_j} \right)$$

– Phasenraumdichte entlang einer Trajektorie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho(\underline{\Gamma}(t), t) &= \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial \varrho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \varrho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) \\ &\stackrel{\text{Kontinuitätsgleichung}}{=} -\varrho \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = -\varrho \sum_j \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_j} \right) = 0 \end{aligned}$$

⇒ Liouvillescher Satz:

Die Phasenraumdichte entlang einer gegebenen Hamiltonschen Trajektorie im Phasenraum ist konstant!

Das Phasenraumvolumen einer Menge Phasenraumpunkte, die sich gemäß einer Hamilton-Dynamik entwickeln, bleibt zeitlich erhalten!

Bedeutung des Liouville-Satzes

- Wichtige Konsequenzen für dynamische Eigenschaften
- Grundvoraussetzung für die Gültigkeit der klassischen statistischen Mechanik (→ Entropie, Temperatur, ...)

4.5.2 Hintergrund: Symplektische Struktur des Phasenraums

Liouville-Satz: Äußerer Ausdruck einer strukturellen Eigenschaft der Hamilton-Dynamik: Symplektizität
 $\leadsto$ Erheblich weitreichender als Liouville-Satz, beinhaltet Liouville-Satz als wichtigste Konsequenz

Definition:

Betrachte drei infinitesimal benachbarte Punkte im Phasenraum

$$\underline{\Gamma} = (\underline{q}, \underline{p}); \quad \underline{\Gamma} + d\underline{\Gamma} = (\underline{q} + d\underline{q}, \underline{p} + d\underline{p}); \quad \underline{\Gamma} + d\underline{\Gamma}' = (\underline{q} + d\underline{q}', \underline{p} + d\underline{p}')$$

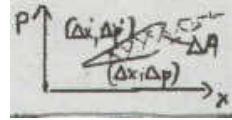
$(\underline{q}, \underline{p} \text{ kurz für } q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m)$

Die differentielle symplektische Fläche von $(d\underline{\Gamma}, d\underline{\Gamma}')$ ist definiert als:

$$\begin{aligned} d\Sigma &:= d\underline{p} \cdot d\underline{q}' - d\underline{q} \cdot d\underline{p}' & (= \sum_j (dp_j dq'_j - dq_j dp'_j)) \\ &\equiv d\underline{\Gamma} \underline{S}_m d\underline{\Gamma}' \text{ mit } \underline{S}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_m \\ \mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix} & (\mathbb{1}_m: m \times m\text{-Einheitsmatrix}) \end{aligned}$$

z.B. Eindimensionales System:

$$d\Sigma = - \begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx' \\ dp' \end{pmatrix} \hat{=} \text{Fläche}$$



(NB: Mathematisch gesehen stellt $d\Sigma$ eine Differentialform vom Grad 2 (eine 2-Form) dar.)

Eine Variablentransformation heißt symplektisch, wenn sie alle differentiellen symplektischen Flächen $d\Sigma$ invariant lässt.

Nun gilt (Behauptung):

- (1) Alle kanonischen Transformationen sind symplektisch
- (2) Die Zeitentwicklung definiert eine kanonische Transformation, d.h. die Transformation $(\underline{q}_0, \underline{p}_0) \mapsto (\underline{Q}, \underline{P}) = (\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ mit $\{Q_j = q_j(t), P_j = p_j(t)\}$ bei Anfangsbedingung: $\underline{q}(0) = \underline{q}_0, \underline{p}(0) = \underline{p}_0$ ist kanonisch.

Beweis zu Behauptung (1)

Zu zeigen: Für kanonische Transformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$

$$\text{gilt: } d\underline{Q} d\underline{P}' - d\underline{Q}' d\underline{P} = d\underline{q} d\underline{p}' - d\underline{q}' d\underline{p}$$

Benutze: Transformation kanonisch $\leftrightarrow$ Poissonklammer invariant

Vorweg: Für beliebige Größen gilt: $\frac{\partial f}{\partial q_j} = -\{p_j, f\}; \quad \frac{\partial f}{\partial p_j} = \{q_j, f\}$

$$(\text{Beweis durch Einsetzen: } -\{p_j, f\} = -\sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \text{ etc.})$$

$$\text{Analog natürlich auch: } \frac{\partial f}{\partial Q_j} = -\{P_j, f\}; \quad \frac{\partial f}{\partial P_j} = \{Q_j, f\}$$

$$\text{Daraus folgt insbesondere: } \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_i} = -\{p_i, Q_\alpha\} = \{Q_\alpha, p_i\} = \frac{\partial p_i}{\partial P_\alpha}$$

$$\text{und analog } \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_\alpha}, \quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial Q_\alpha}, \quad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_\alpha}$$

$$\begin{aligned}
d\underline{Q} d\underline{P}' - d\underline{P} d\underline{Q}' &= \sum_{\alpha} (dQ_{\alpha} dP'_{\alpha} - dP_{\alpha} dQ'_{\alpha}) \\
&\left| \begin{array}{l} \text{Entwickle: } dQ_{\alpha} = \sum_i (\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_i} dp_i), dQ'_{\alpha} = \sum_j (\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_j} dq'_j + \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_j} dp'_j) \\ \text{und analog auch } dP_{\alpha}, dP'_{\alpha}; \\ \text{Samme und sortiere: Terme } dq_i dq'_j, dp_i dp'_j \text{ fallen raus} \end{array} \right. \\
&= \sum_{ij\alpha} \{ dq_i dp'_j [\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_j}] + dp_i dq'_j [\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_j}] \} \\
&\left| \begin{array}{l} \text{Verwende } \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial P_{\alpha}}, \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_{\alpha}}, \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial Q_{\alpha}}, \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_{\alpha}} \\ \Rightarrow \sum_{\alpha} [\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_j}] = \sum_{\alpha} [\frac{\partial p_i}{\partial P_{\alpha}} \frac{\partial q_j}{\partial Q_{\alpha}} - \frac{\partial q_j}{\partial P_{\alpha}} \frac{\partial p_i}{\partial Q_{\alpha}}] = \{q_j, p_i\} = \delta_{ij} \\ \sum_{\alpha} [\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial p_i} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_j}] = \sum_{\alpha} [\frac{\partial p_i}{\partial P_{\alpha}} \frac{\partial q_j}{\partial Q_{\alpha}} - \frac{\partial q_j}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial p_i}{\partial P_{\alpha}}] = \{p_i, q_j\} = -\delta_{ij} \end{array} \right. \\
&= \sum_i (dq_i dp'_i - dp_i dq'_i) = d\underline{q} d\underline{p}' - d\underline{p} d\underline{q}' \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Beweis zu Behauptung (2):

Es genügt zu zeigen, dass infinitesimale Zeitentwicklung kanonisch ist.

Also: $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ mit $(\underline{Q} = \underline{q} + \dot{\underline{q}} dt, \underline{P} = \underline{p} + \dot{\underline{p}} dt)$

~> Berechne fundamentale Poissonklammern

$$\begin{aligned}
\{Q_i, P_j\} &= \{q_i, p_j\} + \frac{d}{dt} \{q_i, p_j\} dt + \dots \\
&= \{q_i, \dot{p}_j\} + [\{\dot{q}_i, p_j\} + \{q_i, \dot{p}_j\}] dt + \dots \\
&\quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} + \sum_k [\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_k \partial q_j}}_{\delta_{ik}} + \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_k \partial q_j}}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_k \partial p_i} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_k \partial p_i} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_0] dt + \dots \\
&= \delta_{ij} + [-\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i}] dt + \dots = \delta_{ij} + \dots (\mathcal{O}(dt^2)) \\
&\text{Analog } \{Q_i, Q_j\} = 0, \{P_i, P_j\} = 0
\end{aligned}$$

Folgerungen

- (i) Die Hamiltonsche Dynamik ist symplektisch: Für drei infinitesimal benachbarte Trajektorien $\underline{\Gamma}(t)$, $\underline{\Gamma}(t) + d\underline{\Gamma}(t)$, $\underline{\Gamma}(t) + d\underline{\Gamma}'(t)$ gilt:
 $d\Sigma(t) = d\underline{\Gamma} \underline{\underline{S}}_m d\underline{\Gamma}' = \text{const.}$
~> die differentielle symplektische Fläche zwischen den Trajektorien ist zeitlich konstant.

- (ii) Daraus kann man den Liouville-Satz ableiten:

Betrachte infinitesimales Volumen, aufgespannt von $(2m+1)$ infinitesimal benachbarten Trajektorien $\underline{\Gamma}(t)$, $\underline{\Gamma}(t) + d\underline{\Gamma}^{(1)}(t), \dots, \underline{\Gamma}(t) + d\underline{\Gamma}^{(m)}(t)$

$$\rightsquigarrow \text{Volumen ist } dV = \det(d\underline{\Gamma}^{(1)} \dots d\underline{\Gamma}^{(m)}) = \det \begin{pmatrix} d\underline{q}^{(1)} \dots d\underline{q}^{(m)} \\ d\underline{p}^{(1)} \dots d\underline{p}^{(m)} \end{pmatrix}$$

~> lässt sich ausdrücken als Summe von Produkten
von $d\underline{\Gamma}^{(i)} \underline{\underline{S}}_m d\underline{\Gamma}^{(j)} = A^{(ij)}(t)$ (siehe dazu Scheck, Mechanik, S. 102)

~> Aus $dA^{(ij)}(t) = \text{const.}$ folgt $dV = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Phasenraumvolumen ändert sich zeitlich nicht, damit bleibt auch Phasenraumdichte entlang $\underline{\Gamma}(t)$ konstant.

4.6 Zusammenfassung: Hamiltonsche Mechanik

Definiert mathematische Struktur der klassischen Mechanik

- Raum: Phasenraum $(q_1 \cdots q_m, p_1 \cdots p_m) \equiv (\underline{q}, \underline{p}) \equiv \underline{\Gamma}$
(q: generalisierte Koordinaten, p: generalisierte Impulse)
Funktionen $f(\underline{q}, \underline{p}, t) \in C^\infty$ (unendlich oft differenzierbar)
 bilden Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
- Struktur: Lie-Algebra, vermittelt durch „äußeres Produkt“
 der Poissonklammer: $\{f, g\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$
- Dynamik: Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$
 Hamiltongleichungen $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad ; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$
 Beliebige Observable: $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

Kanonische Transformationen:

Koordinatentransformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \mapsto (\underline{Q}, \underline{P})$ im Phasenraum, die diese Struktur unverändert lassen.

Also insbesondere: Poisson-Klammer invariant

NB: Dann bleibt eine Hamiltonsche Dynamik auch Hamiltonsch, d.h.:
 Falls sie in dem System $(\underline{q}, \underline{p})$ durch Hamiltonian $\mathcal{H}$ beschrieben wird,
 gibt es im System $(\underline{Q}, \underline{P})$ eine Hamiltonian $\mathcal{H}'$, die dieselbe Dynamik beschreibt.

Liouville-Satz

Phasenraumdichte $\varrho(\underline{\Gamma}, t)$

Liouville-Satz: $\frac{d}{dt} \varrho(\underline{\Gamma}(t), t) = 0$, falls Dynamik Hamiltonsch ist.

4.7 Anwendung: Kleine Schwingungen

Als Anwendung des bisher Gelernten: Betrachte stabiles System von N Teilchen (d.h. ein System, das weder explodiert noch implodiert) nahe an dem Zustand niedrigster Energie. Einfachheitshalber Beschränkung auf eine Raumdimension (weniger Indizes). Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist trivial.

→ Beschreibung durch Potential $U(x_1 \cdots x_N)$ mit Minimum U_0 bei $(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N)$.

4.7.1 Lineare Näherung

Ausgangspunkt: Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(x_1 \cdots x_N, p_1 \cdots p_N) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m_j} + U(x_1 \cdots x_N)$

Annahme: Konfiguration des Systems weicht nur leicht ab von $(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N)$

Entwickle $U(x_1 \cdots x_N)$ um Minimum $U_0 = U(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N)$

$$\Rightarrow U(x_1 \cdots x_N) \approx U_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N} (x_i - \bar{x}_i) (x_j - \bar{x}_j)$$

→ Motiviert erste kanonische Transformation (im Wesentlichen Reskalierung)

$$\begin{array}{|l} p_i \mapsto \tilde{p}_i = p_i / \sqrt{m_i} \\ x_i \mapsto \tilde{q}_i = (x_i - \bar{x}_i) \sqrt{m_i} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Kanonisch, da } \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0 \text{ und} \\ \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik} \sqrt{m_i}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk} / \sqrt{m_j}} - \underbrace{\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial \tilde{x}_k}}_0 \right) = \delta_{ij} \quad \checkmark \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_N, \tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_N) = U_0 + \frac{1}{2} \sum_j \tilde{p}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{q}_i \tilde{q}_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N} \frac{1}{\sqrt{m_i m_j}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Matrixnotation: Definiere Matrix } \underline{\Phi} = \{\Phi_{ij}\} \text{ mit } \Phi_{ij} = \sqrt{\frac{1}{m_i m_j}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N} \\ \text{und Vektoren } \underline{\tilde{q}} = (\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_N), \underline{\tilde{p}} = (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_N) \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(\underline{\tilde{q}}, \underline{\tilde{p}}) = U_0 + \frac{1}{2} \underline{\tilde{p}}^T \underline{\tilde{p}} + \frac{1}{2} \underline{\tilde{q}}^T \underline{\Phi} \underline{\tilde{q}}$$

4.7.2 Normalmodenzerlegung

Nutze nun: $\underline{\Phi}$ ist symmetrisch ($\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$)

$\underline{\Phi}$ ist positiv semidefinit ($\underline{u}^T \underline{\Phi} \underline{u} \geq 0 \quad \forall \underline{u}$)

⇒ $\underline{\Phi}$ kann diagonalisiert werden: $\underline{\Phi} =: \underline{U}^T \underline{\Omega} \underline{U}$ mit $\underline{U}^T \underline{U} = \mathbb{1}$ (orthogonal)
und $\underline{\Omega}$: Diagonale Matrix mit positiven Eigenwerten $\Omega_{ij} = \delta_{ij} \omega_i^2$

→ Schreibe $\mathcal{H}$ um als $\mathcal{H} = U_0 + \frac{1}{2} \underline{\tilde{p}}^T \underline{U}^T \underline{U} \underline{\tilde{p}} + \frac{1}{2} \underline{\tilde{q}}^T \underline{U}^T \underline{\Omega} \underline{U} \underline{\tilde{q}}$

→ Motiviert zweite kanonische Transformation

$$\begin{array}{|l} \tilde{q} \mapsto \underline{\xi} = \underline{U} \underline{\tilde{q}} \\ \tilde{p} \mapsto \underline{p}_\xi = \underline{U} \underline{\tilde{p}} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Kanonisch, da } \{\xi_i, \xi_j\} = \{p_{\xi i}, p_{\xi j}\} = 0 \text{ und} \\ \{\xi_i, p_{\xi j}\} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial \xi_i}{\partial \tilde{q}_k}}_{U_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_{\xi j}}{\partial \tilde{p}_k}}_{U_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial \xi_i}{\partial \tilde{p}_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial p_{\xi j}}{\partial \tilde{q}_k}}_0 \right) = \sum_k U_{ik} U_{jk} = \delta_{ij} \quad \checkmark \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = U_0 + \frac{1}{2} (\underline{p}_\xi^T \underline{p}_\xi + \underline{\xi}^T \underline{\Omega} \underline{\xi}) = U_0 + \sum_{k=1}^N \mathcal{H}_k \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_k = \frac{1}{2} p_{\xi k}^2 + \frac{1}{2} \xi_k^2 \omega_k^2$$

→ N unabhängige harmonische Oszillatoren, mit Hamiltonfunktionen $\mathcal{H}_k$!
Koordinaten ξ_k heissen "Normalmoden"

Bemerkung: Häufig betrachtet man Systeme, die translationsinvariant sind, d.h. $U(x_1 + a, \dots, x_N + a) = U(x_1, \dots, x_N)$ für alle a . Dann muss es eine Mode ξ_j geben mit $\omega_j = 0$: Entspricht der kollektiven Verschiebung aller Teilchen um a , beschreibt konstante Schwerpunktsbewegung $R(t) = V_s(t - t_0)$. Diese Mode wird üblicherweise separat behandelt.

$$\leadsto \mathcal{H} = U_0 + \mathcal{H}_{\text{Schwerpunkt}} + \sum'_k \mathcal{H}_k$$

mit $\sum'_k$: Summe ohne Schwerpunktbewegung.

Analog in drei Dimensionen: Dort gibt es sechs Moden, für die aus Symmetriegründen oft $\omega_j = 0$ gelten muss und die dann aus der Summe $\sum'_k \mathcal{H}_k$ ausgenommen werden: Drei für die Schwerpunktbewegung und drei für kollektive Rotationen.

4.7.3 Lösung im Hamilton-Jacobi Formalismus

System $\mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k$ ist Liouville-integrabel, denn:

- Es gibt N Erhaltungsgrößen $\mathcal{H}_j$ ($\frac{d}{dt} \mathcal{H}_j = \{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}\} = 0$)
- Diese sind Poisson-kommutierend ($\{\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k\} = 0$)

$\leadsto$ Der Hamilton-Jacobi-Formalismus (4.4.4 S.80) kann angewendet werden.

$$\text{Hamilton-Jacobi Gleichung: } E = \mathcal{H}(\underline{\xi}, \frac{\partial S}{\partial \underline{\xi}}) = U_0 + \sum_k \mathcal{H}_k(\xi_k, \frac{\partial S}{\partial \xi_k})$$

Setze an $S(\underline{\xi}) = \sum_k S_k(\xi_k)$ und definiere $E_k := \mathcal{H}_k (= \text{const.})$

$$\Rightarrow N \text{ entkoppelte Gleichungen } E_k = \mathcal{H}_k(\xi_k, \frac{\partial S_k}{\partial \xi_k})$$

$\leadsto$ bereits in 4.4.4 S.80, Beispiel 2 gelöst!

$\Rightarrow$ Beschreibung in Winkel/Wirkungs-Variablen θ_k, I_k

$$\text{mit } I_k = E_k / \omega_k, \theta_k = \omega_k t - \theta_{k,0}$$

$$\leadsto \text{in Koordinaten } \xi_k \text{ erhält man } \xi_k(t) = \sqrt{\frac{2I_k}{\omega_k}} \sin(\omega_k t - \theta_{k,0})$$

Zurückgerechnet auf ursprünglichen Koordinaten $x_i(t)$

$$(\text{benutze } (x_i - \bar{x}_i) \sqrt{m_i} = \tilde{q}_i \text{ mit } \tilde{q} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\xi}, I_j = E_j / \omega_j)$$

$$x_i(t) = \bar{x}_i + \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum'_j U_{ji} \sqrt{\frac{2E_j}{\omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \theta_{j,0}) + V_s(t - t_0)$$

(NB: Man hätte die entkoppelten Hamilton-Gleichungen natürlich auch leicht direkt lösen können!)

4.7.4 Zusammenfassung: Kleine Schwingungen

Kleine Schwingungen: Häufige Näherung zur Beschreibung von Systemen bei nicht zu hohen Energien (z.B. Moleküle, Kristalle)

$\leadsto$ exakt lösbares Problem

$\leadsto$ guter Ausgangspunkt für allgemeinere Behandlung

Ergebnis: Zerlegung in Normalmoden: Entsprechen den Eigenschwingungen des Systems bzw. den Resonanzen, falls die Systeme angeregt werden.

Kontinuierliche Symmetrien (z.B. Translationsinvarianz, Isotropie) führen zu Moden mit Frequenzen $\omega_k = 0$.

Lineare Näherung führt zu Liouville-integrablen Systemen

Integrabilitätseigenschaft geht in der Regel verloren, wenn höhere Terme in der Entwicklung des Potentials U berücksichtigt werden

→ Nichtlineare Dynamik, evtl. Übergang ins Chaos (nächstes Kapitel!)

4.8 Ausblick: Ein Ausflug ins Hamiltonsche Chaos

Geschichtliche Bemerkungen:

1687 Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Begründung der Newtonschen Mechanik und Gravitationsgesetz.

→ Mathematische Erklärung der Keplerschen Gesetze

Lösung des Zweikörperproblems (Kapitel 1.7 S.28)

Danach (Newton und viele andere): Versuche, das Dreikörperproblem zu lösen (z.B. Erde + Sonne + Jupiter)

Zentrale Frage: Ist das Sonnensystem stabil?

1888 Henri Poincaré: (Beitrag zu einem Wettbewerb zu diesem Thema)

Es gibt keine analytische Lösung des Dreikörperproblems.

- Beweis, dass das planare Dreikörper-Problem in der Regel nicht integrabel ist. (Bis dahin wurde vermutet, dass jedes Hamiltonsche System integrabel ist!)
- Beweis, dass es Bereiche im Phasenraum gibt, in denen kleinste Änderungen der Parameter große Konsequenzen haben und sich deshalb die Entwicklung eines Systems nicht genau vorhersagen lässt. (NB: Parameter sind prinzipiell nie genau bekannt!)

Eine sehr kleine Ursache, die uns entgehen mag, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht ignorieren können, und wir sagen dann, dass dieser Effekt auf Zufall beruht ("Wissenschaft und Methode", 1903)

⇒ Begründung der Chaostheorie

Geriet danach wieder etwas in Vergessenheit.

1963 Edward Lorenz: Wiederbelebung des Chaosgedanken

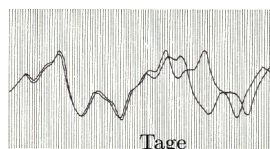
Beobachtung in Simulationen des Wetterprogramms "Royal Mc Bee"

(Eines der ersten Wettermodelle:

Ideal glatte Erde, immer Sonne, kein Sommer/Winter

Aber: Bereits Tiefdruckgebiete, wechselnde Windrichtungen etc.)

Vergleich zweier Simulationen mit fast identischen Startbedingungen:



(aufgetragen ist irgendeine Größe)

→ nach einiger Zeit weichen die Ergebnisse stark voneinander ab!

⇒ "Butterfly-Effekt"

Seit ~ 1970: Aktives Forschungsgebiet der Physik: ("Nichtlineare Dynamik")

Fundamentale Ergebnisse aus der mathematischen Theorie sind allerdings teilweise älter (z.B. KAM Theorem, 4.8.3)

4.8.1 Identifizierung von Chaos

Definierendes Kennzeichen von Chaos:

Trajektorien reagieren sehr sensitiv auf kleinste Veränderungen der Anfangsbedingungen ("exponentiell divergent")

Quantifizierung allgemein:

Zunächst dynamisches System mit nur einer Dimension x :

(NB: nicht Hamiltonsch, dazu bräuchte es $2m$ Dimensionen!)

Betrachte zwei Trajektorien mit Abstand $\Delta x_0 \rightarrow 0$ zur Zeit $t = 0$.

→ Zur Zeit t sei der Abstand $\Delta x(t)$

Definiere Lyapunov-Exponent:

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x_0} \right]$$

($\leadsto$ Verhalten bei $t \rightarrow \infty$: $\Delta x(t) \sim \Delta x_0 e^{\lambda t}$)

System heisst chaotisch, wenn $\lambda > 0$ ($\Rightarrow \Delta x(t)$ divergiert)

Viele ($2m$) Dimensionen:

$\leadsto$ Man erhält $2m$ Lyapunov-Exponenten

System ist chaotisch, wenn einer davon positiv ist.

Beispiele: Getriebenes gedämpftes Pendel, Doppelpendel

4.8.2 Eigenarten von Hamiltonschem Chaos

In Hamiltonschen Systemen gilt der Liouville-Satz $\rightarrow$ starke Einschränkung!

1) Phasenraumvolumen bleibt immer gleich.

Fundamentaler Unterschied zu dissipativen Systemen, wo das Phasenraumvolumen mit der Zeit kleiner wird und sich Systeme nach langer Zeit oft auf einen niederdimensionalen Unterraum zurückziehen (einen "Attraktor") – sowohl im chaotischen als auch im nichtchaotischen Fall.

Kennzeichen von dissipativem Chaos (Hausaufgabe: Internetrecherche):

"Seltsame" Attraktoren mit fraktaler Dimension

So etwas kann es im Hamiltonschen Chaos nicht geben!

2) Poincarésches Wiederkehrtheorem

In endlichen Systemen gilt: In jeder Umgebung V_0 eines Phasenraumpunktes $\underline{\Gamma}_0$ kann mindestens eine Trajektorie gestartet werden, die nach endlicher Zeit wieder in V_0 zurückführt.

(Beweis: Zerlege Zeit in Zeitschritte Δt)

$\leadsto$ diskrete Zeitentwicklung $V_0 \xrightarrow{\Delta t} V_1 \xrightarrow{\Delta t} V_2 \rightarrow \dots V_n \rightarrow \dots$

Nimm an $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Wegen des Liouvillesatzes muss es ein Paar (m, n) geben mit $V_m \cap V_n \neq \emptyset$

Verfolge $V_n \cap V_m$ rückwärts in der Zeit $\rightarrow V_{n-m} \cap V_0 \neq \emptyset \quad \checkmark$)

Ausgangspunkt der Theorie des Hamiltonschen Chaos ist oft ein integrables Referenzsystem, welches mit der Hamilton-Jacobi Theorie (4.4.4 S.80) gelöst wurde. Daher im nächsten Abschnitt (4.8.3) zunächst eine allgemeine Diskussion integrierbarer Systeme.

4.8.3 Integrable Systeme

1) Definition (Erinnerung an 4.4.4 S.80): Liouville-Integrabilität

Ein Hamiltonsches System im $2m$ -dimensionalen Phasenraum heisst integrabel, wenn es m unabhängige Erhaltungsgrößen P_j gibt, die Poisson-kommutieren, d.h. $\{P_j, P_k\} = 0 \ \forall \ j, k$

($\rightarrow$ Dann hat Hamilton-Jacobi Gleichung eine Lösung)

2) Invariante Tori und Winkel/Wirkungsvariablen

Untersuche nun topologische Struktur der Hyperflächen mit $P_j = \text{const.} \ \forall j$

– Trajektorien bleiben auf diesen Flächen $\rightarrow$ "invariante" Flächen

– Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{Q}, \underline{P}) = \overline{\mathcal{H}}(\underline{P}) \rightarrow \dot{Q}_j = \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial P_j} = u_j \Rightarrow Q_j = u_j t + Q_{j,0}$

Nimm an, endliches System bzw. räumlich begrenzte Bewegung.

$\leadsto Q_j$ kehrt zurück, geschlossene Bahn

$\leadsto Q_j$ muss periodisch sein!

Normiere so, dass die Periodizität genau 2π ist ($Q_j + 2\pi \cong Q_j$).

z.B. wie in 4.4.4, Beispiel 2 (harmonischer Oszillator)

$\Rightarrow$ Winkel/Wirkungs-Variablen θ_j, I_j :

$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \overline{\mathcal{H}}(\underline{I})$ mit $\frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial I_j} =: \omega_j$

Trajektorien: $\theta_j(t) = (\omega_j t + \theta_{j,0}) \bmod 2\pi$

$\Rightarrow$ Struktur der invarianten Fläche: Torus

Jeder Satz $\underline{I}$ definiert einen separaten Torus

NB: Alternative Definition eines integrablen Systems:

Ein System, dessen Phasenraum in invariante Tori aufblättert.

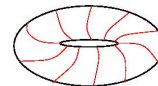
3) Folgerungen für Trajektorien

Alle Koordinaten θ_j zusammengenommen:

$\leadsto$ Trajektorien winden sich um m -dimensionalen Torus

Trajektorien sind nicht unbedingt geschlossen.

(nur, falls Windungsfrequenzen kommensurabel)



Variable θ_j periodisch $\Rightarrow$ Beliebige Funktionen $f(t) = f(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = f(\underline{\theta}(t), \underline{I}(t))$ kann man in einer multidimensionalen Fourier-Reihe

entwickeln: $f(\underline{\theta}, \underline{I}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} f_{\underline{k}}(\underline{I}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{\theta}}$ mit $\underline{k} \cdot \underline{\theta} = \sum_j k_j \theta_j$

$\Rightarrow f(t) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i \underline{k} \cdot (\underline{\omega} t + \underline{\theta}_0)} f_{\underline{k}}$

$\leadsto$ Motiviert Klassifizierung nach der Topologie der Trajektorien:

Möglichkeiten

* Torus nichtresonant, rational unabhängig

$\underline{\omega} \cdot \underline{k} \neq 0$ für alle $\underline{k} \in \mathbb{Z}^m, \underline{k} \neq 0$

$\leadsto$ Jede Trajektorie füllt den gesamten Torus!

* Torus resonant, rational abhängig

$\underline{\omega} \cdot \underline{k} = 0$ für ein $\underline{k} \in \mathbb{Z}^m (\underline{k} \neq 0)$

$\leadsto$ Trajektorien füllen jeweils nur einen Teil des Torus

Torus zerfällt in Untertori

- * Speziell: Es gibt $m - 1$ unabhängige resonante Relationen $\underline{\omega} \cdot \underline{k} = 0$
 $\leadsto$ Dann ist jede Frequenz ein Vielfaches einer Grundfrequenz ω^*
 Torus gefüllt mit periodischen Orbits der Periode $2\pi/\omega^*$

4) Nicht-entartete Systeme

Angenommen, $\underline{\omega}(\underline{I})$ sei als Funktion von $\underline{I}$ stetig differenzierbar und endlich, und $\det \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{I}} \neq 0$ für alle $\underline{I}$
 $\Rightarrow$ Resonante Tori liegen dicht in der Menge aller Tori
 (analog rationale Zahlen / reelle Zahlen)

4.8.4 Kleine Störungen und KAM-Theorem

Betrachte nun integrables System $\mathcal{H}_0(\underline{q}, \underline{p})$ mit kleiner Störung:

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \mathcal{H}_0(\underline{q}, \underline{p}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{q}, \underline{p}) \text{ (alles zeitunabhängig)}$$

Frage: Bleibt das System integrabel?

Wie wirkt sich die Störung auf invariante Tori aus?

1) Historisch

1892 Poincaré ("Vater des Chaos"); 1937 Birkhoff

Resonante Tori werden durch beliebig kleine Störung zerstört!

Folgerung: In nichtentarteten Systemen wird eine dichte Menge der Tori zerstört $\rightarrow$ i.A. ist Hamiltonsystem nicht integrabel!

1954 Kolmogorov: Dennoch überlebt Mehrzahl der Tori eine endliche Störung, wird nur verformt ("stark nichtresonante Tori")

1962 Moser, 1963 Arnold: KAM-Theorem

2) Anschaulich

In resonanten Tori wird immer derselbe Untertorus durchlaufen.

Kleine Störung (z.B. zusätzlicher Planet im Dreikörperproblem) gibt der Trajektorie an immer der gleichen Stelle einen kleinen "Kick"
 $\leadsto$ das destabilisiert die Torus-Trajektorie!

In nichtresonanten Tori wirkt der "Kick" jedesmal ein wenig anders

$\leadsto$ Effekt mittelt sich heraus, Torus-Trajektorie kann überleben!

3) Zugang mittels Störungstheorie

Widerspruchsbeweis: Zeige, dass $\mathcal{H}$ i.A. nicht integrabel ist!

Hier nur grobe Idee des Arguments. Tatsächliche saubere mathematische Behandlung ist aufwendiger!

- $\mathcal{H}_0$ integrabel $\Rightarrow$ Lässt sich kanonisch in Winkel/Wirkungsvariablen $(\underline{\theta}, \underline{I})$ darstellen mit $\underline{\theta} = \underline{\omega}t + \underline{\theta}_0$
- Vermute, dass $\mathcal{H}(\underline{\theta}, \underline{I}) = \mathcal{H}_0(\underline{I}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{\theta}, \underline{I})$ auch integrabel ist:
 - Dann existieren m Erhaltungsgrößen $\underline{I}'$ und eine kanonische Transformation $(\underline{\theta}, \underline{I}) \mapsto (\underline{\theta}', \underline{I}')$, so dass $\mathcal{H}(\underline{\theta}, \underline{I}) = \mathcal{H}'(\underline{I}')$

– Dann kann der Hamilton-Jacobi Formalismus (4.4.4 S.80) angewendet werden: Es existiert eine Erzeugende $S(\underline{\theta}, \underline{I}')$ mit $\frac{\partial S}{\partial \underline{I}'} = \underline{\theta}'$, $\frac{\partial S}{\partial \underline{\theta}} = \underline{I}$, die die Hamilton-Jacobi Gleichung löst: $E = \mathcal{H}(\underline{\theta}, \frac{\partial S}{\partial \underline{\theta}})$, wobei $E = \mathcal{H}'(\underline{\theta}')$

- Störungsentwicklung: Setze an $S = S_0 + \epsilon S_1$ mit $S_0 = \underline{I}' \cdot \underline{\theta}$ (S_0 vermittelt die Identität: $\underline{\theta}' = \frac{\partial S_0}{\partial \underline{I}'} = \underline{\theta}$ ✓)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{H}'(\underline{I}') &\stackrel{!}{=} \mathcal{H}(\underline{\theta}, \frac{\partial S}{\partial \underline{\theta}}) = \mathcal{H}_0(\frac{\partial S}{\partial \underline{\theta}}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{\theta}, \frac{\partial S}{\partial \underline{\theta}}) \\ &= \mathcal{H}_0(\underbrace{\frac{\partial S_0}{\partial \underline{\theta}}}_{\underline{I}'} + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \underline{\theta}} + \dots) + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{\theta}, \underbrace{\frac{\partial S_0}{\partial \underline{\theta}}}_{\underline{I}'} + \dots) \\ &= \mathcal{H}_0(\underline{I}') + \epsilon \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \underline{I}'}}_{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \underline{I}'} + \mathcal{O}(\epsilon) = \underline{\omega} + \mathcal{O}(\epsilon)} \frac{\partial S_1}{\partial \underline{\theta}} + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{\theta}, \underline{I}') + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \mathcal{H}_0(\underline{I}') + \epsilon \underline{\omega} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \underline{\theta}} + \epsilon \mathcal{H}_1(\underline{\theta}, \underline{I}') + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

- Entwicklung in Fourier-Reihe analog 4.8.3 S.91

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \sum_{\underline{k}} \mathcal{H}_{1,\underline{k}}(\underline{I}') e^{i\underline{k} \cdot \underline{\theta}}; \quad S_1 = \sum_{\underline{k}} S_{1,\underline{k}}(\underline{I}') e^{i\underline{k} \cdot \underline{\theta}} \Rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial \underline{\theta}} = i \sum_{\underline{k}} \underline{k} S_{1,\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{\theta}} \\ \text{Einsetzen: } \underbrace{\mathcal{H}'(\underline{I}') - \mathcal{H}_0(\underline{I}')}_{\text{unabhängig von } \underline{\theta}} &= \epsilon \sum_{\underline{k}} [i \underline{\omega} \cdot \underline{k} S_{1,\underline{k}}(\underline{I}') + \mathcal{H}_{1,\underline{k}}(\underline{I}')] e^{i\underline{k} \cdot \underline{\theta}} \quad \forall \underline{\theta} \\ &\Rightarrow [\dots] = 0 \Rightarrow S_{1,\underline{k}}(\underline{I}') = i \mathcal{H}_{1,\underline{k}}(\underline{I}') / \underline{\omega} \cdot \underline{k} \\ &\Rightarrow S_1(\underline{\theta}, \underline{I}') = i \sum_{\underline{k}} \frac{\mathcal{H}_{1,\underline{k}}}{\underline{\omega} \cdot \underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{\theta}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_1$ divergiert, falls $\underline{\omega} \cdot \underline{k} = 0$ für ein $\underline{k} \neq 0$ (resonante Tori).

S_1 kann möglicherweise konvergieren, falls $\underline{\omega} \cdot \underline{k}$ hinreichend groß für alle $\underline{k}$ ("stark nichtresonante Tori")

Folgerung: Resonante Tori werden schon durch kleinste Störungen zerstört!
Stark nichtresonante Tori bleiben möglicherweise erhalten und werden nur verformt.

4) Das KAM-Theorem (ganz ohne Beweis)

Sei Ω eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

Definiere Ω_α^τ : Menge aller $\underline{\omega} \in \Omega$ mit $|\underline{\omega} \cdot \underline{k}| > \frac{\alpha}{|\underline{k}|^\tau}$, die mindestens den Abstand α zum Rand von Ω haben.

$$(|\underline{k}| := \sum_{j=1}^m |k_j|, \quad \tau > m - 1 \text{ fest})$$

Sei ein nichtentartetes integrables Hamiltonsches System $\mathcal{H}_0$ mit Störung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}'$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $|\epsilon| < \delta \alpha^2$ gilt: Alle Tori des ungestörten Systems mit $\underline{\omega} \in \Omega_\alpha$ bleiben erhalten oder werden nur leicht deformiert!

Fazit: Kleine Störungen $\rightarrow$ die meisten Tori verformen sich nur!

Große Störungen $\rightarrow$ immer mehr Tori gehen ins Chaos über.

Je resonanter ein Torus, desto schneller kommt das Chaos!

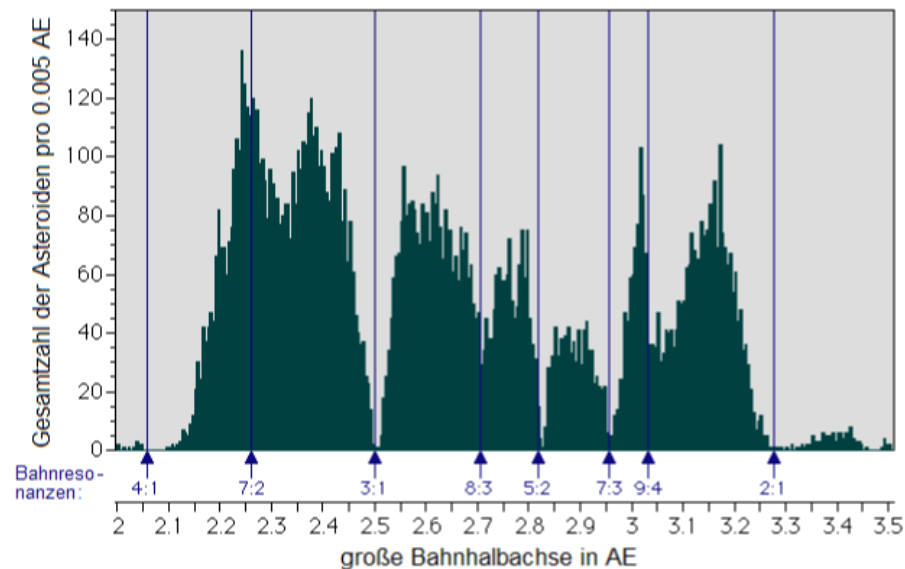
5) Beispiel: Resonanzen im Asteroidengürtel

Prominente Situation, in der Resonanzen eine Rolle spielen:

Asteroidengürtel im Sonnensystem zwischen Mars und Jupiter

Beobachtung: Verteilung der Halbbahnnachsen weist deutliche Lücken auf (Kirkwoodlücken, gefunden von Daniel Kirkwood 1866).

Lücken treten dann auf, wenn die Bahn der Asteroiden in Resonanz mit der Bahn des Jupiters kommt!



Bildquelle: Wikipedia

Grund: Resonanzen im Dreikörpersystem Sonne/Asteroid/Jupiter

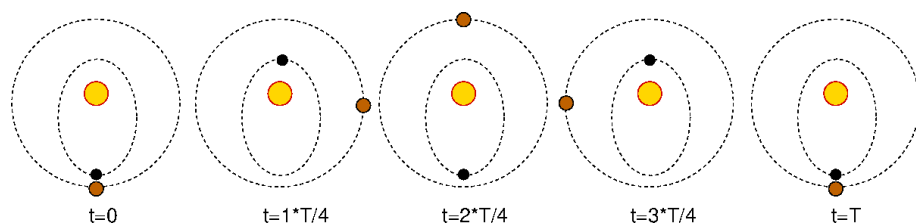
Jupiter stört das System Sonne/Asteroid

(NB: Jupiter vereinigt in sich 70% der Masse *aller* Planeten.)

~ Resonante Tori treten auf, wenn die Umlauffrequenz von Jupiter und die Umlauffrequenz des Asteroids kommensurabel sind!

Anschaulich (siehe Bild): In resonanten Konfigurationen hat man periodisch wiederkehrend eine Konstellation, in der der Jupiter dem Asteroid besonders nahe ist und ihn ablenkt.

Effekt ist besonders stark, wenn Asteroid zu diesem Zeitpunkt im Aphel seiner Bahn steht (sonnenfernster Punkt, gegenüber vom Perihel (siehe 1.7.2.3 S.32)).



Schematische Zeichnung einer 2:1 Resonanz im Dreikörpersystem
Sonne (gelb), Asteroid (schwarz) und Jupiter (braun)

4.9 Wissensfragen

69. Wie definiert man im Lagrange-formalismus den generalisierten Impuls?
70. Was ist eine Hamilton-Funktion?
71. Wie hängen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion zusammen?
72. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?
73. Wie sind die Poissonklammern definiert?
74. Nennen Sie einige wichtige Eigenschaften der Poissonklammern.
75. Was ist eine kanonische Transformation? Was versteht man speziell unter einer kanonischen Transformation "im engeren Sinne"?
76. Wie verhalten sich Poissonklammern unter kanonischen Transformationen?
77. Was versteht man unter einer "Erzeugenden Funktion" im Kontext der kanonischen Transformationen?
78. Nach welchem allgemeinen Kriterium können Sie entscheiden, ob eine Transformation kanonisch ist?
79. Erklären Sie den Hamilton-Jacobi Formalismus.
80. Wie lauten die zeitunabhängige und die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichungen? Wann sind sie lösbar?
81. Was versteht man unter dem Phasenraum?
82. Was versteht man unter einer Phasenraumtrajektorie?
83. Was versteht man unter der Phasenraumdichte?
84. Erklären Sie den Liouvilleschen Satz.
85. Wie behandelt man ein System, das nahe an dem Zustand minimaler Energie ist, in linearer Näherung?
86. Was ist eine Normalmodenzerlegung?
87. Was versteht man unter dem Begriff Liouville-integabel?
88. Erklären Sie den Begriff der Winkel/Wirkungs-Variablen.
89. Was ist generell das Kennzeichen von Chaos?
90. Wie lautet das Poincarésche Wiederkehrtheorem?
91. Skizzieren Sie die wesentliche Aussage des KAM-Theorems.

Kapitel 5

Grundbegriffe der Hydrodynamik

© Copyright 2014 Friederike Schmid¹

Hydrodynamik oder "Mechanik der Fluide":

Eine der wichtigsten makroskopischen Theorien mit Anwendungen quer durch alle naturwissenschaftlichen Disziplinen und Ingenieurwissenschaften (Mathematik, Physik, Meteorologie, Geophysik, Chemie, Luft/Raumfahrt, Umweltwissenschaften)

Beispiel einer Kontinuumstheorie

Beschreibung von Vielteilchensystemen durch Dichte und Flüssen bzw. Geschwindigkeitsprofile $\leadsto$ vergrößerte, "unscharfe" Sichtweise

(NB: Weitere prominente Kontinuumstheorie: Elastizitätstheorie

für feste Körper, oft als Lagrange Feldtheorie formuliert.

(mehr zu klassischen Feldtheorien siehe Vorlesung Theorie 2)

Hydrodynamik dagegen basiert meist auf Newtonscher Mechanik, z.B. weil Reibung dann leichter berücksichtigt werden kann.)

5.1 Fluide und Kontinuumshypothese

1) Fluide - umfassen Flüssigkeiten und Gase

Kennzeichen verglichen mit Festkörpern

- niedrige Bindungsenergien zwischen Partikeln
- keine festen Nachbarn, frei scherbbar
- keine "Formbeständigkeit"; können Behälter in jede Ecke ausfüllen
- Flüssigkeiten: weitgehend inkompressibel. Gase: kompressibel.

Bemerkung: Die Trennung fluid-fest ist nicht immer eindeutig, z.B.

- Plastisches Fließen: Unter starken Scherkräften fangen viele Festkörper an zu "fließen", z.B. metallische Werkstoffe, Gletscher, Erdkruste

¹Prof. Dr. Friederike Schmid, Vorlesung Theoretische Mechanik, Universität Mainz, WS 2014/2015. Letzte Änderung am 24.11.16.

- Viskoelastische Materialien
Verhalten sich unter hochfrequenten Kräften wie Festkörper, unter niederfrequenten wie Flüssigkeiten (z.B. Stärke)
- Granulare Materialien, z. B. Sand

2) Übergang zum Kontinuum

Fragestellung: Dynamik eines Fluids auf "makroskopischen" Längen- und Zeitskalen ($\sim \mu\text{m-km}$, $\sim \mu\text{s-h}$).

Im Prinzip N -Teilchen Problem (mit $N \sim 10^{23}$),
mit mikroskopischer Dynamik: Stöße zwischen Teilchen
mittlere Zeit zwischen Stößen: $\tau_{\text{Stoß}} \sim 10^{-14} - 10^{-15} \text{ s}$
mittlere freie Weglänge: $\lambda \sim \text{nm}$.

Aber: Mikroskopische Dynamik interessiert uns nicht.

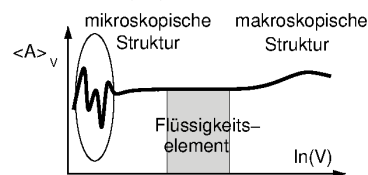
Uns interessieren nur wenige, langsam veränderliche Größen, z.B. Dichte oder Strömungsgeschwindigkeit (typischerweise Dichten von Erhaltungsgrößen wie Masse oder Impuls!)

$\leadsto$ Kontinuumshypothese: Grundannahme der Hydrodynamik

Es gibt langsame und schnelle Prozesse, die man klar trennen kann. ("Trennung der Längen- und Zeitskalen").

Trennung der Längenskalen

Bild: Sei $\langle A \rangle_V$ irgendeine Größe, gemittelt über das Volumen V



Annahme: Es gibt ein Plateau
Irgendwo im Plateau ist das Volumen eines "Flüssigkeitselementes" angesiedelt.

Trennung der Zeitskalen

Entsprechende Annahme: Es gibt eine charakteristische Zeitskala $\tau \gg \tau_{\text{Stoß}}$, auf der sich die mikroskopische Dynamik ausmittelt und die auf ein Flüssigkeitselement wirkenden Kräfte durch makroskopische Konzepte wie Druck und Scherung beschrieben werden können. Das Flüssigkeitselement ist auf dieser Zeitskala lokal im Gleichgewicht (mechanisch und thermisch).

3) Gegenstand der Hydrodynamik

Zeitliche Entwicklung von Dichten $\rho(\vec{r}, t)$ und Strömungsprofilen $\vec{v}(\vec{r}, t)$, gemittelt über Flüssigkeitselemente, unter Einfluss äußerer Kräfte (z.B. Schwerkraft) und innerer gemittelter Kräfte (z.B. Druck, Scherkräfte).

Wir kennen schon eine Gleichung für $\rho(\vec{r}, t)$: Die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}}$$

Suche nun entsprechende Gleichung für $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

5.2 Kinematik der Fluide

Zunächst: Beschreibung von Strömungen $\vec{v}(\vec{r}, t)$

1) Euler-Beschreibung vs. Lagrange-Beschreibung

Zwei Sichtweisen

– Lagrangesche Beschreibung

Koordinatensystem wird mit Strömung mittransportiert.

Bezieht sich immer auf dasselbe Flüssigkeitselement.

Konkret: Wähle Referenzzeit t_0 ,

Ordne Flüssigkeitselemente ihrem Ort $\vec{r}_0$ zur Zeit t_0 zu

(" $\vec{r}_0$ " markiert das Flüssigkeitselement)

→ Strömung zur Zeit t wird beschrieben durch Geschwindigkeit

$\vec{V}(\vec{r}_0, t)$ des Flüssigkeitselementes " $\vec{r}_0$ "

Analog andere Größen $A_L(\vec{r}_0, t)$

Entspricht der Sichtweise eines mitschwimmenden Beobachters

– Eulersche Beschreibung

Koordinatensystem bleibt ortsfest (übliche Sichtweise)

Strömungsprofil $\vec{v}(\vec{r}, t)$ beschreibt zu verschiedenen Zeiten

verschiedene Flüssigkeitselemente

Entspricht der Sichtweise eines ruhenden Beobachters

2) Zeitliche Ableitungen

Betrachte nun beliebige Größe $A(\vec{r}, t)$, die (lokal) die Eigenschaften eines Flüssigkeitselementes beschreibt (z.B. $\vec{v}(\vec{r}, t)$)

Frage: Um welchen Wert ΔA ändert sich diese Größe auf dem Flüssigkeitselement während der Zeit Δt (mit $\Delta t \rightarrow 0$; Flüssigkeitselement bewegt sich in dieser Zeit um $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$ weiter.)

• Lagrange-Koordinaten (mitbewegt)

$$\Delta A = A_L(\vec{r}_0, t + \Delta t) - A_L(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial A_L}{\partial t} \Delta t \quad (+\mathcal{O}(\Delta t^2))$$

• Euler-Koordinaten (ruhend)

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(\vec{r} + \Delta \vec{r}, t + \Delta t) - A(\vec{r}, t) = A(\vec{r} + \vec{v} \Delta t, t + \Delta t) - A(\vec{r}, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial A}{\partial r_\alpha} v_\alpha \Delta t + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t = \Delta t \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) A \right) \end{aligned}$$

Notation: Zeitliche Ableitungen entlang des Strömungspfades: $\frac{d}{dt} \dots$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} A = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) A} \quad (\text{entspricht totaler Ableitung!})$$

Speziell: Beschleunigung eines Flüssigkeitselementes:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}$$

(wichtig wegen des Newtonschen Kraftgesetzes: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \text{Kraftdichte!}$)

3) Charakterisierung von Strömungsfeldern

- Divergenz: $\nabla \cdot \vec{v}$: Volumenänderung eines Flüssigkeitselementes
(Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$
 $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \stackrel{\rho=N/V}{=} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad \checkmark$)
- Rotation: $\nabla \times \vec{v} =: \vec{\omega}$: "Rotationsstrom" bzw. Vortizität
Beschreibt Wirbel im Strömungsprofil
(Stokesscher Satz: $\int_{\text{Fläche } A} d\vec{A} (\nabla \times \vec{v}) = \oint_{\partial A} d\vec{s} \cdot \vec{v} \neq 0$ für $\nabla \times \vec{v} \neq 0$)
- Potentialströmungen: Strömungen $\vec{v}(\vec{r}, t)$ mit $\nabla \times \vec{v} = 0$ und $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
Lassen sich lokal als Gradient eines Potentials $\Phi(\vec{r}, t)$ darstellen entsprechend $\vec{v} = -\nabla \Phi$ mit $\Delta \Phi = 0$.

NB: Man kann zeigen: Allgemeine Strömungsfelder können zerlegt werden in drei Anteile $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

mit $\vec{v}_1$: Reiner Rotationsstrom ($\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$, $\nabla \times \vec{v}_1 = \nabla \times \vec{v} = \vec{\omega}$)

$\vec{v}_2$: Reine Kompression/Dilatation ($\nabla \times \vec{v}_2 = 0$, $\nabla \cdot \vec{v}_2 = \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$)

$\vec{v}_3$: Potentialstrom ($\nabla \times \vec{v}_3 = 0$, $\nabla \cdot \vec{v}_3 = 0$; $\vec{v}_3 = -\nabla \Phi$ mit $\Delta \Phi = 0$)

(ohne Beweis: Dazu wären die Werkzeuge aus Theorie 2 nötig!)

5.3 Dynamik: Bewegungsgleichungen für Fluide

Ausgangspunkt: Newtonsches Kraftgesetz für Partikelteilchen: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

Ziel: Übertragen auf Flüssigkeitselement: $\underbrace{\rho}_{\text{Massendichte}} \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{Kraft pro Volumen}} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{Kraft pro Volumen}}$

Frage: Was ist $\vec{f}$?

5.3.1 Kräfte in allgemeinen Flüssigkeiten

Beiträge zur Nettokraft $\vec{F}_{\Delta V} = \vec{f} \Delta V$ auf Flüssigkeitselement ΔV

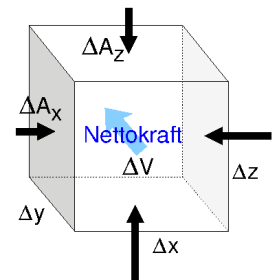
- Externe Kräfte ("Volumenkräfte") auf Partikel
z.B. Schwerkraft: $\vec{f} = \rho \vec{g}$ mit $\vec{g} := -g \vec{e}_z$
- Innere Kräfte aus Wechselwirkungen zwischen Teilchen

Beispiel: Druck $P(\vec{r}, t)$

Berechne Nettokraft $\vec{F}_{\Delta V} = \vec{f}_p \Delta V$ auf Flüssigkeitselement ΔV :
($\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta A_x \Delta x$ mit $\Delta A_x := \Delta y \Delta z$ etc.)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\Delta V} &= -\vec{e}_x \underbrace{\Delta A_x \Delta x}_{\Delta V} \partial_x P - \vec{e}_y \underbrace{\Delta A_y \Delta y}_{\Delta V} \partial_y P - \vec{e}_z \underbrace{\Delta A_z \Delta z}_{\Delta V} \partial_z P \\ &= -\Delta V \nabla P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_P = -\nabla P}$$



Verallgemeinerung: Spannungstensor

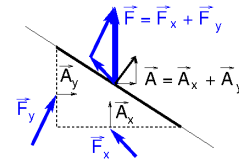
Gegeben beliebige (infinitesimale) Oberfläche $\vec{A}$

(Flächeninhalt A , Flächennormale $\vec{n} = \vec{A}/A$)

Kraft auf diese Fläche $\vec{F}_A$ sei nicht unbedingt parallel zu $\vec{A}$

$\leadsto$ Definiere Spannungstensor über $\boxed{\vec{F}_A = \vec{\sigma} \vec{A}}$ bzw. $\vec{F}_A/A = \vec{\sigma} \vec{n}$

(NB: $\vec{\sigma}$ hängt nicht von $\vec{n}$ ab, da sich Kräfte in verschiedene Richtungen linear aufaddieren, siehe Bild)



Nettokraft auf Flüssigkeitselement ΔV :

$$\vec{F}_{\Delta V} = \oint_{\partial \Delta V} dA \vec{\sigma} \vec{n} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\Delta V} d^3r \nabla \vec{\sigma} = \Delta V \nabla \vec{\sigma} =: \vec{f}_i \Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_i = \nabla \vec{\sigma}}$$

Speziell Druck: $\vec{f}_P = \nabla \vec{\sigma}_P$ mit $\vec{\sigma}_P = \begin{pmatrix} -P & & 0 \\ & -P & \\ 0 & & -P \end{pmatrix}$ (Spezialfall)

Konkret gibt es in gewöhnlichen Fluiden i.A. nur zwei Arten von inneren Kräften: Druckkräfte und Reibungskräfte

$\leadsto$ Motiviert Trennung in $\vec{\sigma}_P$ und viskosen Spannungstensor $\boxed{\vec{\sigma}'}$

Folgerung für Bewegungsgleichungen

• Lagrange-Beschreibung: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}} - \nabla P + \nabla \vec{\sigma}'$

• Euler-Beschreibung:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f}_{\text{ext}} - \nabla P + \nabla \vec{\sigma}'}$$

Direkte lokale
Geschwindigkeitsänderung
Konvektion
Externe
Kraft
Druck-
gradient
Reibungs-
kräfte

Im Allgemeinen kann der Druck $P(\vec{r}, t)$ berechnet werden (z.B. direkt aus einer thermischen Zustandsgleichung $P(\rho)$, oder indirekt aus einer Inkompressibilitätsbedingung für das Fluid). Zur Vervollständigung der Theorie brauchen wir dann noch einen Ausdruck für $\vec{\sigma}'$.

Bemerkung: Ohne $\vec{\sigma}'$ zu kennen, können wir nun schon ruhende Flüssigkeiten behandeln: Für $\vec{v}(\vec{r}, t) \equiv 0$ gibt es keine Reibungskräfte $\Rightarrow \vec{\sigma}' = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_{\text{ext}} = \nabla P} \quad \text{Fundamentalsatz der Hydrostatik}$$

5.3.2 Spannungstensor und Deformationstensor

Zunächst: Allgemeine Aussagen zum Spannungstensor und zum Zusammenhang zwischen Spannung und Scherung

1) Allgemeine Eigenschaften des Spannungstensors

Spannungstensor: Allgemeines Konzept der Kontinuumsmechanik

Wird auch in der Elastizitätstheorie und in Feldtheorien wie der Elektrodynamik benutzt ($\rightarrow$ Maxwell'scher Spannungstensor).

* Im Gleichgewicht: Isotrop, $\vec{\sigma} = -P\mathbb{1}$

(Flüssigkeit in Ruhe oder gleichförmig bewegt).

* Im Nichtgleichgewicht gibt es zusätzliche Anteile.

in Festkörpern: Elastische Kräfte $\rightarrow$ Elastischer Spannungstensor

in Fluiden: Reibungskräfte $\rightarrow$ Viskoser Spannungstensor $\vec{\sigma}'$ (s.o.)

* Allgemein: $\vec{\sigma}$ muss symmetrisch sein.

Anderenfalls müssten infinitesimale Volumenelemente mit unendlicher Geschwindigkeit rotieren!

(Beweis: Angenommen, es gäbe einen antisymmetrischen Anteil $\vec{\sigma}_A = \begin{pmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_3 & 0 \end{pmatrix}$)

$\rightarrow \vec{\sigma}_A \vec{n}$ kann geschrieben werden als $\vec{S} \times \vec{n}$ mit $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$

Betrachte Flüssigkeitselement mit Volumen V ($V \rightarrow 0$)

Kräfte $\vec{F}_A = \vec{\sigma}_A \vec{A} = \vec{S} \times \vec{A}$ auf Oberflächen erzeugen Drehmoment $\vec{M}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{M} &= \oint_{\partial V} (\vec{r} \times d\vec{F}_A) \stackrel{d\vec{F}_A = \vec{\sigma}_A d\vec{A} = \vec{S} \times d\vec{A}}{=} \oint_{\partial V} \vec{r} \times (\vec{S} \times d\vec{A}) = \oint_{\partial V} (d\vec{A} \times \vec{S}) \times \vec{r} \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V d^3r (\nabla \times \vec{S}) \times \vec{r} = \int_V d^3r [\underbrace{\vec{S}(\nabla \cdot \vec{r})}_3 - \underbrace{\nabla(\vec{S} \cdot \vec{r})}_{\vec{S}}] = 2\vec{S}V \end{aligned}$$

Drehmoment wirkt auf Drehimpuls: $\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L}$

Im Schwerpunktsystem ist $\vec{L} = \vec{I} \vec{\Omega}$

mit Ω : Winkelgeschwindigkeit und $\vec{I}$: Trägheitstensor (vgl. 3.2 S.59, Konzept gilt nicht nur für starre Körper).

$$I_{ij} = \rho \int d^3r (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \Rightarrow I \propto \int d^3r r^2 \propto r_{\max}^5 \propto V^{5/3}$$

$$\Rightarrow 2\vec{S}V = \frac{d}{dt} \vec{I} \vec{\Omega} \propto V^{5/3}$$

$\Rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit Ω muss wie $V^{-2/3}$ skalieren

$\Rightarrow \Omega \rightarrow \infty$ für $V \rightarrow 0$

Das ist nicht möglich, also muss $\vec{S} = 0$ sein bzw. $\vec{\sigma}_A = 0$ ✓)

2) Deformationstensor

Scherkräfte bzw. viskoser Spannungstensor wird durch Scherströmungen, d.h. Geschwindigkeitsgradienten bestimmt

(NB: nicht absoluten Geschwindigkeiten wegen Galilei-Invarianz: Eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegte Flüssigkeit sollte sich nicht von einer ruhenden Flüssigkeit unterscheiden!)

$\Rightarrow$ Basierend auf dem Geschwindigkeitsprofil $\vec{v}(\vec{r}, t)$

definiere Deformationstensor $\vec{G}$ über $G_{ij} = \partial_j v_i =: e_{ij} + \omega_{ij}$

mit $\begin{cases} e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j) \end{cases}$: symmetrischer Anteil
: antisymmetrischer Anteil

Interpretation:

• $\text{Sp}(\vec{e}) = \nabla \cdot \vec{v}$: Kompression/Dilatation von Flüssigkeitselementen

• Nebendiagonalelemente von $\vec{e}$: Beschreiben Scherung von Flüssigkeitselementen



• Antisymmetrischer Anteil $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times \vec{v}:$$

Vortizität (vgl. 5.2 S.99)

$$(\text{Check: } \omega_k = -\sum_{ij} \epsilon_{ijk} \omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \partial_i v_j \checkmark)$$

Beschreibt Drehung von Flüssigkeitselementen



3) Beziehung zwischen Spannungstensor und Deformationstensor

Wechselspiel:

- Geschwindigkeitsgradient erzeugt Reibungskräfte ($\rightarrow \vec{\sigma}'$)
- Spannung (Scherkräfte) erzeugen Geschwindigkeitsgradienten

Grundannahme der Kontinuumshypothese: Trennung der Zeitskalen, Flüssigkeitselemente sind lokal im Gleichgewicht

⇒ Es gibt eindeutigen Zusammenhang zwischen $\vec{\sigma}'$ und $\vec{G}$

Konkret: Antisymmetrischer Anteil $\vec{\omega}$ von $\vec{G}$ trägt nicht bei (bei reiner Rotation tritt keine Reibung auf).

⇒ Hydrodynamische Theorie wird vervollständigt durch

”Konstitutive Gleichung” $\boxed{\vec{\sigma}' \leftrightarrow \vec{e}}$, System- bzw. materialabhängig.

5.3.3 Ideale Flüssigkeiten und Euler-Gleichungen

Einfachster Fall: Reibung vernachlässigt → ”Ideale” Flüssigkeit

⇒ Konstitutive Gleichung: $\boxed{\vec{\sigma}' = 0}$

⇒ Bewegungsgleichung: $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\vec{f}_{\text{ext}}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla P}$ Euler-Gleichungen

Häufig nimmt man zusätzlich an, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, d.h. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Wir werden das hier nicht notwendig voraussetzen.

5.3.4 Newtonsche Flüssigkeiten und Navier-Stokes Gleichungen

Zweiter prominenter Fall: Einfache isotrope Flüssigkeit

$\vec{\sigma}'$ hängt linear und instantan von $\vec{e}$ ab ($\vec{\sigma}' \propto \vec{e}$)

Allgemeiner Ansatz: $\sigma'_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} e_{kl}$ mit C_{ijkl} : konstante Koeffizienten

- Istropes Medium ⇒ allgemeine Form (ohne Beweis)

$$C_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}$$

- $\vec{\sigma}'$ symmetrisch ⇒ (i, j) können vertauscht werden ⇒ $A = A'$

$$\Rightarrow \sigma'_{ij} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} \sum_l e_{ll} \text{ bzw. } \vec{\sigma}' = 2A \vec{e} + B \mathbb{1} \text{Sp}(\vec{e})$$

Teile $\vec{\sigma}'$ auf nach Beitrag von $\text{Sp}(\vec{e}) = \nabla \cdot \vec{v}$ und spurlosem Rest

⇒ Konstitutive Gleichung:
$$\boxed{\vec{\sigma}' = \underbrace{\mu \left(2 \vec{e} - \frac{2}{3} \mathbb{1} \text{Sp}(\vec{e}) \right)}_{\text{spurlos}} + \underbrace{\zeta \mathbb{1} \text{Sp}(\vec{e})}_{\text{Reine isotrope Dilatation/Kompression}}}$$

Flüssigkeitselement verformt sich
keine Volumenänderung

mit μ : Scherviskosität

ζ : Volumen-Viskosität

(Beitrag verschwindet in inkompressiblen Flüssigkeiten)

⇒ Bewegungsgleichung: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}} - \nabla P + \nabla \vec{\sigma}'$

$$\text{mit } [\nabla \vec{\sigma}']_j = \sum_i \partial_i [2\mu e_{ij} + (\zeta - \frac{2}{3}\mu) \delta_{ij} \text{Sp}(\vec{e})]$$

$$\left| \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \\ &= \mu \underbrace{(\sum_i \partial_{ii} v_j)}_{\Delta v_j} + \underbrace{(\sum_i \partial_i v_j)}_{\partial_j (\nabla \cdot \vec{v})} + (\zeta - \frac{2}{3}\mu) \partial_j (\nabla \cdot \vec{v}) = \mu \Delta v_j + (\zeta + \frac{1}{3}\mu) \partial_j (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned} \right.$$

⇒ Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f}_{\text{ext}} - \nabla P + \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v})$$

bzw. speziell für inkompressible Flüssigkeiten ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\vec{f}_{\text{ext}}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{v}$$

mit $\nu = \mu/\rho$: ”kinematische Viskosität”

Bemerkung: Grenzfälle der Navier-Stokes Gleichungen

- Falls $\nu \rightarrow 0 \Rightarrow$ Verhalten wie ideale Flüssigkeit
- Falls $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow$ Rechte Seite der Navier-Stokes Gleichungen dominiert. Linke Seite kann vernachlässigt werden. Führt im inkompressiblen Fall zu Stokes-Gleichungen: $\vec{f}_{\text{ext}} - \nabla P + \mu \Delta \vec{v} = 0$ mit $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
 $\Rightarrow$ ”laminare” Strömungen
- Die Bedeutung von Reibung verglichen zur Trägheit wird üblicherweise durch die ”Reynoldszahl” charakterisiert!

Sei ein konkretes Strömungsproblem, z.B. Fluss durch Kanal

Definiere charakteristische Länge L (z.B. Kanaldurchmesser)

charakteristische Geschwindigkeit U

(z.B. $\vec{v}$ in der Mitte des Kanals)

$\leadsto$ Definiert Reynoldszahl $\text{Re} := UL\rho/\mu$

Reskaliere $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}/L$, $\vec{v}' = \vec{v}/U$, $P' = P/\rho U^2$

Dann erhält man im inkompressiblen Fall die Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' = \vec{f}'_{\text{ext}} - \nabla' P' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}'$$

$\Rightarrow \text{Re} \rightarrow \infty$: Verhalten wie ideale Flüssigkeit

$\text{Re} \rightarrow 0$: Hochviskose, laminare Flüssigkeit

Folgerungen:

- Mikroskopische Strömungen (z.B. in nanotechnologischen Anwendungen oder in Zellen bzw. kleinen Blutgefäßen) sind meist laminar!
- Makroskopische Strömungen, z.B. umströmte Flugzeuge, kann man oft in guter Näherung als ideale Flüssigkeiten beschreiben – außer in der Nähe der Oberflächen. Dort setzt der Abstand zur Oberfläche die charakteristische Längenskala und es bildet sich eine laminare Grenzschicht.

5.4 Ideale Flüssigkeiten

Zum Abschluss dieses Ausflugs in die Hydrodynamik wollen wir konkret am Beispiel der idealen Flüssigkeiten ein paar Anwendungen der in 5.3 hergeleiteten Gleichungen zeigen.

Ideale Flüssigkeiten: Keine Viskosität.

Kommt in der Natur i.A. nicht vor, ist aber trotzdem manchmal eine ganz gute Näherung, z.B. falls ...

- Reynoldszahlen groß sind und die Strömung trotzdem nicht turbulent ist, z.B. weit weg von Wänden ($\rightarrow$ Längenskala L gross)
- charakteristische Zeitskalen so kurz sind, dass Störungen der Geschwindigkeit keine Zeit haben, über Reibungskräfte wegtransportiert zu werden (nichtstationärer Strom bei kurzen Zeiten, hochfrequenter Strom)
- "echte" ideale Flüssigkeiten: Supraflüssigkeiten
z.B. He^4 bei tiefen Temperaturen

Folgen nach 5.3.3 S.103 den Euler-Gleichungen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{f}_{\text{ext}}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

5.4.1 Bernoulli-Funktion und Bernoulli-Gleichung

Annahme im Folgenden (hier und im Rest des Kapitels 5.4):

Strömung sei zusätzlich barotrop, d.h. es existiert eine eindeutige Beziehung $\rho \leftrightarrow P$ ($\rho = \rho(P)$), und die externe Kraft lässt sich auf ein Potential U zurückführen, d.h. es gilt $\vec{f}_{\text{ext}}/\rho = -\nabla U$ (z.B. Schwerkraft: $U = gz$).

Dann kann man schreiben $\frac{\vec{f}_{\text{ext}}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla(W+U)$ mit $W = \int_0^P dP'/\rho(P')$

$\Rightarrow$ Alternative Formulierungen der Euler-Gleichungen:

$$(i) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(W+U) \quad (\text{klar})$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla B = \vec{v} \times \vec{\omega} \quad \text{mit} \quad B = W + U + \frac{1}{2}v^2 \quad \underline{\text{Bernoulli-Funktion}}$$

und $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ (Vortizität) wie gehabt (siehe 5.2)

(Check: $\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \sum_i v_i \nabla v_i - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2 - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$)

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla(W+U) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla(W+U) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(W+U + \frac{1}{2}v^2) - \vec{v} \times \vec{\omega} \quad \checkmark$$

Speziell: Inkompressible Flüssigkeit im Schwerfeld

$$W = \int^P dP'/\rho = P/\rho; \quad U = gz \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + gz$$

Folgerungen:

- Für Stationäre Ströme gilt: $\frac{dB}{dt} = 0$

$$\left(\text{da } \frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t}}_{0: \text{stationär}} + (\vec{v} \cdot \nabla) B = \vec{v} \cdot \left[(\vec{v} \times \vec{\omega} - \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0: \text{stationär}}) \right] = 0 \quad \checkmark \right)$$

- Speziell für inkompressible Flüssigkeit im Schwerfeld:

Entlang der Bahn von Flüssigkeitselementen (auf Bahnlinien) gilt

die Bernoulli-Gleichung:
$$B = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const.}$$

(beschrieben von Bernoulli 1738, hergeleitet von Euler)

→ In Bereichen, in denen die Flüssigkeit schneller strömt (z.B. Rohrverengungen), erniedrigt sich der Druck!

Anwendungen: Wasserstrahlpumpe, Zerstäuber, ...

5.4.2 Wirbel- und Zirkulationserhaltung

Definiere Zirkulation um eine geschlossene Kontur C :

$$\Gamma = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{v}$$

Annahmen wie in 5.4.1: Barotroper Fluss. $\vec{f}_{\text{ext}}/\rho$ ist Potentialkraft.

Dann gilt der Satz von Thomson (Lord Kelvin), 1869

Entlang einer mit der Strömung mitgewegten Kontur $C(t)$ bleibt die Zirkulation erhalten: $\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$

(Herleitung:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} C(t) \quad C(t+dt) \\ \begin{array}{c} \vec{r}_0(t) \quad \vec{r}_0(t+dt) \\ \vec{r}_1(t) \quad \vec{r}_1(t+dt) \end{array} \\ dl \end{array} \quad d\vec{l}(t+dt) = \vec{r}_1(t+dt) - \vec{r}_0(t+dt) \\ & \quad = \vec{r}_1(t) + \vec{v}(\vec{r}_1)dt - \vec{r}_0(t) - \vec{v}(\vec{r}_0)dt \\ & \quad = d\vec{l}(t) + (\vec{v}(\vec{r}_1) - \vec{v}(\vec{r}_0))dt \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt} d\vec{l} = (\vec{v}(\vec{r}_1) - \vec{v}(\vec{r}_0)) = \frac{d\vec{v}}{dl} dl \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{Euler 5.4.1}} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{l}}{dt}}_{-\nabla(W+U)} = - \oint \underbrace{d\vec{l} \cdot \nabla(W+U)}_{\text{Stokesscher Satz}} + \underbrace{\frac{1}{2} \oint d\vec{v}^2}_0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

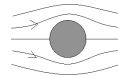
Folgerungen

- Vortizität $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ bleibt auf Bahnlinien erhalten
(da $\vec{\omega}$ nach dem Stokesschen Satz der Zirkulation auf infinitesimaler Kurve entspricht.
Alternativer, direkter Beweis: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \nabla \times \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \times \nabla(W+U) = 0 \quad \checkmark$)
- Speziell: Falls $\vec{\omega} = 0$ auf einem Punkt, ist $\vec{\omega} = 0$ auf der Bahnlinie!
⇒ Deshalb ist der Begriff der Potentialströmung überhaupt sinnvoll. Im Volumen bleibt eine Potentialströmung i.A. eine Potentialströmung.

Beachte: Man könnte versucht sein, zu folgern, dass alle stationären Strömungen, für die $\vec{v} = \text{const.}$ im Unendlichen ist, Potentialströmungen sein müssen. (Ist $\vec{\omega} = 0$ im Unendlichen, so bleibt $\vec{\omega} = 0$ beim Durchströmen). Aber: In der Nähe von Oberflächen bricht das Argument zusammen. Für Flusslinien, die direkt von der Oberfläche abgehen, ist $\vec{\omega}$ undefiniert.

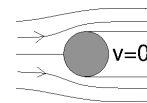
Beispiel: Umströmung einer Kugel.

Naheliegende Lösung: Potentialströmung



Möglich sind aber auch Lösungen zu, bei denen Flüssigkeitselemente verschiedener Geschwindigkeit aneinander entlanggleiten: Tangentiale Diskontinuitäten mit $\vec{\omega} \neq 0$

(sind in Gegenwart von Reibung instabil, dort entstehen Turbulenzen)



5.4.3 Zugkraft und Auftrieb

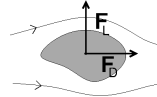
Untersuche Körper der Geschwindigkeit $\vec{u}$, der von idealer Flüssigkeit umströmt wird. Im Unendlichen sei $\vec{v}$ gegeben und konstant.

An der Oberfläche des Körpers gilt als Randbedingung: Flüssigkeit darf nicht hineinströmen, d.h. $v_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{u}$ ($\vec{n}$ ist die Oberflächennormale).

Einfachheitshalber keine Gravitation.

Frage: Welche Kraft $\vec{F}$ übt die Strömung auf den Körper aus?

- Zugkraft $\vec{F}_D$ (D: drag)
- Auftrieb $\vec{F}_L$ (L: lift)



Hier speziell: Potentialströmungen: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ überall.
(keine tangentialen Instabilitäten etc.)

Das bedeutet: Lokal existiert Potential Φ mit $\vec{v} = -\nabla\Phi$.

Es gilt: Falls das Gebiet der Potentialströmung einfach zusammenhängend ist, existiert auch ein globales Potential (Beweis analog 1.4.1).

Da die Randbedingungen $v_{\perp}$ an den Rändern des Gebiets vorgegeben sind, ist das Potential eindeutig bis auf eine Konstante.

(Beweis: Randbedingungen $v_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{v}$ vorgegeben $\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} := \vec{n} \cdot \nabla\Phi$ vorgegeben.
Angenommen, es gäbe zwei Lösungen Φ_1, Φ_2 von $\Delta\Phi = 0$ mit diesen Randbedingungen.
 $\Rightarrow \tilde{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2$ löst $\Delta\tilde{\Phi} = 0$ und $\vec{n} \cdot \nabla\tilde{\Phi} = 0$ an den Rändern des Gebietes.
 $\Rightarrow 0 = \oint d\vec{A} \tilde{\Phi} \nabla\tilde{\Phi} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int d^3r \nabla(\tilde{\Phi} \nabla\tilde{\Phi}) = \int d^3r [(\nabla\tilde{\Phi})^2 + \underbrace{\tilde{\Phi} \Delta\tilde{\Phi}}_0] = \int d^3r (\nabla\tilde{\Phi})^2$
 $\Rightarrow \nabla\tilde{\Phi} = 0 \Rightarrow \tilde{\Phi} = \text{const.} \checkmark$)

5.4.3.1 Das D' Alembertsche Paradox

Zurück zu unserem Problem: Betrachte endlichen Körper in einem dreidimensionalen unendlichen Gebiet, der von einer Potentialströmung umströmt wird.

Dann zeigt sich: Die Gesamtkraft auf den Körper ist Null!
Alle Beiträge müssen einander aufheben.

(Beweis dazu:

- Zunächst Galilei-Transformation, so dass die Strömung im Unendlichen in Ruhe ist $\vec{v}_{\infty} \rightarrow 0$ und der Körper sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt.
Eigenvolumen des Körpers sei V_0 , Rand des Körpers ∂V_0
Gesamtsystem sei Kugel mit Radius $R \rightarrow \infty$, Volumen $V = 4/3\pi R^3 \rightarrow \infty$, Rand ∂V_R
- Zusammenhängendes Gebiet $\rightarrow$ Potential Φ mit $\Delta\Phi = 0$ ist eindeutig bis auf Konstante.
Konstante kann so gewählt werden, dass $\oint_{\partial V_R} d\vec{A} \Phi = 0$
Randbedingungen linear und $\Delta\Phi = 0$ linear $\Rightarrow \Phi \propto u$
- Vorgriff auf Vorlesung Theorie II: Lösungen der Laplace-Gleichung mit $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ können entwickelt werden: $\Phi(r) = \frac{b}{r} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$ bzw. $\vec{v} = -\nabla\Phi = b \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{\vec{B} - 3(\vec{B} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} + \dots$ mit $\hat{r} = \vec{r}/r$.
"Multipolentwicklung" mit Koeffizienten $b, \vec{B}$, wobei $b, \vec{B} \propto u$ wegen $\Phi \propto u$.
- Wegen $\Delta\Phi = 0$ gilt: $0 = \int_V d^3\Phi \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V_R} d\vec{A} \vec{n} \cdot \nabla\Phi - \oint_{\partial V_0} d\vec{A} \vec{n} \cdot \nabla\Phi = \oint_R d\vec{A} \cdot \vec{v} \quad \text{0: Randbedingung}$
 $\Rightarrow$ Fluss durch Kugel R muss verschwinden: $\oint_{\partial V_R} d\vec{A} \cdot \vec{v} \approx 4\pi b + \mathcal{O}(\frac{1}{R}) = 0 \forall R \Rightarrow b = 0$
 $\Rightarrow$ Führender Term ist der zweite Term: $\Phi(r) \sim \vec{B} \cdot \vec{r}/r^3$

- Berechne Energie der Flüssigkeit (kinetische Energie): $E = T = \frac{1}{2} \rho \int d^3r v^2$
 Zerlege $v^2 = u^2 + (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) \Rightarrow E = \frac{1}{2} \rho (u^2 (V - V_0) + I)$ mit $I = \int d^3r (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$
 Benutze $\nabla(\vec{v} - \vec{u}) = 0$ und $(\vec{v} + \vec{u}) = -\nabla(\Phi - \vec{u} \cdot \vec{r}) \Rightarrow I = -\int d^3r \nabla[(\vec{v} - \vec{u})(\Phi - \vec{u} \cdot \vec{r})]$
 Gaußscher Satz $\Rightarrow I = -\underbrace{\oint_{\partial V_R} dA \vec{n} \cdot (\vec{v} - \vec{u})(\Phi - \vec{u} \cdot \vec{r})}_{R^2 \oint_S d\Omega \text{ (Einheitskugel)}} + \underbrace{\oint_{\partial V_0} dA \vec{n} \cdot (\vec{v} - \vec{u})(\Phi - \vec{u} \cdot \vec{r})}_{(\vec{u} \cdot \vec{n})R}$ 0: Randbedingung
 Auf der Oberfläche der Kugel $R \rightarrow \infty$ gilt: $\Phi \sim \frac{1}{R^2} \vec{B} \cdot \vec{n}$ und $\vec{v} \sim \frac{1}{R^3} (\vec{B} - 3(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n})$
 $\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{R^3} (\vec{B} \cdot \vec{n}) - (\vec{u} \cdot \vec{n}), \quad (\Phi - \vec{u} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{R^2} (\vec{B} \cdot \vec{n}) - (\vec{u} \cdot \vec{n})R$
 $\Rightarrow I = R^3 \oint_S d\Omega (\vec{u} \cdot \vec{n})^2 - 3 \oint d\Omega (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{n}) + \mathcal{O}(\frac{1}{R^3})$
 Nutze $\oint_S d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \Rightarrow I = -R^3 \frac{4\pi}{3} u^2 + 4\pi (\vec{B} \cdot \vec{u}) = -Vu^2 + 4\pi (\vec{B} \cdot \vec{u})$
 $\Rightarrow E = \frac{1}{2} \rho (u^2 (V - V_0) - u^2 V + 4\pi (\vec{B} \cdot \vec{u})) = -\frac{1}{2} \rho u^2 V_0 + \frac{1}{2} \rho 4\pi (\vec{B} \cdot \vec{u})$
 Da $\vec{B} \propto u$, folgt, dass T quadratisch in u ist: $E =: \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$
- Zusammenhang mit Gesamtimpuls $\vec{P}$ der Flüssigkeit: $dE = \vec{u} \cdot d\vec{P}$
 (Grund: Flüssigkeit reibungsfrei $\rightarrow$ Impulsänderung $d\vec{P}$ wird vollständig in Energieänderung dE umgesetzt. Beides wird durch Kraft $\vec{F}$ auf Körper vermittelt.
 $\rightarrow$ Arbeit $dW = \vec{F} \cdot \vec{u} dt = dE$ und Impulsübertrag $d\vec{P} = \vec{F} dt \quad dE = \vec{u} \cdot d\vec{P}$)
 $\Rightarrow P_i = m_{ik} u_k$ bzw. konkret $\vec{P} = 4\pi \rho \vec{B} - \rho V_0 \vec{u}$ (NB: $\vec{P}$ ist endlich!)
- Daraus folgt: Wenn $\vec{u} = \text{const.}$, bleibt $\vec{P}$ konstant, d.h. es wird keine Kraft auf die Flüssigkeit übertragen. Umgekehrt heißt das aber auch (actio=reactio), dass auch die Flüssigkeit keine Kraft auf den Körper überträgt! $\checkmark$

Diskussion:

Zumindest die Abwesenheit von Zugkraft ist einleuchtend: Gäbe es eine Zugkraft $\vec{F}_D$, dann müsste der Körper permanent Arbeit $\vec{F}_D \cdot \vec{u} dt$ verrichten $\rightarrow$ Energie müsste über Reibungskräfte dissipiert bzw. abtransportiert werden.

Aber: Energiedissipation gibt es in idealen Flüssigkeiten nicht. Abtransport ist nicht möglich, da $\vec{v}$ im Unendlichen zu schnell verschwindet.

Vier wichtige Voraussetzungen gingen in den Beweis ein:

- Potentialströmung.
- Körper ist endlich ausgedehnt. Die Flüssigkeit strömt innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietes darum herum.
- Die Flüssigkeit ist unendlich ausgedehnt.

Falls (i) nicht zutrifft (z.B. tangentielle Instabilitäten) kann man gar nichts sagen. (Aber in diesem Fall muss man sowieso die vollen Navier-Stokes-Gleichungen rechnen).

Falls (ii) nicht zutrifft, z.B. unendlich langer Zylinder
 $\rightarrow$ siehe nächster Abschnitt (zweidimensionale Strömungen)

Falls (iii) nicht zutrifft, z.B. in der Nähe einer Oberfläche:
 $\rightarrow$ Ein Körper, der parallel zu einer Oberfläche bewegt wird, erfährt eine Zugkraft! Das hängt damit zusammen, dass Oberflächenwellen erzeugt werden, die kontinuierlich Energie abtransportieren können ("Wellenzugkraft")

Nach dem d'Alembertsche Paradoxon sollte es in idealen Flüssigkeiten auch keinen Auftrieb geben.

Warum können dann aber Flugzeuge fliegen?

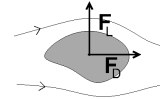
5.4.3.2 Warum Flugzeuge fliegen

Argument: Auf sehr großen Skalen (viel größer als das Flugzeug) kann man die Luftströmungen nicht mehr als Potentialströmungen annähern. Lokal, in der Umgebung der Flügel, ist die Darstellung als Potentialströmung zwar ganz gut. Auf dieser Skala sollte man aber das Flugzeug nicht mehr als dreidimensionales Objekt beschreiben. Die Strömungsverhältnisse werden besser durch zweidimensionale Strömungen um einen quasi unendlich ausgedehnten Flugzeugflügel beschrieben.

Untersuche daher Auftrieb und Zugkraft bei Objekten, die von zweidimensionalen Strömungen umströmt werden. Betrachte Objekt (z.B. Querschnitt durch unendlichen langer Zylinder oder Flugzeugflügel), dass sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch eine Potentialströmung bewegt ($\nabla \cdot \vec{v} = 0, \vec{\omega} = 0$).

NB: Die Voraussetzung (ii) für das d'Alembertsche Paradoxon trifft dann nicht mehr zu. Insbesondere muss es kein eindeutiges Potential Φ mehr geben, da das Strömungsgebiet nicht mehr einfach zusammenhängend ist → Möglichkeit von Zirkulation trotz $\vec{\omega} \equiv 0$.

Frage: Was ändert sich dadurch?



Wähle diesmal das Bezugssystem so, dass das Objekt in Ruhe ist.

Im Unendlichen ströme das Fluid in x -Richtung mit Geschwindigkeit v_∞
 $\leadsto \vec{F}_D = \vec{F} \cdot \vec{e}_x$: Kraft $\parallel$ Strömung; $\vec{F}_L = \vec{F} \cdot \vec{e}_y$: Kraft $\perp$ Strömung

a) Das Theorem von Blasius

Betrachte ruhenden Körper in einer Strömung (zwei Dimensionen)

Definiere komplexe Geschwindigkeit $w(z) = v_x - i v_y$ mit $z = x + iy$.

NB: Mit $\nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$ und $\nabla \times \vec{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$
sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.
 $\leadsto w(z)$ ist eine analytische (holomorphe) Funktion von z .

$$\text{Dann gilt: } F_D - i F_L = i \frac{\rho}{2} \oint_{\text{Rand d. Körpers}} w^2(z) dz$$

(Beweis:

- Kraftbilanz: Kräfte auf Rand sind Normalkräfte $d\vec{F} = -\vec{n} P dl$
 $(P: \text{Druck, } dl: \text{Länge eines Oberflächenelementes, } \vec{n} dl = \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix})$
Beitrag zur Zugkraft: $dF_D = -P dy$
Beitrag zum Auftrieb: $dF_L = P dx$
 $\Rightarrow$ Kombiniere $dF_D - i dF_L = -P dy - i P dx = -i P dz^*$
 $\Rightarrow F_D - i F_L = -i \oint P dz^*$
- Bernoulligleichung (ohne Gravitation): $P + \frac{\rho}{2} v^2 = B\rho = \text{const.}$
 $\Rightarrow -i \oint P dz^* = -i B \rho \oint dz^* + i \frac{\rho}{2} \oint dz^* (v_x^2 + v_y^2) = i \frac{\rho}{2} \oint dz^* (v_x + i v_y)(v_x - i v_y)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0$

Randbedingungen: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{v_x + i v_y = |v| \exp(i\theta)}{dx + i dy = |dz| \exp(i\theta)} \}$ selbes θ
 $\Rightarrow dz^* (v_x + i v_y) = dz (v_x - i v_y)$
 $= i \frac{\rho}{2} \oint dz (v_x - i v_y)^2 = i \frac{\rho}{2} \oint dz w^2 \quad \checkmark$

b) Das Theorem von Kutta-Zhukovski

Folgerung aus dem Theorem von Blasius

Für ruhende Körper in stationären Strömungen gilt

$$\boxed{F_D - iF_L = i\rho v_\infty \Gamma},$$

wobei $\Gamma = \oint d\vec{l} \cdot \vec{v}$ Zirkulation nach 5.4.2 S.106

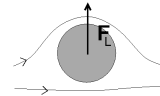
und v_∞ : Strömung weit vom Objekt.

(Beweis:

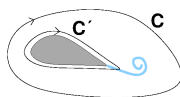
- Grundströmung $w_\infty = v_\infty$, Restströmung fällt im Unendlichen ab
 $\Rightarrow w(z)$ kann nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt werden.
 $\Rightarrow w(z) = v_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots$
 $\Rightarrow \oint dz w^2 = \oint dz (v_\infty + \frac{A}{z} + \dots)^2 = \oint dz (v_\infty^2 + 2v_\infty \frac{A}{z} + \frac{1}{z^2} (A^2 + 2v_\infty B) + \dots)$
Residuensatz $\rightarrow$ Nur Term $\sim \frac{1}{z}$ im Integranden trägt bei.
 $\left(\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Pole } a_i \text{ von } f(z)} \text{Res}[f(z)]_{z=a_i} \right)$
mit $\text{Res}[\frac{\alpha}{z^n}]_{z=0} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\frac{\alpha}{z^n} z^n) = 0$ für $n \neq 1$
 $= 2v_\infty \oint dz \frac{A}{z} = 2v_\infty \oint dz (\underbrace{v_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots}_0) = 2v_\infty \oint dz w(z)$
 $= 2v_\infty \oint (dx + idy) (v_x - iv_y)$
 $\left\{ \begin{array}{l} v_x + iv_y = |v| \exp(i\theta) \\ dx + idy = |dz| \exp(i\theta) \end{array} \right\}$ selbes $\theta \Rightarrow (dx + idy)(v_x - iv_y) = |dz| |v|$
 $= 2v_\infty \oint |dz| |v| = 2v_\infty \oint \frac{v}{|\vec{l}|} d\vec{l} \cdot \vec{v} = 2v_\infty \Gamma$
- Theorem von Blasius: $i\rho v_\infty \Gamma = i \frac{\rho}{2} \oint dz w^2 = F_D - iF_L$ ✓)

Fazit Auftrieb und Zugkraft

- $F_D = 0$: Nach wie vor keine Zugkraft!
Einleuchtend, selbes Argument wie 5.4.3.1: Zugkraft leistet Arbeit und generiert Energie, die nicht dissipiert werden kann.
- $F_L \neq 0$ möglich: Auftrieb bei Anwesenheit von Zirkulation

**Diskussion:** Warum fliegen Flugzeuge?

Vereinfachtes Bild: Strömung um Flügel wird als Quasi-2D Strömung betrachtet. An der Hinterkante des Flügels lösen sich Wirbel ab.



Aber: Auf der Kurve C weit weg vom Flügel gilt Zirkulationserhaltung $\Rightarrow$ Wirbel wird durch Zirkulation um den Tragflügel (auf der Kurve C' nah am Flügel) ausgeglichen.

$\Rightarrow$ Flügel bekommt Auftrieb!

Zutaten für Auftrieb

- Bernoulli-Gleichung (ging in das Theorem von Blasius ein)
– So lernt man es üblicherweise.
- Wirbel, Zirkulation
– Weitere, zwingend notwendige Zutat.

Beim Start von Flugzeugen müssen Wirbel abgelöst werden.

(Deshalb können Flugzeuge nicht direkt hintereinander starten.)

Richtung der Auftriebskraft (nach oben/nach unten) wird von der Zirkulation bestimmt, nicht von der Form des Flugzeugflügels.

(Deshalb kann man z.B. mit Flugzeugen auch Loopings fliegen.)