

Vorlesung Einführung in die Theoretische Physik (Theorie 1)

Version vom WS 2010/2011*

Universität Mainz
Insitut für Physik
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Inhalt: Newtonsche Mechanik
 Newtonsche Axiome
 Bezugssysteme
 Energie und Potential
 Erhaltungssätze
 Anwendung: Das Zweikörperproblem
Grundbegriffe der Elektrodynamik
 Maxwellgleichungen
 Elektromagnetische Potentiale
 Elektro- und Magnetostatik
 Elektromagnetische Wellen
 Liénard-Wiechert Potentiale
 Verletzung der Galilei-Invarianz
Die Spezielle Relativitätstheorie
 Einführung und Grundprinzipien
 Die Lorentz-Transformation
 Raum-Zeit und Lorentzinvarianz
 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik
 Relativistische Mechanik

*Elektronisch: Letzte Änderung am 22.02.11

[†]Staudingerweg 9, 03-534, Tel. (06131-)3920365, <Friederike.Schmid@uni-mainz.de>

© Copyright 2010 Friederike Schmid

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang usw.

Inhaltsverzeichnis

1	Newtonsche Mechanik	9
1.1	Grundlagen	9
1.1.1	Die Newtonschen Axiome	9
1.1.1.1	Wortlaut (übersetzt)	9
1.1.1.2	Präzisierung der kinematischen Begriffe	9
1.1.1.3	Diskussion des Postulats II	11
1.1.1.4	Diskussion des Postulats III	12
1.1.1.5	Diskussion des Postulat I	13
1.1.2	Beispiele: Anwendungen des Kraftgesetzes	14
1.1.2.1	Freier Fall im homogenen Schwerfeld	14
1.1.2.2	Freier Fall im homogenen Schwerfeld mit Reibung	14
1.1.2.3	Pendel	15
1.1.3	Bezugssysteme	17
1.1.3.1	Einleitung	17
1.1.3.2	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	17
1.1.3.3	Rotierende Bezugssysteme	18
1.1.3.4	Beliebig beschleunigte Bezugssysteme	20
1.1.4	Energie und Potential	21
1.1.4.1	Potentielle Energie	21
1.1.4.2	Kinetische Energie	23
1.1.4.3	Weitere Begriffe (vollständigkeitshalber)	25
1.1.5	Erhaltungssätze und Symmetrien	25
1.1.5.1	Homogenität der Zeit und Energieerhaltung	25
1.1.5.2	Homogenität des Raumes und Impulserhaltung	26
1.1.5.3	Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung	27
1.1.5.4	Skaleninvarianz und Virialsatz	28
1.2	Anwendung: Das Zweikörperproblem	29
1.2.1	Reduktion auf ein eindimensionales Problem	29
1.2.1.1	Schwerpunkt- und Relativkoordinaten	29
1.2.1.2	Bewegungsgleichungen für Relativkoordinaten	30
1.2.1.3	Bewegung im Zentralpotential	31
1.2.1.4	Integration der Bewegungsgleichungen	32
1.2.2	Das Kepler-Problem	32
1.2.2.1	Qualitative Analyse des Kepler-Problems	32
1.2.2.2	Semiquantitative Analyse	33

1.2.2.3	Quantitativ: Integration der Bewegungsgleichungen	34
1.2.2.4	Rückrechnung auf absolute Koordinaten	35
1.2.3	Elastische Streuung von Teilchen	36
1.2.3.1	Streuung eines einzelnen Teilchens im Zentralpotential	36
1.2.3.2	Streuung eines Strahls von Teilchen	37
1.2.3.3	Rutherfordstreuung	39
2	Grundbegriffe der Elektrodynamik	41
2.1	Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum	42
2.1.1	Die Gleichungen	43
2.1.2	Diskussion der Maxwellschen Gleichungen	44
2.1.3	Energie und Impuls	45
2.1.3.1	Der Energiesatz der Elektrodynamik	45
2.1.3.2	Impulssatz und Maxwellscher Spannungstensor	46
2.1.4	Elektromagnetische Potentiale	47
2.1.4.1	Einführung der Potentiale	47
2.1.4.2	Eichtransformationen	47
2.1.4.3	Neue Form der Maxwellgleichungen	48
2.2	Die Elektro- und Magnetostatik	49
2.2.1	Grundgleichungen	49
2.2.2	Elektrostatik	50
2.2.2.1	Grundlegende Fragestellung	50
2.2.2.2	Lösung im unbegrenzten Raum: Das Coulomb-Potential	51
2.2.2.3	Allgemeines Randwertproblem und Greens-Funktion	52
2.2.3	Magnetostatik	54
2.2.3.1	Lösung im unbegrenzten Raum	54
2.2.3.2	Anwendung: Biot-Savart-Ampèresches Gesetz	55
2.2.4	Multipolentwicklung	55
2.2.4.1	Idee der Multipolentwicklung	55
2.2.4.2	Multipolentwicklung in der Elektrostatik	56
2.2.4.3	Multipolentwicklung in der Magnetostatik	57
2.2.4.4	Anwendung: Maxwellgleichungen in Materie	57
2.3	Lösungen der vollen Maxwellgleichungen	59
2.3.1	Ebene elektromagnetische Wellen	59
2.3.2	Felder von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen	61
2.3.2.1	Greens-Funktion des d'Alembert Operators	61
2.3.2.2	Allgemeine Lösung des Problems	62
2.3.2.3	Punktförmige Ladungen: Liénard-Wiechert Potentiale	62
2.3.2.4	Speziell: Gleichförmig bewegten Punktladung	62

3	Die Spezielle Relativitätstheorie	65
3.1	Einführung und Grundprinzipien	65
3.1.1	Das Relativitätsprinzip in der Newtonschen Mechanik	65
3.1.2	Schwierigkeiten mit der Newtonschen Mechanik	66
3.1.2.1	Theoretisch	66
3.1.2.2	Experimentell	67
3.1.3	Die Einsteinschen Postulate	68
3.1.4	Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten	68
3.1.4.1	Zeitdilatation	68
3.1.4.2	Lorentzkontraktion	69
3.1.4.3	Gleichzeitigkeit	70
3.1.4.4	Addition von Geschwindigkeiten	70
3.2	Die Lorentz-Transformation	70
3.2.1	Herleitung der „speziellen“ Lorentz-Transformation	71
3.2.1.0	Voraussetzungen	71
3.2.1.1	Schritt 1: Die Transformation ist linear	71
3.2.1.2	Schritt 2: y und z bleiben von Transformation unberührt	72
3.2.1.3	Schritt 3: Leite allgemeine Form der Transformation L aus dem Relativitätsprinzip her (noch ohne II. Einsteinsches Postulat)	73
3.2.1.4	Schritt 4: Folgerung aus Kausalität	74
3.2.1.5	Zusammenfassung von Schritt 1 bis 4	75
3.2.1.6	Schritt 5: Ausnützen des II. Einsteinschen Postulats \leadsto Spezielle Lorentztransformation	75
3.2.1.7	Zusammenfassung von Schritt 1-5	76
3.2.2	Veranschaulichung und Anwendungsbeispiele	76
3.2.2.1	Graphische Darstellung in der $(ct - x)$ -Ebene	76
3.2.2.2	Form der Transformation	77
3.2.2.3	Beispiele	77
3.2.3	Allgemeine Lorentz-Transformationen	79
3.2.3.1	Notation	80
3.2.3.2	Lorentztransformation und Linienelement	81
3.2.3.3	* Analyse und Klassifizierung von allgemeinen Lorentztransformationen	83
3.3	Raum-Zeit und Lorentzinvarianz	86
3.3.1	Minkowski-Diagramm und Lichtkegel	86
3.3.2	Viererskalare, Vierervektoren, Vierertensoren	87
3.3.2.1	Klassifizierung	87
3.3.2.2	Rechenregeln	88
3.3.3	Kovarianz-Forderung an Naturgesetze	89
3.4	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik im Vakuum	90
3.4.1	Vierergrößen der Elektrodynamik	90
3.4.2	Maxwellgleichungen in kovarianter Form	91
3.5	Relativistische Mechanik	92
3.5.1	Relativistisches Kraftgesetz	92

3.5.1.1	Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Einstein-Kraft“	92
3.5.1.2	Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Newton-Kraft“	93
3.5.2	Viererimpuls und Energie-Impuls-Erhaltung	94
3.5.2.1	Definition und Eigenschaften des Viererimpulses	94
3.5.2.2	Energie- und Impulserhaltung	95
3.5.2.3	Die Äquivalenz von Masse und Energie	96
3.6	Ausblick: Das starke Äquivalenzprinzip	97

Einige empfohlene Bücher

Zur Theoretischen Mechanik

- W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik Bd. 1.* (Vieweg)
- H. Goldstein: *Klassische Mechanik.* (Akademische Verlagsgesellschaft)
- F. Scheck: *Mechanik.* (Springer)
- L. D. Landau/ E. M. Lifshitz: *Mechanik.* (Vieweg)
- F. Knypers: *Klassische Mechanik.* (VCH)
- H. Stephani, G. Kluge: *Theoretische Mechanik.* (Spektrum)

Zur Elektrodynamik

- T. Fliessbach: *Elektrodynamik* (Spektrum)
- W. Nolting: *Theoretische Physik Bd. 3* (Vieweg)
- J.D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik* (de Gruyter)
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics Bd. 2* (Addison Wesley)

Zur Speziellen Relativitätstheorie

- W. Rindler: *Essential Relativity.* (van Nostrand Reinhold)
- W. Nolting: *Theoretische Physik Bd. 4* (Vieweg)
- R. d'Inverno: *Einführung in die Relativitätstheorie.* (VCH)

u.a.

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

1.1 Grundlagen

1.1.1 Die Newton'schen Axiome

1.1.1.1 Wortlaut (übersetzt)

aus: principia mathematica philosophiae naturalis

- I) „Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.“
- II) „Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht längs jener geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.“
- III) „Die Reaktion auf eine Aktion ist immer entgegengesetzt und gleich, d.h. die Aktionen (Kraftwirkungen) zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.“

Im Folgenden: Diskussion und Präzisierung

1.1.1.2 Präzisierung der kinematischen Begriffe

Wir verstehen unter

- einem „Körper“: Einen Massenpunkt

idealisierte Objekte mit Masse, aber ohne räumliche Ausdehnung
(\leadsto Rotation spielt keine Rolle)

Generell gute Näherung, wenn Ausdehnung des Körpers sehr viel kleiner als andere typische Längenskalen des Systems

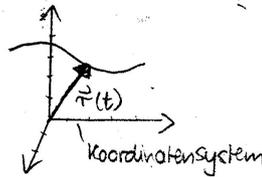
Wir werden in Abschnitt 1.6 sehen, dass man unter gewissen Umständen auch ausgedehnte Körper wie Massenpunkte behandeln kann (mit Zentrum am Massenschwerpunkt).

- „Bewegung“: Die Bahnkurve bzw. Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes

Dahinter steht eine Abbildung „Welt“ $\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \text{physikalischer Raum („Ort“)} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \quad (\vec{r}) \\ \text{physikalische Zeit} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad (t) \end{array}$$

\leadsto Bahnkurve



Notwendig für diese Abbildung:

Definition einer Referenzlänge und eines Referenz-Zeitintervalls
Einheiten (z.B. SI-System: $[r] = 1 \text{ m}$, $[t] = 1 \text{ s}$)

Bemerkung: Der Ort \vec{r} ist eine vektorielle Größe in 3 Dimensionen. Dies ist an zwei Eigenschaften erkennbar:

- Darstellung durch 3 Koordinaten in einer Orthonormalbasis

$$\begin{array}{l} \text{Basis: } E = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) \\ \text{(Eigenschaften: } E^T E = E E^T = \mathbb{1}, \det(E) = \pm 1 \Rightarrow E \in \mathbb{O}(3)) \end{array}$$

$$\text{Darstellung von } \vec{r}: \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3 = E \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Berechnung der Koordinaten: } r_i = \vec{r} \vec{e}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = E^T \vec{r}$$

- Transformationsverhalten bei Wechsel der Basis

$$\text{Neue Orthonormalbasis: } E' = (\vec{e}'_1 \quad \vec{e}'_2 \quad \vec{e}'_3)$$

$$\text{Neue Darstellung: } \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit Transformationsmatrix } U = E'^T E$$

$$\text{(Beweis: } \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = E'^T \vec{r} = E'^T \underbrace{E^T E}_{\mathbb{1}} \vec{r} = U \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \checkmark)$$

$$\text{Eigenschaften der Transformationsmatrix: } U^T U = U U^T = \mathbb{1}$$

$$\text{(Beweis: } U^T U = (E'^T E)^T (E'^T E) = E^T \underbrace{E' E'^T}_{\mathbb{1}} E = E^T E = \mathbb{1}, \dots)$$

- Bewegungszustände

Definiere zunächst von der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ abgeleitete Größen

- Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}$ (Einheit 1 m/s)
- Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}$ (Einheit 1 m/s²)

Wir verstehen unter

- „Zustand der Ruhe“: Bahnkurve $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 = \overrightarrow{\text{const.}}$
- „gleichförmige Bewegung“: Bahnkurve mit $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{const.}}$
 $\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$
- „Änderung der Bewegung“: Beschleunigung $\vec{a}(t)$

1.1.1.3 Diskussion des Postulats II

Begriff der „Kraft“ F

Angelehnt an unsere Wahrnehmung, Erfahrung aus dem Alltag

Beispiele

- Schwerkraft an der Erdoberfläche

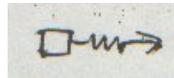
~> zieht nach unten

~> erscheint überall gleich groß

Experimentelle Beobachtung (Galilei):

führt beim freien Fall zu konstanter Beschleunigung

- Angelegte Kraft



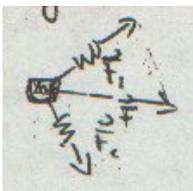
~> Erfahrung: Beschleunigung erfolgt in Richtung der Kraft

→ Postulat:

Kraft ist eine vektorielle Größe \vec{F}

Effekt einer Kraft auf Bahnkurve eines Massenpunkts ist $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ mit
 m: zunächst nur Proportionalitätsfaktor

Folgerung: Superpositionsprinzip



Angenommen, auf einen Körper wirken verschiedene Kräfte

~> Beschleunigungen addieren sich vektoriell auf

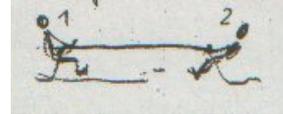
~> Kräfte addieren sich vektoriell auf: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

1.1.1.4 Diskussion des Postulats III

Zwei Aspekte:

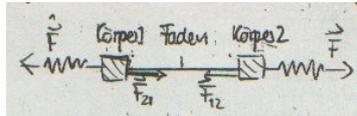
- Beschreibt Wahrnehmung:

Wenn ich eine Kraft ausübe, erfahre ich eine Gegenkraft, z.B. Tauziehen
Gleichung: $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$



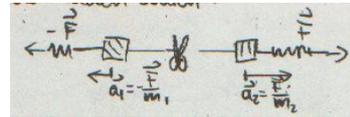
- Ermöglicht den Vergleich der Wirkung von Kräften auf verschiedene Körper \rightarrow Aussage über Proportionalitätskonstante m :
 m ist eine Eigenschaft von Körpern: Träge Masse
Messvorschrift

Aufbau:



- Ziehe so, dass Aufbau in Ruhe $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}$

- Schneide Faden durch:



- Miss Beschleunigungen $\vec{a}_1 = -\frac{\vec{F}}{m_1}$ und $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{m_2}$
 \Rightarrow Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ gibt Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$

Damit können im Prinzip die Massen aller Körper in Einheiten der Masse eines Referenzkörpers gemessen werden.

\leadsto Masse hat physikalische Realität

Einheit der Masse: Referenzmasse, z.B. SI-System: 1 kg

Zusammenfassung des Postulat II und III: Newtonsches Kraftgesetz

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

mit m : träge Masse, physikalische Eigenschaft eines Körpers
(Einheit: $[F] = 1 \text{ kg m/s}^2$)

Alternative Formulierung des Newtonschen Kraftgesetzes

Definiere Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

\rightarrow Newtonsches Kraftgesetz: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

Vorteil dieser Formulierung (Vorgriff auf spezielle Relativitätstheorie, Kapitel 5):

Bei sehr hohen Geschwindigkeiten $v \lesssim c$ (Lichtgeschwindigkeit) gilt $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ nicht mehr, aber $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ ist weiterhin gültig mit geschwindigkeitsabhängiger Masse $m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

1.1.1.5 Diskussion des Postulat I

Wahrnehmungserfahrung

- In einem Karrussell: sehr starke „Kraft“ nach außen
- Am Boden: weniger Kraft, fast nur noch Schwerkraft nach unten
- Auf dem Mond: noch weniger Kraft

Postulat: Es gibt Bezugssysteme, in denen „kräftefreie Körper“ in gleichförmiger Bewegung verharren. Diese Bezugssysteme nennt man Inertialsysteme.

Problem mit Inertialsystem

Verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Ursprünglich ging Newton sogar noch weiter und postulierte einen „absoluten Raum“, also ein ausgezeichnetes Inertialsystem, das „in Ruhe“ ist.

Problem: Man kann dieses nicht von anderen Bezugssystemen unterscheiden, es hat also keine „physikalische Realität“. In der klassischen Mechanik kann auf absoluten Raum ohne weiteres verzichtet werden.

Aber: Selbst wenn man einen relativen Raum akzeptiert, bleiben noch weitere grundlegende Probleme:

- Inertialsysteme im Sinne der klassischen Mechanik können in Experimenten im Universum prinzipiell nicht realisiert werden. Das liegt daran, dass es keine „kräftefreien Körper“ geben kann, da Gravitationskräfte wie $1/r^2$ abfallen und sich nicht abschirmen lassen.
(NB: Gravitationskräfte sind die einzigen nicht abschirmbaren Kräfte. Alle anderen Kräfte lassen sich abschirmen.)
- Ein ästhetisches Problem: Es gibt keinen absoluten Raum, aber eine absolute Zeit. Mit welchem Recht?

Lösung: Relativitätstheorie

Klassische Mechanik

Relativer Raum, absolute Zeit

Problem mit Inertialsystem

Spezielle Relativitätstheorie

Keine absolute Zeit mehr

Asymmetrie zwischen Raum und Zeit weitgehend aufgehoben

Problem mit Inertialsystem besteht

Allgemeine Relativitätstheorie

Gravitation ist Eigenschaft des Raums

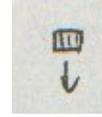
Inertialsystem (kräftefreie Bewegung) realisiert im „freien Fall“

→ gibt dem Inertialsystem physikalische Realität

1.1.2 Beispiele: Anwendungen des Kraftgesetzes

1.1.2.1 Freier Fall im homogenen Schwerfeld

* Kraft: Schwerkraft an Erdoberfläche



$$\vec{F}_{\text{grav}} = m_s \cdot \vec{g} \text{ mit } m_s: \text{ Schwere Masse}$$

Experimentell stellt man fest: Alle Körper fallen gleich (Galilei)

→ \vec{g} ist eine Beschleunigung (konkret: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

und $m_s \approx m$ (träge Masse)

Einsteinsches Äquivalenzprinzip: $m_s = m$

(allgemeine Relativitätstheorie)

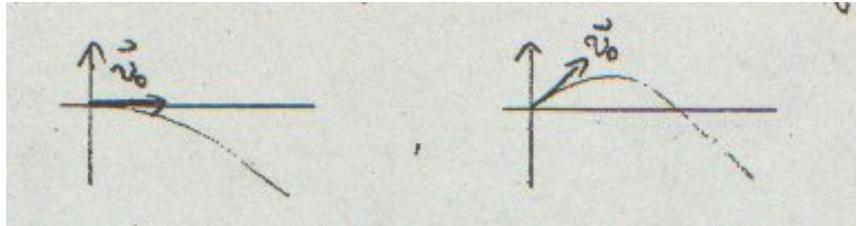
* Bahnkurve

Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$: Ort \vec{r}_0 , Geschwindigkeit \vec{v}_0

- Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \vec{g}$

- Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t d\tau \vec{a}(\tau) = \vec{v}_0 + \vec{g} t$

- Ort: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t d\tau \vec{v}(\tau) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$



1.1.2.2 Freier Fall im homogenen Schwerfeld mit Reibung

* Kräfte:

$$\text{Schwerkraft } \vec{F}_{\text{grav}} = m \cdot \vec{g}$$

$$\text{Reibungskraft } \vec{F}_{\text{reib}} = -\alpha(v) \cdot \vec{v}$$

Nimm an, $\alpha = \text{const.}$ (Stokessche Reibung)

* Berechne Geschwindigkeitsverlauf

$$\text{Gleichung: } \dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = \vec{g}$$

inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Vorgehen:

(i) Löse zunächst homogene DGL: $\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = 0$
→ Schar von homogenen Lösungen $\vec{v}_{\text{hom}}(t)$

(ii) Suche spezielle Lösung für inhomogene DGL $\vec{v}_s(t)$
→ Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{inh}}(t) = \vec{v}_s(t) + \vec{v}_{\text{hom}}(t)$

Umsetzung:

(i) homogene DGL: $\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\alpha}{m} \vec{v}(t) = 0$

Ansatz: $\vec{v} = \vec{w} e^{\lambda t} \rightarrow \dot{\vec{v}} = \lambda \vec{w} e^{\lambda t}$

Einsetzen: $\vec{w} e^{\lambda t} (\lambda + \frac{\alpha}{m}) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\alpha}{m}$

\Rightarrow Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{hom}}(t) = \vec{w} e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

(ii) Spezielle Lösung $\vec{v}_s(t)$: z.B. die Lösung, bei der $\vec{v} \parallel \vec{g}$ und Reibungskraft die Schwerkraft genau aufwiegt

$\vec{F}_{\text{reib}} = -\vec{F}_{\text{grav}} \Rightarrow \vec{v}_s = \text{const. und } -\alpha \vec{v}_s = -m \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_s = \frac{m}{\alpha} \vec{g}$

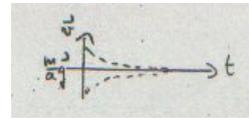
\Rightarrow Allgemeine Lösung hat Form $\vec{v}_{\text{inh}}(t) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + \vec{w} e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

* Bahnkurve mit Anfangsbedingungen \vec{r}_0, \vec{v}_0 zur Zeit $t = 0$

- Geschwindigkeit:

$\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{m}{\alpha} \vec{g} + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

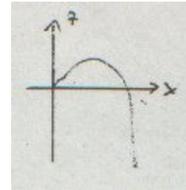


- Bahnkurve:

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t d\tau \vec{v}(\tau)$

$= \vec{r}_0 + \frac{m}{\alpha} \vec{g}t + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) (-\frac{m}{\alpha}) e^{-\frac{\alpha}{m}\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$

$= \vec{r}_0 + \frac{m}{\alpha} \vec{g}t + (\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha} \vec{g}) \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$



1.1.2.3 Pendel

* Charakterisiere zunächst Bahnkurve $\vec{r}(t)$: Kreisbewegung

Wähle mitrotierendes Bezugssystem:

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r$

- Bahn: $\vec{r}(t) = l \vec{e}_r$

(l: Fadenlänge)

- Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Richtung: $\vec{v} \perp \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{e}_\varphi$

Denn: $|\vec{r}| = \sqrt{r^2} = \text{const.} \Rightarrow \frac{d\sqrt{r^2}}{dt} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_r \cdot \vec{v} = 0$

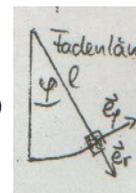
$\rightarrow \vec{v}(t) = l \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi$ ($\dot{\varphi}(t)$: Winkelgeschwindigkeit)

- Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = l \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + l \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$

$|\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}| = |\frac{d\vec{e}_r}{dt}| = |\frac{d(\vec{r}/r)}{dt}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}| \cdot \frac{1}{l} = \frac{|\vec{v}|}{l} = |\dot{\varphi}(t)|$

und: $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \parallel \vec{e}_r$, zeigt Richtung $-\vec{e}_r$ für $\dot{\varphi} > 0$

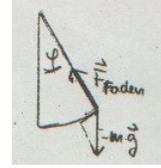
$\rightarrow \vec{a}(t) = \underbrace{l \ddot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi}_{\text{Tangential- beschleunigung}} - \underbrace{l \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r}_{\text{Normal- beschleunigung}}$



* Folgerung für Kraft

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \ddot{\varphi} l \vec{e}_\varphi - m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{m \vec{g}}_{\text{Schwerkraft}} - \underbrace{f_{\text{Faden}} \vec{e}_r}_{\text{Fadenkraft}}$$



Zerlegung:

$$\text{Normalkraft: } \vec{F}_r = m (\underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_r}_{g \cos \varphi}) \vec{e}_r + f_{\text{Faden}} \vec{e}_r \stackrel{!}{=} -m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$$

sorgt dafür, dass Körper auf Kreisbahn bleibt

$$\text{Tangentialkraft: } \vec{F}_\varphi = m (\underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_\varphi}_{g \sin \varphi}) \vec{e}_\varphi \stackrel{!}{=} m \ddot{\varphi} l \vec{e}_\varphi$$

* Lösung für Bahnkurve $\varphi(t)$

Newtonsche Gleichung für Tangentialkraft

$$\Rightarrow \text{Differentialgleichung } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Exakte Lösung kann noch nicht (aber bald) berechnet werden

Im Moment beschränken wir uns auf den Spezialfall kleiner Auslenkungen

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow \text{Genäherte Differentialgleichung: } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$\text{Ansatz: } \varphi(t) = e^{\lambda t}$$

$$\text{Einsetzen: } \lambda = \pm i \sqrt{g/l} \quad \text{imaginär}$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung hat die Form: } \varphi(t) = C_+ e^{i\sqrt{g/l}t} + C_- e^{-i\sqrt{g/l}t}$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\rightarrow \varphi_0 = C_+ + C_-, \quad \omega_0 = i\sqrt{g/l}(C_+ - C_-)$$

$$C_+ = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2i}\omega_0\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad C_- = \frac{1}{2}\varphi_0 - \frac{1}{2i}\omega_0\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t + \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1.1.3 Bezugssysteme

1.1.3.1 Einleitung

An den Beispielen 1.1.2 wurde deutlich: Je nach Situation bieten sich verschiedene Koordinatensysteme an.

Beispiel Pendel: Mitrotierendes Bezugssystem $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$

Bahnkurve $\vec{r}(t) = l\vec{e}_r$: Für den mitrotierenden Beobachter konstant

Beobachter spürt Kraft auf Faden:

$m(g \cos \varphi) \vec{e}_r$: Schwerkraft

$-m \dot{\varphi}^2 l \vec{e}_r$: Zusätzliche „Scheinkraft“ Zentrifugalkraft

Beobachter spürt keine Kraft in Richtung \vec{e}_φ :

Schwerkraft wird durch weitere Scheinkraft genau aufgehoben.

Wir wollen diese Zusammenhänge nun systematisch untersuchen: Wie hängen Scheinkräfte mit Bezugssystemen zusammen, oder allgemeiner: Wie transformiert man zwischen verschiedenen Bezugssystemen?

Ausgangspunkt:

1. Newtonsches Axiom: Es gibt Inertialsysteme

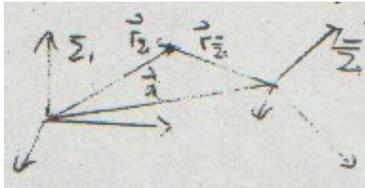
⇒ Es gibt mindestens ein Inertialsystem Σ

(Newton: „absoluter Raum“, hier: egal, irgendeins)

Dieses soll unser Referenzsystem sein

Die Koordinaten einer Bahnkurve im Referenzsystem Σ seien: $\vec{r}_\Sigma(t)$

Betrachte nun Bezugssystem $\bar{\Sigma}$



Allgemeine Koordinatentransformation

$$\vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) = \mathcal{D}^{-1}(t) \left[\vec{r}_\Sigma(t) - \vec{d}(t) \right]$$

$$\vec{r}_\Sigma(t) = \underbrace{\mathcal{D}(t)}_{\text{Drehung}} \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) + \underbrace{\vec{d}(t)}_{\text{Translation}}$$

1.1.3.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Falls $\bar{\Sigma}$ ein Inertialsystem ist, gilt generell:

$$\vec{r}_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \text{Bahn ist kräftefrei} \Leftrightarrow \vec{r}_{\bar{\Sigma}} = 0$$

Einsetzen: $\vec{r}_{\bar{\Sigma}} = \mathcal{D}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d})$

$$\dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \dot{\mathcal{D}}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d}) + \mathcal{D}^T(\dot{\vec{r}}_\Sigma - \dot{\vec{d}})$$

$$\ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \ddot{\mathcal{D}}^T(\vec{r}_\Sigma - \vec{d}) + 2\dot{\mathcal{D}}^T(\dot{\vec{r}}_\Sigma - \dot{\vec{d}}) + \mathcal{D}^T(\ddot{\vec{r}}_\Sigma - \ddot{\vec{d}})$$

$$\stackrel{!}{=} 0, \text{ falls } \ddot{\vec{r}}_\Sigma = 0 \quad \text{für alle } \dot{\vec{r}}_\Sigma, \vec{r}_\Sigma$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathcal{D}}^T = 0, \ddot{\mathcal{D}}^T = 0, \ddot{\vec{d}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \text{const. (feste Drehung)}; \vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow \text{Transformation: } \vec{r}_{\bar{\Sigma}} = \mathcal{D}^T(\vec{r}_\Sigma(t) - \vec{d}_0 - \vec{v}_0 t)$$

Allgemeine Formulierung: Zeit einbezogen

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{r}_{\Sigma} = \mathcal{D}^T(\vec{r}_{\bar{\Sigma}} - \vec{d}_0 - \vec{v}_0(t_{\Sigma} - t_0)) \\ t_{\Sigma} = t_{\bar{\Sigma}} - t_0 \end{matrix}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{matrix} \vec{r}_{\Sigma} = \mathcal{D}\vec{r}_{\bar{\Sigma}} + \vec{d}_0 + \vec{v}_0 t_{\Sigma} \\ t_{\Sigma} = t_{\bar{\Sigma}} + t_0 \end{matrix}}$$

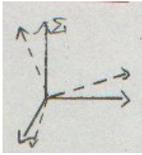
Galilei-Transformation

NB: $t_{\Sigma} = t_{\bar{\Sigma}} + t_0$ bedeutet: Zeitdifferenzen sind absolut

Folgerungen

- (i) Zu jedem Satz $(\mathcal{D}, \vec{v}_0, \vec{d}_0)$ gehört ein Inertialsystem
→ Wenn es ein Inertialsystem gibt, gibt es unendlich viele
- (ii) Transformation von
 - Geschwindigkeiten: $\vec{v}_{\Sigma}(t) = \dot{\vec{r}}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}^T(\vec{v}_{\bar{\Sigma}}(t) - \vec{v}_0)$
 $\vec{v}_{\bar{\Sigma}}(t) = \mathcal{D}\vec{v}_{\Sigma}(t) + \vec{v}_0$
 - Beschleunigungen: $\vec{a}_{\Sigma}(t) = \ddot{\vec{r}}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}\ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}(t)$
 - Kräften: Wie Beschleunigungen: $\vec{F}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}\vec{F}_{\bar{\Sigma}}(t)$

1.1.3.3 Rotierende Bezugssysteme



$$\vec{r}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}^T(t)\vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{r}_{\bar{\Sigma}}(t) = \mathcal{D}(t)\vec{r}_{\Sigma}(t)$$

\mathcal{D} ist Drehung:
 $\mathcal{D}(t)\mathcal{D}^T(t) = \mathcal{D}^T(t)\mathcal{D}(t) = \mathbb{1}$; $\det(\mathcal{D}) = +1$

Einfachheitshalber: Betrachte Bahnkurve, Kräfte etc. zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 . Wähle Inertialsystem Σ , welches zu diesem Zeitpunkt mit $\bar{\Sigma}$ übereinstimmt. (Wie man von einem anderen Inertialsystem dahintransformiert, wissen wir ja.)

* Vorabklärung: Zeitliche Ableitungen von Vektorfunktionen $\vec{u}(t)$

$$\vec{u}_{\Sigma}(t) \Big|_{t=t_0} = \mathcal{D}(t_0)\vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) = \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0), \text{ da } \mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$$

$$\dot{\vec{u}}_{\Sigma}(t) \Big|_{t=t_0} = \dot{\mathcal{D}}(t_0)\vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) + \mathcal{D}(t_0)\dot{\vec{u}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$$

Es gilt: $\mathcal{D}^T\mathcal{D} = \mathbb{1} \Rightarrow (\mathcal{D}^T\dot{\mathcal{D}}) = \dot{\mathcal{D}}^T\mathcal{D} + \mathcal{D}^T\dot{\mathcal{D}} = 0$ zu allen Zeiten t

⇒ (wegen $\mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$): $\dot{\mathcal{D}}^T(t_0) + \dot{\mathcal{D}}(t_0) = 0$

⇒ $\dot{\mathcal{D}}(t_0)$ hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$: antisymmetrische Matrix

Damit gilt für beliebige Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\dot{\mathcal{D}}(t_0)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + bx_3 \\ -ax_1 + cx_3 \\ -bx_1 - cx_2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \vec{\omega} \times \vec{x} \text{ mit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{u}_{\bar{\Sigma}}(t_0) + \dot{\vec{u}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$$

~> Also Schreibweise: $\dot{\mathcal{D}}(t_0) \cdot = \vec{\omega} \times \cdot$

Zu dem Zeitpunkt, an dem Σ und $\bar{\Sigma}$ identisch sind,

gilt: $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \cdot + \left(\frac{d}{dt}\right)_{\bar{\Sigma}}$

Bemerkungen

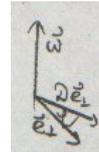
(i) Anschauliche Bedeutung von $\vec{\omega}$

Betrachte infinitesimale Drehung $\mathcal{D} = \mathbb{1} + dt \cdot \dot{\mathcal{D}}$

- Für Vektoren $\vec{x} \parallel \vec{\omega}$ gilt: $\dot{\mathcal{D}}\vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x} = 0 \Rightarrow \mathcal{D}\vec{x} = \vec{x}$
 $\Rightarrow \vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse
- Berechne Kreuzprodukt eines gedrehten und ungedrehten Einheitsvektors \vec{e}_{\perp} , der auf $\vec{\omega}$ senkrecht steht.

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_{\perp} \times (\mathcal{D}\vec{e}_{\perp}) &= \sin \angle(\underbrace{\vec{e}_{\perp}, \mathcal{D}\vec{e}_{\perp}}_{\dot{\varphi} dt}) \cdot \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}|} = \dot{\varphi} dt \cdot \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}|} \\ &= \vec{e}_{\perp} \times (\vec{e}_{\perp} + dt \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_{\perp}) = dt \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{\omega}| = \dot{\varphi}$$

$\Rightarrow |\vec{\omega}|$ entspricht der Winkelgeschwindigkeit



- (ii) $\vec{\omega}$ ist strenggenommen kein Vektor, sondern von Matrix abgeleitet. Trotzdem transformiert es unter Drehungen wie ein Vektor; unter Spiegelungen transformiert es wie ein Vektor, aber mit umgedrehtem Vorzeichen. Allgemein (Drehung + evtl. Spiegelung) gilt:

Für Koordinatentransformation $U \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \cdot \det(U)}$

(Grund: Betrachte Vektor \vec{a} , transformiert wie ein solcher.

$\rightarrow \vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ ist auch Vektor, transformiert wie ein solcher

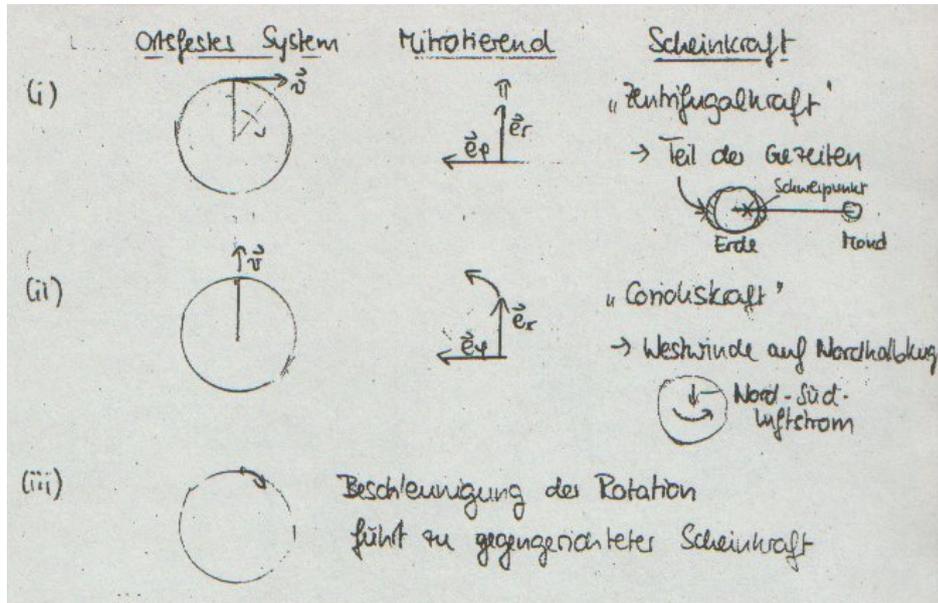
$\rightarrow \vec{\omega}$ muss wie Vektor transformieren, außer wenn Koordinatensystem Händigkeit ändert

z.B. Punktspiegelung: $U = -\mathbb{1} \Rightarrow \vec{a}' = -\vec{a}, \vec{b}' = -\vec{b} = \vec{\omega}' \times \vec{a} \Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}$)

Größen mit einem solchen Transformationsverhalten nennt man auch Pseudovektoren. Wir werden noch mehrere kennenlernen.

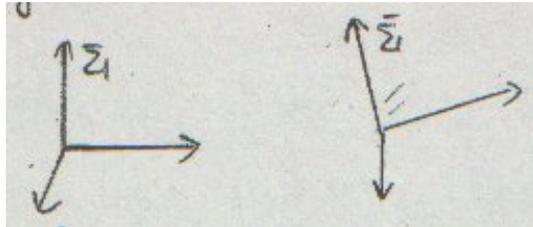
* Anwendung auf Bahnkurve $\vec{r}(t)$

- Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}_{\Sigma}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{\bar{\Sigma}} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}(t_0)$
- Beschleunigung: $\ddot{\vec{r}}_{\Sigma}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\Sigma}\right)_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\Sigma} + \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\Sigma}\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}] + \left(\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}]\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}\right)_{\bar{\Sigma}}$
 $= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}$
- Kräfte: $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\Sigma} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} + m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}$
 bzw. Bewegungsgleichung im System $\bar{\Sigma}$:
 $m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{echte Kraft}} \underbrace{- m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{(i) Zentrifugalkraft}} \underbrace{- 2m \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\bar{\Sigma}}}_{\text{(ii) Corioliskraft}} \underbrace{- m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{(iii) (namenlos)}}$

* Anschaulich: Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

1.1.3.4 Beliebig beschleunigte Bezugssysteme

Allgemeiner Fall



$$\vec{r}_{\Sigma}(t) = \mathcal{D}(t)\vec{r}_{\Sigma}(t) + \vec{d}(t)$$

Um Kräfte zu berechnen und Bewegungsgleichung aufzustellen:

Betrachte wieder Inertialsystem, das zur Zeit t_0 mit $\bar{\Sigma}$ übereinstimmt
($\mathcal{D}(t_0) = \mathbb{1}$, $\vec{d}(t_0) = 0$)

Verfahren wie vorher, Ergebnis fast gleich:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{\Sigma} = \vec{F} - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m \cdot \ddot{\vec{d}}$$

1.1.4 Energie und Potential

1.1.4.1 Potentielle Energie

- Vorbemerkung: Wir nehmen im folgenden an, dass wir in einem Inertialsystem sind, und wollen uns auf geschwindigkeitsunabhängige Kräfte beschränken. Die allgemeine Form eines Kraftfeldes lautet zwar $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ (ein Teilchen) bzw. $\{\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t)\}$ (N Teilchen); makroskopisch kennt man jedoch nur zwei Arten von geschwindigkeitsabhängigen Feldern: Die Reibungskraft und die Lorentzkraft (Magnetismus). Diese sollen gesondert behandelt werden.

→ Nimm an Kraftfeld der Form

$$\begin{aligned} &\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) && \text{(ein Teilchen)} \\ &\{\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t)\} && (N \text{ Teilchen}) \end{aligned}$$

* Erfahrung:

Geschwindigkeitsunabhängige Kräfte lassen sich von Potential ableiten.

$$\text{Ein Teilchen: } \vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$$

$$N \text{ Teilchen: } \vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) \quad (\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial r_{ix} \\ \partial/\partial r_{iy} \\ \partial/\partial r_{iz} \end{pmatrix})$$

Häufig sind Kräfte und Potential zudem nicht explizit zeitabhängig, d.h. $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$. Solche Kraftfelder heißen auch konservative Kraftfelder.

* Beispiele:

- Ein Teilchen in einer Dimension

$$\text{„trivial“: } F(x, t) = -\frac{d}{dx}U(x, t) \text{ mit } U(x, t) = -\int_{x_0}^x F(\tilde{x}, t)d\tilde{x} + U_0$$

- Ein Teilchen, auf das Zentralkraft der Form $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t)\vec{e}_r$ wirkt.

$$\text{Dann gilt: } \vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t) \text{ mit } U(r, t) = -\int_{r_0}^r F(\tilde{r}, t)d\tilde{r} + U_0$$

$$\text{(Check: } -\vec{\nabla}U = -\frac{d}{dr}U(r, t) \cdot \vec{\nabla}r \text{ mit } \frac{d}{dr}U(r, t) = -\frac{d}{dr}\int_r^r F(\tilde{r}, t)d\tilde{r} = -f(r, t)$$

$$\text{und } \vec{\nabla}r = \vec{\nabla}\sqrt{r^2} = \frac{1}{2\sqrt{r^2}} \cdot 2\vec{r} = \vec{r}/r = \vec{e}_r \text{)}$$

Bemerkung: Es ist natürlich nicht a priori klar, dass sich eine Funktion $\vec{F}(\vec{r}, t)$ auf ein Potential zurückführen lässt.

Beispiel für eine hypothetische Kraft, für die das nicht gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t)\vec{e}_\varphi \quad \text{(f(r, t) nicht Null)}$$



Betrachte Linienintegral entlang eines Kreises mit Radius R



$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\varphi), t) = \int_0^{2\pi} d\varphi R \vec{e}_\varphi \cdot f(R, t)\vec{e}_\varphi = 2\pi R f(R).$$

Gäbe es ein Potential U mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, dann müsste aber gelten:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\varphi), t) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \vec{\nabla}U(\vec{r}(\varphi), t) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d}{d\varphi}U(\vec{r}(\varphi), t) = -U(\vec{r}(\varphi), t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

* Bedingung dafür, dass ein Potential existiert

(i) Globale Formulierung über geschlossenes Wegintegral

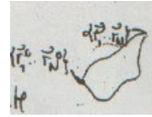
$$\text{Ein Teilchen: } \oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = 0 \quad ; \quad \text{N Teilchen: } \sum_i \oint d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = 0$$

Notwendig: Betrachte geschlossene Kurve $\vec{r}_i(s)$ ($s \in [0, \delta]$)



$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_i \oint d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) &= \sum_i \int_0^\delta ds \frac{d\vec{r}_i}{ds} \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = (\text{falls Potential existiert}) \\ &= - \int_0^\delta ds \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{ds} \cdot \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = - \int_0^\delta ds \frac{d}{ds} U(\vec{r}_1(s) \cdots \vec{r}_N(s), t) \\ &= -U(\vec{r}_1(s) \cdots \vec{r}_N(s), t) \Big|_0^\delta = 0 \end{aligned}$$

Hinreichend: Wähle Referenzpunkt $\{\vec{r}_1^0 \cdots \vec{r}_N^0\}$



$$U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = U_0 + \sum_i \int_{\{\vec{r}_i^0, t^0\}}^{\{\vec{r}_i, t\}} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \text{ eindeutig bis auf Konstante}$$

(ii) Lokale Formulierung

$$\text{Ein Teilchen } \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad ; \quad \text{N Teilchen: } \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$$

und: einfach zusammenhängendes Gebiet

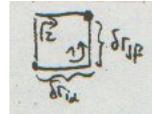
$$\begin{aligned} \text{Notwendig: Falls Potential existiert} &\Rightarrow F_{i\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}}, F_{j\beta} = -\frac{\partial U}{\partial r_{j\beta}} \\ \Rightarrow \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial r_{j\beta} \partial r_{i\alpha}} = -\frac{\partial^2 U}{\partial r_{i\alpha} \partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}} \end{aligned}$$

Hinreichend: Falls $\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$, ist $\sum_i d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ vollständiges Differential,

d.h., Linienintegrale $\int_A^B \sum_i d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ sind für verschiedene Integrationswege gleich, wenn sie sich stetig ineinander überführen lassen.



Um das zu zeigen, betrachte infinitesimal deformiertes Teilstück



$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(1)} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = F_{i\alpha} \delta r_{i\alpha} + (F_{j\beta} + \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}} \delta r_{i\alpha}) \delta r_{j\beta} \\ I_2 &= \int_{(2)} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = F_{j\beta} \delta r_{j\beta} + (F_{i\alpha} + \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} \delta r_{j\beta}) \delta r_{i\alpha} \end{aligned}$$

$\Rightarrow I_1 = I_2$, falls $\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$; damit ist Linienintegral gleich für Integrationswege, die sich durch viele infinitesimale Deformationen ineinander überführen lassen. Insbesondere lässt sich in einem einfach zusammenhängenden Gebiet jedes geschlossene Linienintegral stetig auf Null zusammenziehen \Rightarrow (i) ist erfüllt.

* Beispiele:

- Wieder Zentralkräfte:

Definition einer allgemeinen Zentralkraft: $\vec{F}(\vec{r}, t) \propto \vec{e}_r$

Wir zeigen, dass eine Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\vec{e}_r$ genau dann ein Potential hat, wenn $f(\vec{r}, t)$ nur von $|\vec{r}|$ abhängt.

$$\text{Beweis: } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (f \cdot \vec{e}_r) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{e}_r + f \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{e}_r) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}_r = \frac{1}{r}(\vec{\nabla} \times \vec{r}) + (\vec{\nabla} \frac{1}{r}) \times \vec{r} = 0 - \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f \times \vec{e}_r = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \parallel \vec{e}_r$$

$\leadsto \vec{e}_r \propto \vec{\nabla} f$ steht senkrecht auf Fläche $f = \text{const.}$

$\leadsto f = \text{const.}$ ist Kugeloberfläche $\leadsto f$ hängt nur von r ab.

- N-Teilchen-System mit Paarwechselwirkungen $\vec{f}_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

Kraftfeld $\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}$ hat Potential

$$\text{Beweis: } i \neq j: \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{j\beta}} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \Big|_{r_{ij}} \frac{(r_{i\beta} - r_{j\beta})(r_{i\alpha} - r_{j\alpha})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \frac{f}{r} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{j\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$$

$$i = j: \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial r_{i\beta}} = \sum_j \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \Big|_{r_{ij}} \frac{(r_{i\beta} - r_{j\beta})(r_{i\alpha} - r_{j\alpha})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{f}{r} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial r_{i\alpha}}$$

NB: Potential dazu:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \text{ mit } \phi(r) = \phi_0 - \int_{r_0}^r d\tilde{r} f(\tilde{r}) \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dr} = f(r)$$

$$(-\vec{\nabla}_k U = -\vec{\nabla}_k \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|))$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \{ \delta_{ki} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{ij}} \vec{\nabla}_i |\vec{r}_i - \vec{r}_j| + \delta_{kj} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{ij}} \vec{\nabla}_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{kj}} \left\{ \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \right\}$$

$$= \sum_{j \neq k} f(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \checkmark$$

1.1.4.2 Kinetische Energie

Betrachte ein N-Teilchen-System mit einem Potential, das nicht explizit von der Zeit abhängt: $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$

Dynamische Entwicklung \rightarrow Trajektorie $\{ \vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t) \}$

\rightarrow Zeitliche Änderung des Potentials $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$:

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t)) = \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \frac{d\vec{r}_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$= - \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2 = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 =: - \frac{d}{dt} T$$

Definiert $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$: Kinetische Energie

\Rightarrow Falls U nicht explizit zeitabhängig, ist die Gesamtenergie $E = T + U$ eine „Konstante der Bewegung“ \rightarrow Energieerhaltung

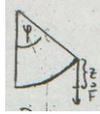
Anwendungsbeispiele

- *
- Eindimensionales System mit Potential $U(x)$

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2(E-U(x))}} dx \Rightarrow \text{Bahnkurve } x(t) \text{ aus } t = t_0 \pm \int_{x(0)}^{x(t)} dx \sqrt{\frac{m}{2(E-U(x))}}$$

- *
- Speziell: Pendel, Anfangsbedingungen $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ (zur Zeit $t = 0$)

Potentielle Energie: Schwerkraft $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\Rightarrow U = mgz = mgl(1 - \cos \varphi)$$

Kinetische Energie: $v = \dot{\varphi}l \Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}l)^2$ Energieerhaltung: $U + T = ml^2\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos \varphi)\right) = \text{const.}$
 \Rightarrow Bewegungsgleichung aus $\frac{d}{dt}(U + T) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ (vgl. 1.1.2)
Bewegungskonstante: $\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi = \text{const.}$

am Umkehrpunkt: $= \frac{g}{l} \cos \varphi_{\max}$

zur Zeit $t = 0$: $= \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi_0$

\leadsto Umkehrpunkt: $\cos \varphi_{\max} = \cos \varphi_0 - \frac{l}{2g} \dot{\varphi}_0^2$

Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})$

$$\rightarrow dt = \pm d\varphi / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}$$

Periode: $T = \int_0^T dt = 4 \int_0^{\varphi_{\max}} d\varphi / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbb{K}(\sin \frac{\varphi_{\max}}{2}) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2 + \dots\right)$$

wobei $\mathbb{K}(x) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}x^2 + \dots\right)$ vollständiges elliptisches IntegralBahnkurve: Aus Umkehrung von $t(\varphi)$

Bis zum ersten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})} \quad \left(\begin{array}{l} + : \varphi_0 > 0 \\ - : \varphi_0 < 0 \end{array} \right)$$

Erster Umkehrpunkt: $t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\pm\varphi_{\max}} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})}$

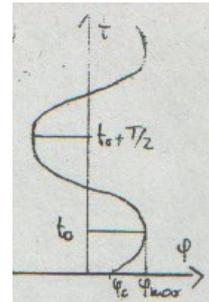
Bis zum zweiten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = t_0 \mp \int_{\pm\varphi_{\max}}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})}$$

Bis zum dritten Umkehrpunkt:

$$t(\varphi) = t_0 + T/2 \pm \int_{\mp\varphi_{\max}}^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max})}$$

etc.

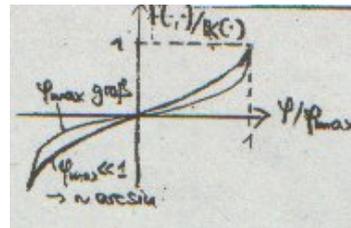


NB: $\int_0^{\varphi} d\tilde{\varphi} / \sqrt{\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_{\max}}$

$$= \sqrt{2} F\left(\arcsin\left(\frac{\sin \varphi/2}{\sin \varphi_{\max}/2}\right), \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}\right)$$

elliptisches Integral

mit Maximum: $F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}\right) = \mathbb{K}(\sin \frac{\varphi_{\max}}{2})$



1.1.4.3 Weitere Begriffe (vollständigkeitshalber)

Betrachte nun allgemeine Kraftfelder $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \cdots \dot{\vec{r}}_N, t)$ mit Trajektorien $\{\vec{r}_1(t) \cdots \vec{r}_N(t)\}$

$$* \text{ Arbeit: } W = - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \cdots \dot{\vec{r}}_N, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

(Arbeit, die in der Zeit von t_0 bis t_1 verrichtet wurde)

Falls Kraftfeld konservativ: W ist Zuwachs an potentieller Energie.

$$* \text{ Leistung: } P = \frac{dW}{dt} = - \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \cdots \dot{\vec{r}}_N, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

* Dissipatives Kraftfeld: Kraftfeld, in dem die Energie nicht erhalten ist.

(Dissipative Kraft \leadsto i.A. Reibungskraft)

Kraftfeld wird manchmal zerlegt in konservativen und dissipativen

$$\text{Anteil } \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{kons},i} + \vec{F}_{\text{diss},i} \text{ mit } \vec{F}_{\text{kons},i} = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$$

Dann gilt: $\frac{d}{dt}(U + T) = \sum_i \vec{F}_{\text{diss},i} \cdot \dot{\vec{r}}_i$ (dissipative Leistung)

$$\text{und } - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}_{\text{diss},i} \cdot \dot{\vec{r}}_i \text{ f\u00fcr geschlossene Trajektorien } \{\vec{r}_1(t_0) \cdots \vec{r}_N(t_0)\} = \{\vec{r}_1(t_1) \cdots \vec{r}_N(t_1)\}.$$

* Sonderfall: Elektromagnetische Kr\u00e4fte: Kr\u00e4fte h\u00e4ngen von Geschwindigkeit ab. Trotzdem gilt Energieerhaltung (keine Dissipation), aber nur, wenn Energie der *Felder* ber\u00fccksichtigt wird (siehe 2.1.4).

1.1.5 Erhaltungss\u00e4tze und Symmetrien

Voraussetzungen: Bezugssystem ist ein Inertialsystem,
Kr\u00e4fte haben ein Potential (Potentialkr\u00e4fte)

1.1.5.1 Homogenit\u00e4t der Zeit und Energieerhaltung

Erinnerung: In 1.1.4.2 \rightarrow Einf\u00fchrung der kinetischen Energie T \u00fcber Energieerhaltung. Falls ein Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ existiert und nicht explizit zeitabh\u00e4ngig ist, dann ist $E = U + T$ eine Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe.

N\u00e4here Betrachtung:

- Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$ charakterisiert dynamische Entwicklung des Systems
 \rightarrow legt Bewegungsgleichungen fest.
- Keine explizite Zeitabh\u00e4ngigkeit bedeutet:
 \rightarrow kein ausgezeichneter Zeitpunkt, keine absolute Zeit
 \rightarrow Bewegungsgleichungen translationsinvariant bzgl. Zeittranslationen oder „homogen in der Zeit“
- Aus der Homogenit\u00e4t der Zeit folgt: Es existiert eine Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe
 \rightarrow die Energie

Beispiel für ein allgemeineres Prinzip (\leadsto Noethersches Theorem):

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

Dabei ist eine kontinuierliche Symmetrie:

$$\text{Transformation } K_a: (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\vec{r}'_1 \cdots \vec{r}'_N, t'),$$

welche Bewegungsgleichungen invariant lässt

mit a : kontinuierlicher Parameter; $a = 0 \Leftrightarrow$ Identität

Im Fall der Homogenität der Zeit: $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t)$ hängt nicht von t ab

\rightarrow Bewegungsgleichung invariant unter

$$(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\vec{r}'_1 \cdots \vec{r}'_N, t') = (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t + a)$$

Weitere Symmetrien/Invarianzen

* Homogenität des Raumes (\rightarrow 1.1.5.2)

$$\text{Invarianz unter räumlichen Translationen } \vec{r}'_i = \vec{r}_i + a$$

\rightarrow Impulserhaltung

* Isotropie des Raumes (\rightarrow 1.1.5.3)

$$\text{Invarianz unter Drehungen } \vec{r}'_i = \mathcal{D}_a(\vec{r}_i) \quad (\mathcal{D}_0 = \mathbb{1})$$

\rightarrow Drehimpulserhaltung

* Eichinvarianz im elektromagnetischen Feld

(nicht in dieser Vorlesung)

\rightarrow Ladungserhaltung

Allgemeine Voraussetzungen für Symmetrien

Abgeschlossenes System: N Teilchen, keine bzw. fast keine Wechselwirkungen mit der Außenwelt.

Dann gilt: Bewegungsgleichungen bleiben invariant unter allgemeiner

$$\text{Galileitransformation } \vec{r}'_{\Sigma} = \mathcal{D} \vec{r}_{\Sigma} + \vec{d}_0 + \vec{v}_0 t_{\Sigma}, t_{\Sigma} = t_{\Sigma} + t_0$$

Daraus folgen Erhaltungssätze:

$$t_0 \rightarrow \text{Invarianz unter Zeittranslationen} \rightarrow \text{Energie} \quad (1.1.5.1)$$

$$\vec{d}_0 + \vec{v}_0 t_{\Sigma} \rightarrow \text{Invarianz unter Raumtranslationen} \rightarrow \text{Impuls} \quad (1.1.5.2)$$

$$\mathcal{D} \rightarrow \text{Invarianz unter Drehungen} \rightarrow \text{Drehimpuls} \quad (1.1.5.3)$$

1.1.5.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung

Homogenität des Raumes:

In einem abgeschlossenen System sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation $(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\vec{r}_1 + \vec{a} \cdots \vec{r}_N + \vec{a}, t)$

(Es gibt keinen ausgezeichneten Raumpunkt).

Daraus folgt:

$$\text{NR: } U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) = U(\vec{r}_1 + \vec{a} \cdots \vec{r}_N + \vec{a}, t) \quad \forall \vec{a} \Rightarrow \frac{d}{da_{\alpha}} U(\vec{r}_1 + \vec{a} \cdots \vec{r}_N + \vec{a}, t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial U}{\partial a_{\alpha}} \Big|_{a_{\alpha}=0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}} \frac{d(r_{i\alpha} + a_{\alpha})}{da_{\alpha}} \Big|_{a_{\alpha}=0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial r_{i\alpha}} = - \sum_i F_{i\alpha} = - \sum_i \dot{p}_{i\alpha} = - \frac{d}{dt} \sum_i p_{i\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

⇒ Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ ist eine Erhaltungsgröße.

Folgerung: Schwerpunktsatz

Gegeben ein System von N Teilchen, Massen m_i

Definiere Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$, Gesamtmasse $M = \sum m_i$

Falls das System abgeschlossen ist, gilt $\dot{\vec{R}} = \vec{P}/M = \text{const.}$

- * Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit \vec{P}/M
- * Das Schwerpunktsystem, in dem \vec{R} am Ursprung sitzt, ist ein Inertialsystem (d.h. $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}(t)$ ist eine Galileitransformation)

1.1.5.3 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Isotropie des Raumes:

In einem abgeschlossenen System sind die Bewegungsgleichungen invariant unter $(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) \rightarrow (\mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_1 \dots \mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_N, t)$

($\mathcal{D}_{\vec{a}}$: Drehung mit Drehachse $\frac{\vec{a}}{a}$ und Drehwinkel $|\vec{a}|$)

(Es gibt keine ausgezeichnete Raumrichtung).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) &= U(\mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_1 \dots \mathcal{D}_{\vec{a}} \vec{r}_N, t) \quad \forall \vec{a} \\
 \text{Speziell } |\vec{a}| \rightarrow 0 \text{ (infinitesimal): } \mathcal{D}_{\vec{a}} &\approx [\mathbb{1} + \vec{a} \times] \quad (\text{nach 1.1.3.2}) \\
 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} U(\vec{r}_1 + \vec{a} \times \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N + \vec{a} \times \vec{r}_N, t) \Big|_{\vec{a}=0} &= 0 \\
 \Rightarrow 0 = \sum_i \sum_{\beta(x,y,z)} \frac{\partial U}{\partial r_{i\beta}} \frac{d}{d\alpha} [r_{i\beta} + (\vec{a} \times \vec{r}_i)_\beta] &= - \sum_{i\beta} F_{i\beta} \frac{d}{d\alpha} \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta\beta} a_\gamma r_{i\delta} = - \sum_{i\beta\gamma\delta} F_{i\beta} \varepsilon_{\gamma\delta\beta} \delta_{\alpha\gamma} r_{i\delta} \\
 &= - \sum_{i\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\delta\beta} r_{i\delta} F_{i\beta} = - \sum_{i\beta\delta} \varepsilon_{\delta\beta\alpha} r_{i\delta} F_{i\beta} = - \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)_\alpha = - \sum_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i)_\alpha \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) &= \underbrace{\sum_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i)}_{0 \text{ wegen oben}} + \underbrace{\sum_i (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i)}_{0 \text{ weil } \dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{p}_i} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const.}
 \end{aligned}$$

⇒ Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ ist eine Erhaltungsgröße.

Allgemeiner gilt: Falls in einem System keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, gilt Drehimpulserhaltung.

Beispiel: Ein Teilchen im Zentralpotential $U(r)$

→ Keine Impulserhaltung (da Ort ausgezeichnet), aber Drehimpulserhaltung (keine ausgezeichnete Richtung) $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$

Folgerungen:

- (i) Bahn $\vec{r}(t)$ ist immer in einer Ebene ($\vec{r}(t) \perp \vec{l}$)

(ii) „Flächensatz“: $\vec{r}(t)$ überstreicht zu gleichen Zeiten gleiche Flächen



$$\begin{aligned} \text{(Fläche } A(\Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} |d\vec{A}| = \int_t^{t+\Delta t} \left| \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \right| dt \\ &= \frac{1}{2m} \int_t^{t+\Delta t} \underbrace{|\vec{r} \times \vec{p}|}_l dt = \frac{l}{2m} \Delta t \end{aligned}$$

1.1.5.4 Skaleninvarianz und Virialsatz

Skaleninvarianz: Eine weniger allgemeine Symmetrie

Angenommen, Potential hat Eigenschaft $U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) = \alpha^K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

Beispiele:

- Gravitationskraft: $U = \sum_{i \neq j} \gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$
 $\rightarrow U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) = \alpha^{-1} U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$
- gekoppelte Oszillatoren: $U = \sum_{ij} k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$
 $\rightarrow U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) = \alpha^2 U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)$

\rightarrow Bewegungsgleichungen sind invariant unter Skalentransformation der Form

$$(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \longrightarrow (\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N, \alpha^{1-\frac{K}{2}} t)$$

(kontinuierliche Symmetrie K_a mit $\alpha = e^a$; Identität bei $a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$)

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) &= \frac{d}{d\alpha} [\alpha^K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N)] = K \alpha^{K-1} U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N) \\ \frac{d}{d\alpha} U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) &= \sum_i \vec{\nabla}_i U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) \cdot \frac{d(\alpha \vec{r}_i)}{d\alpha} = \sum_i \vec{\nabla}_i U(\alpha \vec{r}_1 \cdots \alpha \vec{r}_N) \cdot \vec{r}_i \\ (\alpha=1) \quad K U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N) &= \sum_i \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N) \cdot \vec{r}_i = - \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i = - \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \vec{p}_i &= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i}_{-K \cdot U} + \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \vec{p}_i}_{m_i \dot{\vec{r}}_i^2} = -K U + 2T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \vec{p}_i) = -K U + 2T}$$

Kein richtig „brauchbarer“ Erhaltungssatz $(\sum \vec{r}_i \vec{p}_i + \int_0^t d\tau (KU - 2T) = \text{const.})$

Aber: Es gibt nützliche Folgerung für zeitliche Mittelwerte $\langle \bullet \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \bullet$

Falls System räumlich beschränkt $\Rightarrow \sum \vec{r}_i \vec{p}_i$ endlich $\Rightarrow \int_0^t d\tau (KU - 2T)$ endlich $\forall t$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T d\tau (KU - 2T) = \lim_{T \rightarrow \infty} T[K \langle U \rangle - 2 \langle T \rangle] \text{ endlich} \Rightarrow K \langle U \rangle - 2 \langle T \rangle = 0$$

\Rightarrow Virialsatz:

Für räumlich beschränkte Systeme gilt

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{K}{2} \langle U \rangle}$$

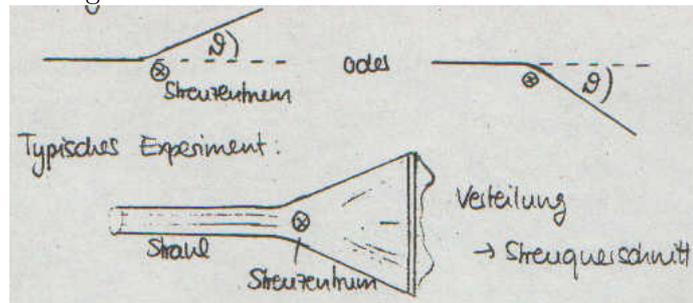
1.2 Anwendung: Das Zweikörperproblem

Wichtiger Spezialfall: „Abgeschlossenes“ System aus zwei Teilchen

→ Potential: $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, Massen m_1, m_2

Besondere Bedeutung

- In allgemeiner Form lösbar
(ist ab drei Körpern schon nicht mehr möglich)
- Beschreibt in guter Näherung
 - * Planetenbahnen (Keplerproblem: Sonne-Planet)
 - * Streuung an einem Teilchen



erlaubt Rückschlüsse auf Lage des Streuzentrums und auf Form des Potentials (nicht eindeutig)

Vorbemerkungen

Es gilt

- Impulserhaltung: $m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \text{const.}$
→ Schwerpunktsatz
- Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \text{const.}$
- Drehimpulserhaltung: $\vec{r}_1 \times (m_1\dot{\vec{r}}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2\dot{\vec{r}}_2) = \text{const.}$

Definiere Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

1.2.1 Reduktion auf ein eindimensionales Problem

1.2.1.1 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

- Impulserhaltung und Schwerpunktsatz

→ Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$ bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit

Gesamtimpuls $\vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const.}$

Nutze diese Information aus: Die Bewegungsgleichungen sind für eine Linearkombination von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 schon gelöst. Brauche nur noch eine weitere Kombination zu betrachten.

- Naheliegende Wahl für zweite Kombination ergibt sich aus Form des Potentials $U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$: Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Dann ist $U = U(|\vec{r}|)$

Umrechnung:

$$\begin{aligned} & \boxed{\begin{matrix} \vec{R} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{matrix}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -\frac{m_2}{M} \end{pmatrix} \\ & \leadsto \boxed{\begin{matrix} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{matrix}} \end{aligned}$$

1.2.1.2 Bewegungsgleichungen für Relativkoordinaten

Herleitung über Energieerhaltung

- Potentielle Energie: $U = U(r)$
- Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2$

muss noch in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ausgedrückt werden

$$\text{Dazu: Matrixschreibweise } T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_2/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_2/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \quad \text{und } \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m_2/M & -m_1/M \end{pmatrix} \\ \leadsto T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{r} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m_2/M & -m_1/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m_2/M \\ 1 & -m_1/M \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m_1m_2/M \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m_1m_2/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{r}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

$$\text{mit der reduzierten Masse: } \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\leadsto \text{Gesamtenergie: } E = T + U = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = \text{const.}$$

Wegen $\dot{R} = \text{const.}$ gilt: $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) \right] = \mu\dot{r}\ddot{r} + \vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}[\mu\dot{r} + \vec{\nabla}U] \equiv 0 \quad (\text{immer!}) \Rightarrow \mu\dot{r} + \vec{\nabla}U \equiv 0$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } \mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U$$

Die Relativbewegung ist identisch mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes der reduzierten Masse μ im Potential $U(r)$.

\Rightarrow Problem reduziert auf Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential $U(r)$

$$\text{Kraft (vgl. 1.1.4): } \underline{\text{Zentralkraft}} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\vec{\nabla}|\vec{r}| = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

1.2.1.3 Bewegung im Zentralpotential

Vorbemerkung: Da $U(r)$ Zentralpotential, ist nach 1.1.5.3 der Relativdrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times (\mu \dot{\vec{r}})$ erhalten.

(NB: Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \vec{r}_1 \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{l} + \vec{R} \times (M \dot{\vec{R}})$
[Beweis: Einsetzen])

Folgerung: Fallunterscheidung

(i) $\vec{l} \equiv 0 \Rightarrow \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$  \vec{r} bewegt sich auf Geraden durch Ursprung.

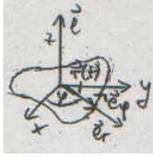
→ Eindimensionale Bewegung: $\mu \ddot{r} = -\frac{dU}{dr}$

(ii) $\vec{l} \neq 0 \Rightarrow$ wegen $\vec{l} \propto \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ist $\vec{r} \perp \vec{l}$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{l}$

$\leadsto \vec{r}(t)$ liegt in Ebene senkrecht zu \vec{l} durch Ursprung (vgl. 1.1.5.3)

→ Ebene Bewegung

Benutze Zylinderkoordinaten, z-Achse Richtung

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \vec{e}_r \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} &= r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = r \dot{\varphi} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}}^2 &= (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)^2 = \underbrace{\dot{r}^2}_1 + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{\vec{e}_\varphi^2}_1 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Nutze Drehimpulserhaltung aus: $\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = l \vec{e}_z = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \Rightarrow \dot{\varphi} = l / \mu r^2$

Nutze Energieerhaltung aus:

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mu r^2}{2} \dot{\varphi}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}}(r) := U(r) + l^2 / 2\mu r^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \right) = \mu \dot{r} \ddot{r} + \dot{r} \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0$$

→ Bewegungsgleichung: $\mu \ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}$

Zusammenfassung von (i) und (ii): Bewegung der Relativkoordinate $\vec{r}(t)$

- Ebene Bewegung in Ebene senkrecht zu \vec{l} durch Ursprung.

(bzw. falls $\vec{l} = 0$: Eindimensionale Bewegung auf Geraden $\parallel \vec{r}$)

- Betrag von \vec{r} bewegt sich wie eindimensionale Masse μ im effektiven Po-

tential $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + l^2 / 2\mu r^2 \quad \leadsto$ Radialgleichung: $\mu \ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}$

- Winkelkoordinate folgt aus $l = \mu |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$

in Polarkoordinaten mit $\vec{l} \parallel \vec{e}_z$, $\vec{r} = r(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$:

1.2.1.4 Integration der Bewegungsgleichungen

- Radialgleichung:

Über Energie: $E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt} \rightsquigarrow dt = \pm dr / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \pm \int_{r_0}^r d\tilde{r} / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))} = t(r)} \quad \text{Implizite Gleichung für } r(t)$$

- Winkelgleichung:

Über $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \dot{r} = \pm \frac{d\varphi}{dr} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{\mu r^2} / \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))} \rightsquigarrow d\varphi = \pm dr \cdot l / r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \pm \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{l}{\tilde{r}^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))}}}$$

1.2.2 Das Kepler-Problem

Wichtigster Spezialfall des Zweikörperproblems:

Potential der Form $\boxed{U(r) = -\alpha/r}$

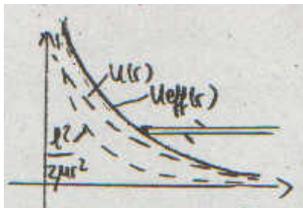
Beispiele: Gravitationskraft: $U(r) = \gamma m_1 m_2 / r$

Coulombkraft: $U(r) = q_1 q_2 / r$

1.2.2.1 Qualitative Analyse des Kepler-Problems

Betrachte das effektive Potential $U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

* **Fall** $\alpha < 0$ (Potential $U(r)$ abstoßend)

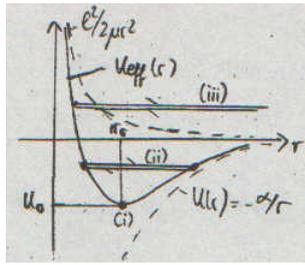


Nur Energien $E > 0$
möglich

Alle Bahnen ungebunden



* **Fall** $\alpha > 0$ (Potential $U(r)$ anziehend)



Minimum:
 $r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$
 $U_0 = -\frac{\mu\alpha}{2l^2}$

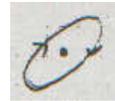
Energie E muss größer als U_0 sein

Mögliche Bahnen:

(i) $E = U_0 : r(t) \equiv r_0 \rightarrow$ Kreisbahn



(ii) $U_0 < E < 0 : r(t)$ bleibt beschränkt
 \leadsto gebundene (geschlossene) Bahn



(ii) $E > 0 : r(t)$ reicht ins Unendliche
 \leadsto ungebundene Bahn



1.2.2.2 Semiquantitative Analyse

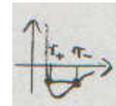
Betrachte Bewegung mit Energie E

Bestimme maximale und minimale Entfernung vom Ursprung

$$\leadsto E = U_{\text{eff}}(r) \Rightarrow E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l}{2\mu r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \left(1 \pm \frac{2El^2}{\mu\alpha^2} \right)$$

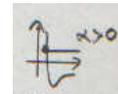
Fälle: (i) $U_0 < E < 0$ ($\alpha > 0$)

$\leadsto r_+$ und r_- reell und positiv
 \leadsto Zwei Umkehrpunkte, gebundene Bahn

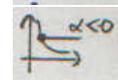


(ii) $E > 0$ ($\alpha \geq 0$)

$\leadsto r_+$ positiv, r_- negativ \leadsto unphysikalische Lösung



\leadsto Nur ein Umkehrpunkt, ungebundene Bahn



1.2.2.3 Quantitativ: Integration der Bewegungsgleichungen

Benutze Winkelgleichung $\varphi = \pm \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{l}{\tilde{r}^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(\tilde{r}))}}$

Vereinfachung: $E - U_{\text{eff}}(r) = E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}$ ist quadratisch in $\frac{1}{r}$, Nullstellen $\frac{1}{r_{\pm}}$

Vorfaktor vor $\frac{1}{r^2}$ ist $-\frac{l^2}{2\mu} \Rightarrow E - U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu} (\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+})(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-})$

Variablentransformation: $\tilde{r} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow d\tilde{r}/\tilde{r}^2 = d\tau$

Einsetzen: $\varphi = \mp \int_{1/r_0}^{1/r} d\tau / \sqrt{(\tau - \frac{1}{r_+})(\tau - \frac{1}{r_-})} = \varphi_0 \mp \arccos \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}}{(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-})}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)}_{=: 1/p} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)}_{=: \varepsilon/p} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Definiere p und ε und setze ein (s.o.) $\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{\mu\alpha}{l^2} (1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}})$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{mit} \quad \boxed{p = \frac{l^2}{\mu\alpha}}; \quad \boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$$

\rightsquigarrow Gleichung in Polarkoordinaten für Kegelschnitt, dessen Brennpunkt im Ursprung liegt.

$p \hat{=}$ „Parameter“

$\varepsilon \hat{=}$ „Exzentrizität“

$\varphi = \varphi_0 \hat{=}$ „Perihel“

r liegt Zentrum am nächsten

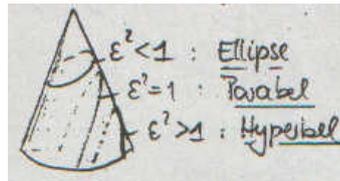


Illustration durch Umrechnung in kartesische Koordinaten

Einfachheitshalber $\varphi_0 = 0$

$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$p = r + \varepsilon \underbrace{r \cos \varphi}_x \rightsquigarrow (p - \varepsilon x)^2 = r^2 = x^2 + y^2 \rightsquigarrow y^2 + x^2(1 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon px - p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \neq 1 : y^2 \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{p^2} \right) + \left(x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{p} \right)^2 = 1 \\ \varepsilon = 1 : y^2 = p^2 - 2px \end{cases}$$

Fallunterscheidung

(i) $\varepsilon^2 < 1$ ($E < 0$) \rightarrow Gleichung der Form $(\frac{y}{a})^2 + (\frac{x+x_0}{b})^2 = 1$

\rightsquigarrow Ellipsen-Bahn mit Halbachsen a und b



$$a = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$b = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

Speziell: Berechne Umlaufzeit aus Flächensatz (1.1.5.3)

Überstrichene Fläche pro Zeit dt : $dA = \frac{l}{2\mu} dt$

Gesamtfläche: $A = \pi ab$

$$\Rightarrow \text{Umlaufzeit: } T = \frac{2\mu}{l} A = \pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$$

- T hängt nicht vom Drehimpuls l ab
- $T^2 \propto |E|^{-3} \propto b^3$: Drittes Keplersches Gesetz

(ii) $\varepsilon^2 = 1$ ($E = 0$) → Gleichung $x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$

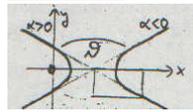
→ Parabel



ungebunden, Geschwindigkeit verschwindet im Unendlichen.

(iii) $\varepsilon^2 > 1$ ($E > 0$) → Gleichung der Form $-(\frac{y}{a})^2 + (\frac{x-x_0}{b})^2 = 1$

→ Hyperbel mit Halbachsen a und b



$$a = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}} \quad , \quad b = |\alpha|/2E$$

ungebundene Bahn, am Potential abgelenkt um ϑ mit $\tan \vartheta = b/a$

⇒ Ablenkwinkel:
$$\vartheta = 2 \cdot \arctan \sqrt{\frac{\mu \alpha^2}{2El^2}}$$

1.2.2.4 Rückrechnung auf absolute Koordinaten

- Im Schwerpunktsystem ($\vec{R}(t) \equiv 0$)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \vec{r}(t) \cdot m_2/M \\ \vec{r}_2(t) &= -\vec{r}(t) \cdot m_1/M \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bahnen von } \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ gleiche} \\ \text{Form wie } \vec{r}(t), \text{ nur reskaliert} \end{array}$$

Beispiel gebundene Bahnen (Ellipsen)



Falls Massen sehr unterschiedlich, z.B. Planetenbahn: $m_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}}$:

→ Große Masse steht nahezu (sehr enge Bahn)

→ Beinahe „echtes“ Zentralkraftproblem

$$\text{mit reduzierter Masse } \mu = \frac{m_{\text{Planet}} m_{\text{Sonne}}}{m_{\text{Planet}} + m_{\text{Sonne}}} \approx m_{\text{Planet}}$$

- In beliebigem System ($\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{P}/M \cdot t$)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \vec{r}(t) \cdot m_2/M + \vec{R}(t) \\ \vec{r}_2(t) &= -\vec{r}(t) \cdot m_1/M + \vec{R}(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Addiere gleichförmige Bewe-} \\ \text{gung zu } \vec{r}(t) \text{ dazu} \end{array}$$

Bemerkung: In jedem Inertialsystem sind beide Massen zur Zeit $t = \pm\infty$ im Unendlichen; selbst bei sehr großem Massenunterschied lässt sich kein Inertialsystem finden, in dem die schwerere Masse asymptotisch ruht. Eigenart der langen Reichweite des Potentials $-\alpha/r$.

(Beweis: Übungsaufgabe)

1.2.3 Elastische Streuung von Teilchen

Betrachte nun beliebiges Potential $U(r)$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$

Frage: Wie werden ungebundene Teilchen aneinander abgelenkt?

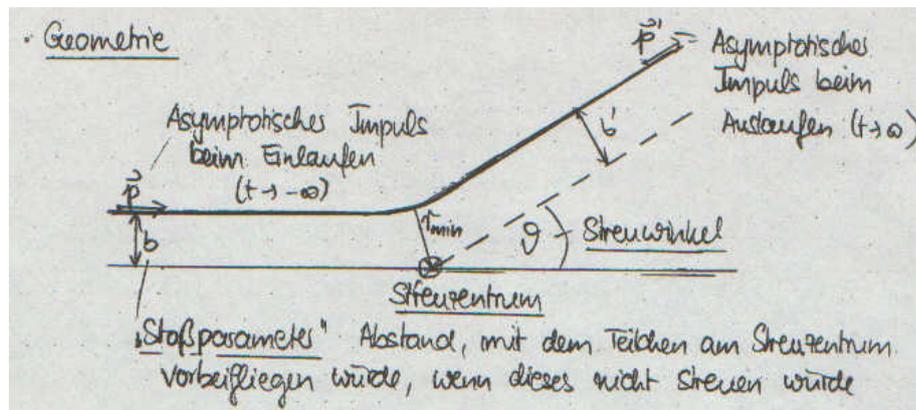
NB: Elastische Streuung, da Energieerhaltung gilt.

(Bei der inelastischen Streuung geht Energie verloren, z.B. durch Reibung.)

Vorweg: Rückführung auf Einteilchenproblem gemäß 1.2.1.

1.2.3.1 Streuung eines einzelnen Teilchens im Zentralpotential

- Geometrie



Der „Stoßparameter“ b ist der Abstand, mit dem das Teilchen am Streuzentrum vorbeifliegen würde, wenn dieses nicht streuen würde.

- Grundsätzlich gilt:

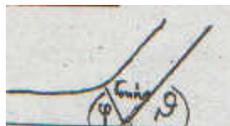
Energieerhaltung: $E = \text{const.} = \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow -\infty: p^2/2\mu \\ t \rightarrow +\infty: p'^2/2\mu \end{array} \right\} \Rightarrow p = p'$

Drehimpulserhaltung: $\vec{l} = \text{const.} = \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow -\infty: \vec{r}(t) \times \vec{p} \\ t \rightarrow +\infty: \vec{r}(t) \times \vec{p}' \end{array} \right\}$

\leadsto Bahn liegt in einer „Streuebene“, aufgespannt von \vec{p} und \vec{p}'

\leadsto Betrag von l : $l = bp = b'p' \Rightarrow b = b'$

- Streuwinkel ϑ hängt vom Stoßparameter b ab:



Berechnung nach 1.2.1.4: $\vartheta = \pi - 2\varphi$

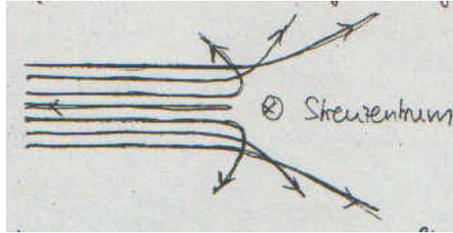
mit $\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} l / \sqrt{2\mu(E - U(\tilde{r}) - l^2/2\mu\tilde{r}^2)}$

Mit $l = bp$, $E = \frac{p^2}{2\mu}$ folgt:

$$\vartheta(b) = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} \frac{b}{\sqrt{1 - 2\mu U(\tilde{r})/p^2 - b^2/\tilde{r}^2}}$$

1.2.3.2 Streuung eines Strahls von Teilchen

- In der Praxis (Streuexperiment) typischerweise viele Streueignisse
 ~> Streuung eines „Strahls“ von gleichartigen Teilchen
 ~> Information über die Eigenschaften des Streupotentials



* Charakterisierung durch „Streuquerschnitt“:

Zahl der Teilchen, die in einem bestimmten Winkelbereich gestreut werden, pro einlaufendem Teilchenstrom

- Einfallender Strahl

$$\text{Teilchenstromdichte } J = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Querschnittsfläche } A_0}$$



- Auslaufende Teilchen

Impulse \vec{p}' mit $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$
 ~> Kugel von möglichen Richtungen $\vec{p}'/|\vec{p}'|$



Teilbereich von Impulsen \vec{p}' wird durch „Raumwinkel“ charakterisiert: „Flächenanteil“ auf Einheitskugel von möglichen $\vec{p}'/|\vec{p}'|$.

Infinitesimaler Raumwinkel: $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$



- Differentieller Streuquerschnitt

Charakterisiert Zahl der Teilchen dN pro Zeit, die in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden, normiert mit der Teilchenstromdichte:

$$dN = d\Omega \cdot J \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$: Differentieller Streuquerschnitt, Eigenschaft des Streupotentials

- Totaler Streuquerschnitt

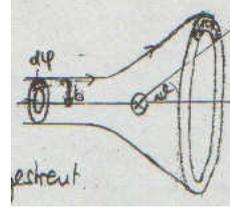
Charakterisiert Zahl der insgesamt gestreuten Teilchen pro Zeit

(in beliebige Raumwinkel) $\sigma := \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$

* Zusammenhang zwischen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\theta(b)$ (in 3 Dimensionen)

- Für gegebenes Potential $U(r)$ sei Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Stoßparameter bekannt: $\vartheta(b)$

- Anzahl der Teilchen
mit Stoßparameter in $[b, b + db]$
und Azimutwinkel in $[\varphi, \varphi + d\varphi]$:
 $dN = J b db d\varphi$



- Diese Teilchen werden in Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta |d\vartheta d\varphi|$ gestreut

(i) Falls $\vartheta(b)$ eindeutig umkehrbar ist: $b(\vartheta)$

$$\leadsto dN = J b db d\varphi = d\Omega J \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sin \vartheta |d\vartheta d\varphi| J \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

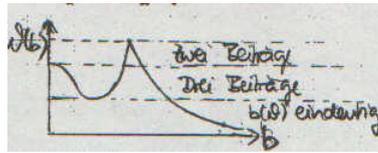
$$\Rightarrow \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \cdot \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \right|$$

(ii) Falls es zu einem gegebenen ϑ mehrere b gibt

\leadsto mehrere Stoßparameterbereiche streuen in den gleichen Winkelbereich

\leadsto Beiträge (b_α =Lösungen von $\vartheta(b_\alpha) = \vartheta_0$) müssen aufsummiert werden:
 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{b_\alpha} \frac{b_\alpha(\vartheta)}{\sin \vartheta} \cdot \left| \frac{db_\alpha}{d\vartheta} \right|$

Beispiel:



(iii) Spezialfälle:

(1) $\frac{d\vartheta}{db} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$ „Regenbogenstreuung“

(2) $\sin \vartheta = 0, \quad b \neq 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$ „Glory“, „Rückwärtsstreuung“

(3) $\sin \vartheta = 0, \quad b = 0 \Rightarrow$ jedes $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ möglich!

* Beispiel: Streuung an einer harten Kugel des Radius R .

Berechnung von $\theta(b)$ und $b(\theta)$ (siehe Graphik)

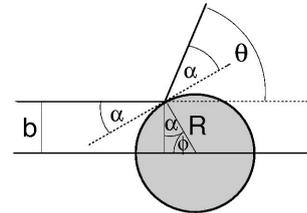
$$b(\varphi) = R \sin(\varphi) \text{ mit } \varphi \in [0 : \pi/2].$$

$$\text{Reflexionswinkel } \alpha = \pi/2 - \varphi; \quad \theta = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \theta(b) = \pi - 2\varphi = \pi - 2\arcsin(b/R)$$

$$\Rightarrow b(\theta) = R \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$



Differentieller Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin(\theta)} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$:

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{2} \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{\sin \theta} = \frac{R^2}{4}.$$

Totaler Streuquerschnitt:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2: \text{ Querschnitt der Kugel}$$

* Anschauliche Interpretation des totalen Streuquerschnitts:

Bei Streuung an harten Körpern: Querschnittsfläche, die dem Strahl zugewandt ist \rightarrow Teilchen, die auf diese Fläche treffen, werden gestreut.

Allgemein (weiche Potentiale): "Effektive Fläche", d.h. Querschnittsfläche eines äquivalenten harten Körpers, der genauso viele Teilchen herausstreuen würde wie das betrachtete weiche Potential.

1.2.3.3 Rutherfordstreuung

Streuung speziell an einem Potential der Form $U(r) = -\alpha/r$
(z.B. Streuung an geladenen Teilchen)

Zusammenhang $\vartheta(b)$ bekannt aus 1.2.2.3:

$$\vartheta = 2 \arctan \sqrt{\frac{\mu\alpha^2}{2El^2}} \text{ mit } l = bp, E = \frac{p^2}{2\mu} \Rightarrow \boxed{\vartheta = 2 \arctan \frac{|\alpha|}{2Eb}}$$

$$\leadsto b(\vartheta) = \frac{|\alpha|}{2E} \cdot \frac{1}{\tan(\vartheta/2)}, \quad \frac{db}{d\vartheta} = \frac{|\alpha|}{4E} \cdot \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}$$

\Rightarrow Differentieller Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin\vartheta} \cdot \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|$ durch Einsetzen:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\alpha|^2}{16E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}}$$

\Rightarrow Totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\alpha|^2}{4E^2} \pi \int_0^\pi d\theta \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \rightarrow \infty$$

Divergiert, praktisch alle Teilchen werden gestreut.

Weitere Folge davon, dass Kräfte langreichweitig sind.

Kapitel 2

Grundbegriffe der Elektrodynamik

Historisches

- Antike **Altägyptisch (Kahun Papyri); Indisch (Veden); China; Griechenland (Thales von Milet)**
Reibungselektrizität von Bernstein (griechisch: "Elektron").
Magnetismus von Magnetit (griechisch "Stein aus Magnesia").
- 1600 **William Gilbert**
Erste neuzeitliche Abhandlung über Magnetismus und Reibungselektrizität ("de magnete").
- 1729 **Stephen Gray**
Elektrizität kann fließen.
- 1782 **Benjamin Franklin**
Ladung bleibt erhalten.
- 1767 **Joseph Priestley**
Elektrostatische Kräfte zwischen Ladungen fallen wie $1/r^2$ ab.
(deskriptiv, Analogie zur Gravitation).
- 1785 **Charles-Augustin de Coulomb**
Coulombgesetz (Kraft zwischen Ladungen $F \sim q_1 q_2/r^2$).
Magnetostatik.
- 1800 **Alessandro Volta**
Erste chemische Stromquelle.
- ~ 1800 **Michael Faraday**
Erstmals begriff des *Feldes* (statt Fernwirkung).
Anschauung: zugrundeliegender "Äther" (elastisches Medium).
- 1813 **Siméon-Denis Poisson**
Poisson-Gleichung (für das elektrostatische Potential).
↪ mit Ladungserhaltung vollständige Theorie der Elektrostatik

- 1820 **Hans Christian Ørsted**
Elektrischer Strom kann Magnetfelder produzieren.
↪ Erste Verbindung zwischen Elektrizität und Magnetismus.
- 1820 **André-Marie Ampère**
quantitativ dazu: Ampère-Gesetz
- 1831 **Michael Faraday**
Magnetismus kann elektrischen Strom erzeugen.
(Faradaysches Induktionsgesetz).
- 1861-
1864 **James Clerk Maxwell**
Maxwell-Gleichungen.
Abgeschlossene Theorie der Elektrodynamik, Bis heute gültig.

2.1 Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Es soll nun ohne weitere Vorrede gleich die vollständigen Grundgleichungen der Elektrodynamik eingeführt werden.

Gegenstand der Elektrodynamik, bzw. physikalische Objekte, mit denen sich die Elektrodynamik beschäftigt, sind:

- **Felder:** $\vec{E}(\vec{r}, t)$: **Elektrisches Feld**
 $\vec{B}(\vec{r}, t)$: **Magnetisches Feld**
- **Ladungen:** Punktladungen q bzw. Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$.

Es gilt Ladungserhaltung: Ladung kann nicht irgendwo entstehen oder verschwinden, sondern muß immer hin- oder abfließen.

⇒ Es muß eine **Stromdichte** $\vec{j}(\vec{r}, t)$ geben, so daß für die Gesamtladung Q in einem Gebiet G mit Oberfläche ∂G gilt ($Q = \int_G dV \rho(\vec{r}, t)$):

$$\frac{d}{dt}Q = \int_G dV \partial_t \rho \stackrel{!}{=} - \int_{\partial G} d\vec{A} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} - \int_G dV \nabla \cdot \vec{j}.$$

Da dies für *alle* möglichen Gebiete gelten muß, folgt

Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Konkret: Für ein System von Punktladungen q_i an den Orten \vec{r}_i ist

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \text{ und}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

(↪ $\vec{j} = \rho \langle \vec{v} \rangle$ mit $\langle \vec{v} \rangle$: Mittlere Ladungsgeschwindigkeit).

2.1.1 Die Gleichungen

– Maxwellgleichungen im Vakuum:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

inhomogene
Maxwellgleichungen

homogene
Maxwellgleichungen

– **Lorentzkraft** auf Punktladung q der Geschwindigkeit \vec{v} bzw. **Kraftdichte** auf Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \quad \text{bzw.} \quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B})$$

Mit der Zusatzbedingung, dass \vec{E} und \vec{B} im Unendlichen verschwinden sollen, ist dieses Gleichungssystem vollständig, wegen des **Helmholtzschen Satzes**: Ein Vektorfeld, das im Unendlichen verschwindet, ist durch seine Divergenz und Rotation eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Hier verwenden wir das Gaußsche Maßsystem.

Allgemeiner lauten die Grundgleichungen der Elektrodynamik:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{k_1} \rho & \nabla \times \vec{E} = -\frac{k_2}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{k_1 k_2 c} \vec{j} + \frac{1}{c k_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

und Lorentzkraft: $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{k_2}{c}(\vec{v} \times \vec{B}))$.

Vorfaktoren k_i in gebräuchlichen Maßsystemen:

Maßsystem	k_1	k_2	Ladungseinheit
Gauß	1	1	[Masse] ^{1/2} [Länge] ^{3/2} /[Zeit]
Heaviside-Lorentz	4π	1	[Masse] ^{1/2} [Länge] ^{3/2} /[Zeit]
Elektrostatische Einheiten (esE)	1	c	[Masse] ^{1/2} [Länge] ^{3/2} /[Zeit]
Elektromagnetische Einheiten (emE)	$1/c^2$	c	[Masse] ^{1/2} [Länge] ^{1/2}
SI Einheiten	$4\pi\epsilon_0$	c	As

mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{A}^2 \text{s}^4 / \text{kg m}^3$

Hintergrund: Unterschiedliche Einheiten für \vec{E} , \vec{B} und Ladung.

Darüberhinaus unterscheiden sich i.A. auch noch die Einheiten für Masse, Länge und Zeit (z.B. cm,g,s statt m,kg,s).

2.1.2 Diskussion der Maxwell'schen Gleichungen

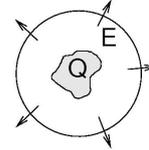
1) Bedeutung der statischen Terme

Betrachte Situation, in der die Felder und Dichten stationär sind, d.h. $\partial_t \vec{E} = \partial_t \vec{B} = \partial_t \rho = \partial_t \vec{j} = 0$.

(i) $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Leftrightarrow$ Gaußsches Gesetz

$$\int_{\text{Oberfläche } \partial V \text{ eines Volumens } V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi \underbrace{Q_V}_{\text{eingeschlossene Ladung}}$$

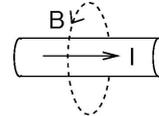
(Verbindung: Gaußscher Satz)



(ii) $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Leftrightarrow$ Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\text{Kurve } C, \text{ die eine Fläche } O \text{ umschließt}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{I}_{\text{Strom durch Fläche } O}$$

(Verbindung: Stokescher Satz)



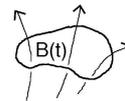
(iii) $\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert Potential Φ mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$
Zusammen mit (i) folgt Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$.

(iv) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert Vektorpotential \vec{A} mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
(mehr dazu später).

2) Bedeutung der zeitabhängigen Terme

(i) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \Leftrightarrow$ Faradaysches Induktionsgesetz

$$\int_{\text{Leiterschleife}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}$$



mit Φ_m : magnetischer Fluss durch Leiterschleife, $\Phi_m = \int d\vec{A} \cdot \vec{B}$

(Verbindung: Stokescher Satz)

(ii) $\nabla \times \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$: Maxwell'scher Verschiebungsstrom
Zusatzterm gewährleistet Ladungserhaltung.

$$(4\pi\rho = \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow \partial_t \rho = \frac{1}{4\pi} \partial_t \nabla \cdot \vec{E})$$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B})}_0 - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \partial_t \vec{E}}_{\text{Beitrag von Zusatzterm}}$$

$$\Rightarrow \partial_t + \nabla \cdot \vec{j} = 0: \quad \text{Gilt nur bei Anwesenheit des Zusatzterms.}$$

2.1.3 Energie und Impuls

In der Mechanik waren zentrale Begriffe die Energie und der Impuls.

Frage: Wie sieht das hier in der Elektrodynamik aus?

Gibt es erhaltene Größen, die man mit Energie bzw. Impuls identifizieren könnte?

2.1.3.1 Der Energiesatz der Elektrodynamik

Ausgangspunkt: Energiebilanz für *Teilchen* im elektromagnetischen Feld.

Auf Teilchen wirkt Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}))$

bzw. auf Ladungsverteilung ρ die Kraftdichte $\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})$

→ verrichtet Leistung $\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \underbrace{\vec{v}(\vec{v} \times \vec{B})}_0 = q \vec{v} \cdot \vec{E}$

bzw. Leistungsdichte $W = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Leistung = Arbeit/Zeit ⇒ Berechne also $\vec{j} \cdot \vec{E}$.

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}) \cdot \vec{E}$$

$$| \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \underbrace{\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E})}_{-\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \partial_t \vec{E} + \vec{B} \partial_t \vec{B})$$

$$= -\nabla \cdot \underbrace{\left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]}_{=: \vec{S}} - \partial_t \underbrace{\left[\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right]}_{=: u}$$

$$\Rightarrow \text{Zusammen: } \boxed{\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

mit

$$\boxed{u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)} : \text{Energiedichte des elektromagnetischen Feldes}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})} : \text{Energiestromdichte bzw. "Poynting-Vektor"}$$

$$\boxed{W = \vec{j} \cdot \vec{E}} : \text{Am/vom Feld geleistete Arbeit pro Zeit.}$$

Übertrag von Energie zwischen Feld und Materie.

Folgerung

$$\text{Für } \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \text{ gilt } \boxed{\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} = 0} :$$

→ Kontinuitätsgleichung für Feldenergie

$$\text{Für } \vec{j} \cdot \vec{E} \neq 0 \text{ ist } \partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} :$$

Energie wird vom Feld an Materie abgegeben und umgekehrt.

Feld + Materie zusammen: Energieerhaltung!

2.1.3.2 Impulssatz und Maxwell'scher Spannungstensor

Ausgangspunkt: Impulsbilanz für Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Impulsänderungen durch Feld \leftrightarrow Kraftdichte der Lorentzkraft

$$\begin{aligned}
 \vec{f} &= \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \\
 & \left| \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \vec{E}; \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{B} \partial_t \vec{B} \\ = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) + \frac{1}{c} \vec{B} \times (\partial_t \vec{E})) \end{array} \right. \\
 & \left| \begin{array}{l} \text{Addiere } \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \\ \text{Ersetze } \vec{B} \times (\partial_t \vec{E}) = -\partial_t (\vec{B} \times \vec{E}) + \vec{E} \times \partial_t \vec{B} = -\partial_t (\vec{B} \times \vec{E}) - c \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) \\
 & \left| \begin{array}{l} \text{Schreibe um} \\ [\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})]_i = \sum_j E_i \partial_j E_j - \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m \\ \left| \begin{array}{l} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\ = \sum_j (E_i \partial_j E_j - E_j \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i) = \sum_j \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i \vec{E}^2 \\ = \partial_j (E_i E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij}) \end{array} \right. \\ \text{Dasselbe für } \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \end{array} \right. \\
 f_i &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \partial_j \underbrace{[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \delta_{ij}]}_{=: T_{ij}} - \partial_t \underbrace{\frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{B}]_i}_{=: g_i}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Zusammen:
$$\frac{\partial}{\partial t} g_i + f_i = \sum_j \partial_j T_{ji}$$

mit

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B}) : \text{Dichte des **Elektromagnetischen Feldimpulses**.}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)) :$$

Impulsstromdichte bzw. "Maxwell'scher Spannungstensor"

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} : \text{Mechanische Impulsänderung der Teilchen durch elektromagnetisches Feld}$$

Folgerung und Interpretation

Für $\vec{f} = 0$ gilt $\partial_t \vec{g} - \nabla \mathbf{T} = 0$ mit $\mathbf{T} = (T_{ij})$,

$([\nabla \mathbf{T}]_i = \sum_j \partial_j T_{ij}$; Matrixmultiplikation mit Nabla-Operator).
 \rightarrow Kontinuitätsgleichung für Feldimpuls

Für $\vec{f} \neq 0$ ist $\partial_t \vec{g} - \nabla \mathbf{T} = -\vec{f}$:

Übertrag von Impuls vom Feld an Materie und umgekehrt.

Feld + Materie zusammen: Impulserhaltung!

2.1.4 Elektromagnetische Potentiale

2.1.4.1 Einführung der Potentiale

Weitere Vereinfachung der Maxwell'schen Gleichungen durch Rückführung von \vec{E} und \vec{B} auf geeignete Potentiale (analog 2.1.1 für zeitlich veränderliche Felder).

$$* \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Es existiert ein Vektorpotential mit } \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}.$$

(Beweis: \Leftarrow Klar, $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \forall \vec{A}$.

\Rightarrow Ein entsprechendes Vektorfeld \vec{A} , welches auch die Gleichung für $\nabla \times \vec{B}$ erfüllt, kann man konstruieren. Siehe Abschnitt 2.3 ???).

$$* \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \partial_t \vec{A} \Rightarrow \nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Es existiert skalares Potential } \Phi \text{ mit } \boxed{\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}}.$$

Bemerkung: Damit kann man auch ein geschwindigkeitsabhängiges "generalisiertes Potential" U für die Lorentzkraft \vec{F} definieren:

$$\boxed{F_i = \left[-\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \right] U(\vec{r}, \vec{v}, t)} \quad \text{mit} \quad \boxed{U(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\Phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)}$$

(Rechnung:

$$\begin{aligned} F_i &= \left[-\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \right] U = -q \partial_i \Phi + \frac{q}{c} (v_j \partial_i A_j - \frac{d}{dt} A_i(\vec{r}, t)) \\ &= -q \partial_i \Phi + \frac{q}{c} \underbrace{(v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i - \partial_t A_i)}_{[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_i} \\ &= -q (\partial_i \Phi + \frac{1}{c} \partial_t A_i) + \frac{q}{c} [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_i = q (E_i + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]_i) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bedeutung: Wird in der analytischen Mechanik deutlich (Theorie II).

2.1.4.2 Eichtransformationen

Eichfreiheit: Beachte: \vec{A} und Φ sind *nicht* eindeutig:

Man kann mit beliebigem skalarem Potential umeichen gemäß

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}}$$

(Check: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$, da $\nabla \times \nabla \Lambda = 0 \checkmark$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi' - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}' = -\nabla (\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda) - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \frac{1}{c} \partial_t \nabla \Lambda = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \checkmark)$$

Hintergrund:

\vec{E} und \vec{B} haben physikalische Realität, da über Lorentzkraft mit Testladung direkt meßbar \rightarrow eindeutig!

\vec{A} und Φ sind Hilfsgrößen ohne physikalische Realität.

(Bekommen physikalische Bedeutung in der Quantenmechanik, dann erhält allerdings auch Eichfreiheit physikalische Bedeutung!)

Beliebte Eichungen : (Zusatzbedingungen, die Λ festlegen)

Lorenzeichung: Eichbedingung $\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$

Coulombeichung: Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

2.1.4.3 Neue Form der Maxwellgleichungen

Beachte: Durch Einführung der Potentiale sind *homogenen* Maxwellgleichungen automatisch gelöst. Es bleiben nur die *inhomogenen* Maxwellgleichungen. Ihre Form hängt von der Wahl der Eichung ab.

Generell: Definiere d'Alembert Operator: $\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

1) Lorenzeichung :

$$\Rightarrow \text{Maxwellgleichungen: } \boxed{\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \square \Phi = 4\pi\rho}$$

$$\text{mit Eichbedingung } \boxed{\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

(Herleitung:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{A} \\ \Rightarrow \square \vec{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} \right)}_0 = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \checkmark \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \Rightarrow -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \vec{A} = 4\pi\rho \\ \Rightarrow \square \Phi &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \Delta \Phi = 4\pi\rho + \frac{1}{c} \partial_t \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi)}_0 = 4\pi\rho \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) Coulombeichung :

$$\Rightarrow \text{Maxwellgleichungen: } \boxed{\Delta \Phi = -4\pi\rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi}$$

$$\text{mit Eichbedingung } \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

(Herleitung:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \\ \Rightarrow \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}_0 - \Delta \vec{A} &\stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{A} \\ \Rightarrow \square \vec{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi \quad \checkmark \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \Rightarrow -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}_0 = 4\pi\rho \Rightarrow \Delta \Phi = -4\pi\rho \quad \checkmark \end{aligned}$$

Vorteile der Coulombeichung: Besonders günstig bei $\rho = 0$ (Optik).

2.2 Die Elektro- und Magnetostatik

Betrachte nun Situation: $\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ vorgegeben und zeitunabhängig sind, und \vec{E}, \vec{B} stationär ($\partial_t \vec{E} = \partial_t \vec{B} = 0$).

2.2.1 Grundgleichungen

* Stationäre Maxwellgleichungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}}$$

inhomogene
Maxwellgleichungen

homogene
Maxwellgleichungen

Folgerung: Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} sind für festes, vorgegebenes ρ, \vec{j} nicht mehr gekoppelt, können separat gelöst werden.

→ getrennte Gebiete der **Elektrostatik** und **Magnetostatik**.

* Elektrodynamische Potentiale (vgl. 2.1.4)

Lösung der homogenen Maxwellgleichungen durch Einführung eines Skalarpotentials Φ und eines Vektorpotentials \vec{A} mit

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\Phi}, \quad \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

Wähle Lorenz- oder Coulombbeziehung (hier äquivalent)

→ Inhomogene Maxwellgleichungen nehmen die Form an (vgl. 2.1.4.3)

$$\boxed{\Delta\Phi = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}} \quad \text{mit Eichbedingung} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

⇒ Poissongleichung für Φ und Komponenten A_α von \vec{A} .

* Superpositionsprinzip

Allgemeine Eigenschaft der Grundgleichungen: linear, d.h. Lösungen können beliebig überlagert werden.

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \Delta\Phi_i = -4\pi\rho_i &\Rightarrow \Delta\Phi = -4\pi\rho \quad \text{mit} \quad \Phi = \sum_i \Phi_i, \quad \rho = \sum_i \rho_i \\ \Delta\vec{A}_i = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_i &\Rightarrow \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \sum_i \vec{A}_i, \quad \vec{j} = \sum_i \vec{j}_i \end{aligned}$$

2.2.2 Elektrostatik

2.2.2.1 Grundlegende Fragestellung

Gesucht:

Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ für gegebene Ladungsverteilung ρ unter vorgegebenen Randbedingungen.

Mögliche Randbedingungen:

- (i) **Unbegrenzter Raum:** $\Phi \rightarrow 0$ bei $r \rightarrow \infty$.
- (ii) Begrenzende Oberfläche O mit **Dirichletschen Randbedingungen:** Wert des Potentials $\Phi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in O$ ist vorgegeben.

Physikalische Realisierung z.B.

Begrenzung durch *leitende* Oberflächen.

\Rightarrow Ladungen in Oberfläche frei beweglich.

\Rightarrow Können parallelem Feld \vec{E}_{\parallel} folgen und es ausgleichen.

\Rightarrow Im stationären Zustand ist $\vec{E}_{\parallel} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.}$ auf O .

- (iii) Begrenzende Oberfläche O mit **von Neumannschen Randbedingungen:** Wert der *Normalenableitung* $\vec{n} \cdot \nabla\Phi$ auf O ist vorgegeben, wobei \vec{n} : Einheitsvektor senkrecht zur Oberfläche. (Konvention: zeigt in das betrachtete Gebiet *hinein*.)

Physikalische Realisierung:

Im Vakuum schwierig, in *Medien* möglich, z.B. an Grenzflächen zu einem Medium mit sehr viel niedrigerer dielektrischer Konstante (vgl. 2.2.2.1). Dann treten an der Grenzfläche *Polarisationsladungen* auf, die \vec{E}_{\perp} nahezu ausgleichen, so daß $\vec{E}_{\perp} \approx 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \nabla\Phi \approx 0$. Von-Neumannsche Randbedingungen sind auch in der *Hydrodynamik* von Bedeutung.

Satz: Sind auf einer geschlossenen Oberfläche ∂V eines Gebietes V Dirichletsche oder von-Neumannsche Randbedingungen vorgegeben, so ist die Lösung der Poissongleichung in diesem Gebiet *eindeutig* (evtl. bis auf eine Konstante). Das gilt auch für gemischte Randbedingungen (teilweise Dirichlet, teilweise von Neumann).

- (Beweis: Angenommen, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen Φ_1 und Φ_2
 \Rightarrow Differenz $\tilde{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2$ erfüllt $\Delta\tilde{\Phi} = 0$ im Volumen
 und Randbedingung $\tilde{\Phi} = 0$ oder $\vec{n} \cdot \nabla\tilde{\Phi} = 0$ auf Oberfläche.

Wende Gaußschen Satz auf $\tilde{\Phi} \nabla\tilde{\Phi}$ an:

$$\int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{-dA \vec{n}} \cdot (\tilde{\Phi} \nabla\tilde{\Phi}) = \int_{\partial V} dA \tilde{\Phi} (\vec{n} \cdot \nabla\tilde{\Phi}) = 0 \text{ laut Voraussetzung}$$

$$\stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_V dv \nabla \cdot (\tilde{\Phi} \nabla\tilde{\Phi}) = \int_V dV \left[(\nabla\tilde{\Phi})^2 + \tilde{\Phi} \underbrace{\Delta\tilde{\Phi}}_0 \right]$$

$\Rightarrow (\nabla\tilde{\Phi}) \equiv 0$ überall in $V \Rightarrow \tilde{\Phi} \equiv \text{const.}$

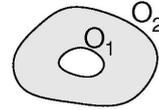
bzw. bei Dirichlet-Randbedingungen sogar $\tilde{\Phi} \equiv 0$.

$\Rightarrow \Phi_1 \equiv \Phi_2 + \text{const.}$ bzw. im Dirichlet-Fall $\Phi_1 \equiv \Phi_2$.)

Praktische Folgerungen

* **Faraday-Käfig:** Im ladungsfreien Inneren einer geschlossenen leitenden Oberfläche ist das elektrostatische Potential konstant, d.h. das \vec{E} -Feld verschwindet.

* **Kapazität:** Betrachte System von innerer und äußerer Leiterschale O_1 und O_2 mit ladungsfreiem Zwischenraum (Kugelkondensator). Es gilt $\Delta\Phi = 0$. Die Potentiale auf den beiden Flächen seien $\Phi(O_1) = V$, $\Phi(O_2) = 0$.



\Rightarrow Für $V = V_0 \exists!$ Lösung $\Phi_0(\vec{r})$.

Für $V = lV_0 \exists!$ Lösung $\Phi(\vec{r}) = l \Phi_0(\vec{r}) \Rightarrow \Phi \propto V$.

\Rightarrow Ladung Q_1 auf innerem Leiter O_1 ist

$$Q_1 \underset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{O_1} d\vec{A} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_{O_1} d\vec{A} \cdot \nabla\Phi \propto V.$$

\Rightarrow $|Q_1/V| =: C = \text{const.}$: Kapazität des Kondensators.

2.2.2.2 Lösung im unbegrenzten Raum: Das Coulomb-Potential

Wichtigste **elementare Lösung** der Elektrostatik: Lösung der Laplace-Gleichung im unbegrenzten Raum.

* **Potential einer einzelnen Punktladung q am Ursprung**

Symmetrie und Wirbelfreiheit von $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{r}/r$.

Lege Kugel K (Radius R) um Punktladung, wende Gaußsches Gesetz an.:

$$\int_{\substack{\partial K \\ \text{Oberfläche}}} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 E(r) \stackrel{!}{=} 4\pi \underbrace{Q_K}_{\substack{\text{eingeschlossene} \\ \text{Ladung}}} = 4\pi q \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = q \vec{r}/r^3.$$

Mit $\vec{r}/r^3 = -\nabla(1/r)$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$ erhält man für das Potential Φ

das **Coulomb-Potential** $\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}$

* **Potential einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$**

Wegen Superpositionsprinzip addieren sich Beiträge auf.

Beitrag einer infinitesimalen Ladung $\rho(\vec{r}') d^3r'$: $d\Phi = d^3r' \rho(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$.

Zusammen: $\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

2.2.2.3 Allgemeines Randwertproblem und Greens-Funktion

In 2.2.2.2: Herleitung einer Gleichung für das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung im unbegrenzten Raum aus dem Potential einer Punktladung mittels Superpositionsprinzip.

Nun: Verallgemeinerung für beliebige Randbedingungen.

a) Konzept der Greens-Funktion

Gegeben lineare Differentialgleichung für Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$ in Gebiet V .

$$\boxed{L\Phi(\vec{r}) = 4\pi f(\vec{r})}, \quad L \text{ linearer Operator (z.B. } L = -\Delta, L = \square)$$

mit Randbedingungen auf Oberfläche ∂V :

- (i) vom Dirichlet-Typ ($\Phi(\vec{r})$ vorgegeben) oder
- (ii) vom von-Neumann-Typ ($\vec{n} \cdot \nabla\Phi(\vec{r})$ vorgegeben).

Ansatz: Löse zunächst Gleichung $\boxed{LG(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')}$

mit Randbedingung $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ bzw. $\vec{n} \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ im Fall (i) bzw. (ii). Bestimme ferner Feld $\tilde{\Phi}(\vec{r})$ mit $L\tilde{\Phi} \equiv 0$ im Gebiet V , das auf der Oberfläche ∂V denselben Randbedingungen wie Φ genügt.

\Rightarrow **Allgemeine Lösung** für beliebiges $f(\vec{r})$ ist

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') + \tilde{\Phi}(\vec{r})}$$

(Beweis: Einsetzen

$$L\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' f(\vec{r}') \underbrace{LG(\vec{r}, \vec{r}')}_{4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} + \underbrace{L\tilde{\Phi}}_0 = 4\pi \int d^3r' f(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = 4\pi f(\vec{r})$$

Randbedingungen erfüllt per Konstruktion.)

Vorteil: Man muß nur einmal G und $\tilde{\Phi}$ ausrechnen, und hat mit einem Schlag die Lösung für alle $f(\vec{r})$.

b) Anwendung auf Poisson-Gleichung: $L = -\Delta$

Vereinfachung: Separate Berechnung von $\tilde{\Phi}$ nicht nötig.

Nutze Greenschen Satz aus: Für Skalarfelder φ, ψ auf Gebiet V gilt:

$$\int_V d^3r (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi)$$

Setze ein: $\varphi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$.

$$\Rightarrow \int_V d^3r \Phi(\vec{r}) \underbrace{\Delta G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} - \int_V d^3r G(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{\Delta \Phi(\vec{r})}_{-4\pi\rho(\vec{r})} = \int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{-\vec{n}dA} \cdot (\Phi \nabla G - G \nabla \Phi)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}') = \int_V d^3r G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA \left((\vec{n} \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')) \Phi(\vec{r}) - G(\vec{r}, \vec{r}') (\vec{n} \cdot \nabla \Phi(\vec{r})) \right).$$

\Rightarrow **Allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \tilde{\Phi}(\vec{r})}$$

$$\text{mit } \boxed{\tilde{\Phi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA' \left\{ \Phi(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r}', \vec{r})) - G(\vec{r}', \vec{r}) (\vec{n}' \cdot \nabla' \Phi(\vec{r}')) \right\}}$$

Dirichletsche Randbedingungen: $G = 0$, $\Phi(\vec{r}')$ vorgegeben.

von-Neumann Randbedingungen: $\vec{n} \cdot \nabla G = 0$, $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi)$ vorgegeben.

Bemerkungen:

- Gleichung für Φ sieht hier etwas anders aus als bei der Skizze des allgemeinen Konzepts in a). Dort lautete zweiter Term $\int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$. (Das stört aber nicht weiter).

- Bei reinen von Neumannschen Randbedingungen an den Oberflächen ∂V von endlichen Gebieten V tritt ein Problem auf:

$$\int_{\partial V} dA (\vec{n} \cdot \nabla G) = \int_V d^3r \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi.$$

\Rightarrow Randbedingung $(\vec{n} \cdot \nabla G) \equiv 0$ ist nicht realisierbar!

Ausweg: Modifizierte Greensfunktion $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$ mit Randbedingung $\vec{n} \cdot \nabla G_N = -4\pi/A$, wobei A : Fläche von ∂V .

$$\Rightarrow \tilde{\Phi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA' (\vec{n}' \cdot \nabla \Phi) G_N(\vec{r}', \vec{r}) + \underbrace{\frac{1}{A} \int_{\partial V} dA' \Phi(\vec{r}')}_{\text{const.}}$$

NB: Die zusätzliche Konstante ist uninteressant. Bei durchgängig von-Neumannschen Randbedingungen ist Φ ohnehin nur bis auf eine Konstante bestimmt!

c) Interpretation der Greensfunktion in der Elektrostatik

vgl. $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ mit $\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$.

$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist das von einer Punktladung $q' = 1$ am Ort \vec{r}' erzeugte elektrostatische Potential am Ort \vec{r} unter den Randbedingungen $G = 0$ bzw. $\vec{n} \cdot \nabla G = 0$.

d) Beispiele für Greensfunktionen

(Potential einer Punktladung unter verschiedenen Randbedingungen)

Unendlicher Raum

\rightarrow bekannt aus 2.2.2.2:
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Halbraum $z > 0$, Dirichletsche Randbedingungen bei $z = 0$

entspricht Potential einer Punktladung $q' = 1$ bei $\vec{r}' = (x', y', z' > 0)$ in Gegenwart einer geerdeten Metallplatte bei $z = 0$.

Lösungstrick: Spiegelladung

Setze virtuelle Ladung $q'' = -1$ an den Ort $\vec{r}'' = (x', y', -z')$,

d.h. $\vec{r}'' = \vec{r}' - 2(\vec{r}' \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z$ mit $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$.

Trägt nicht zur Poisson-Gleichung bei, da sie außerhalb des betrachteten Halbraums liegt.

Konstruiere $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|}$

Bei $z = 0$ gilt: $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}''| \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$.

\Rightarrow Funktioniert:
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + 2(\vec{r}' \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z|}$$

Halbraum $z > 0$, von-Neumann Randbedingungen bei $z = 0$

entspricht Potential einer Punktladung $q' = 1$ bei $\vec{r}' = (x', y', z' > 0)$

mit Randbedingungen $\partial_z G(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{z=0} = 0$.

Lösungsansatz: Wieder Spiegelladung an derselben Stelle, diesmal mit Ladung $q'' = +1 \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = 1/|\vec{r} - \vec{r}'| + 1/|\vec{r} - \vec{r}''|$.

Bei $z = 0$ ist $\partial_z G = -\frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{z-z''}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} = 0$ (\checkmark),

da $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}''|, z'' = -z', z = 0$.

$$\Rightarrow \text{Funktioniert: } \boxed{G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'' + 2(\vec{r}'' \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z|}}$$

Für etliche Geometrien kann man Spiegelladungsansatz verwenden, um Greensfunktion zu bestimmen. (z.B. leitende Kugel \rightarrow Übungsaufgabe, Ladung in Plattenkondensator \rightarrow Reihe von Spiegelladungen).

Allgemein: Spiegelladungen vermitteln anschauliche Vorstellung von Greensfunktion (Spiegelladung bzw. Spiegelladungsdichte).

2.2.3 Magnetostatik

Situation jetzt: Feste, gegebene Stromverteilung \vec{j} \Rightarrow statische Magnetfelder. Wegen Analogie zur Elektrostatik können wir uns hier kürzer fassen.

Grundlegende Fragestellung wieder Lösung von Poissongleichungen

- $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \rightarrow$ 3 Gleichungen für 3 Komponenten von \vec{A} .

- Gegebenenfalls mit Randbedingungen

- und zusätzlich *Eichbedingung* $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

(Unproblematisch, da $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = 0$ wegen Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung) und Stationarität.)

2.2.3.1 Lösung im unbegrenzten Raum

Analogie zur Elektrostatik ($\Delta \Phi = -4\pi\rho \rightarrow \Phi = \int d^3r' \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

Überprüfe noch $\nabla \cdot \vec{A} = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = - \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

| partielle Integration, $\vec{j} \rightarrow 0$ im Unendlichen

$$= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \text{ wegen } \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \checkmark.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}')}$$

2.2.3.2 Anwendung: Biot-Savart-Ampèresches Gesetz

Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern.

– Magnetfeld des Leiters 2: $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}_2(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

– Lorentzkraft auf Leiter 1: (Kraftdichte $\vec{f} = \frac{1}{c}(\vec{j}_1 \times \vec{B}_2)$)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' \vec{j}_1(\vec{r}) \times (\vec{j}_2(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r d^3r' \left\{ \vec{j}_2(\vec{r}') (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}) - \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')) \right\} \\ &\quad | \int d^3r \vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int d^3r \vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \underset{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} - \int d^3r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}_1(\vec{r})}_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')) \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

2.2.4 Multipolentwicklung

2.2.4.1 Idee der Multipolentwicklung

Im unbegrenzten Raum: Elektro- und Magnetostatik im Prinzip gelöst.

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \text{ bzw. } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Häufig kennt man ρ und \vec{j} aber gar nicht so genau bzw. braucht Φ und \vec{A} gar nicht so genau zu wissen. \rightarrow Entwicklung nach wichtigsten Beiträgen.

Hier: Diskutiere wichtigsten derartigen Fall:

$\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ räumlich begrenzt auf kompakten Träger (z.B. Molekül).

Gesucht ist das von ρ bzw. \vec{j} erzeugte Feld in großer Entfernung.

Also: $\exists R > 0$, so daß $\rho(\vec{r}') = 0$ bzw. $\vec{j}(\vec{r}') = 0$ für $r' > R$.

Gesucht: Resultierende Potentiale bzw. Felder bei $r \gg R$ (Fernfeld)

\leadsto Entwicklung nach Potenzen von $1/r$: Multipolentwicklung.

Verfahren: Entwickle $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ nach Potenzen von $1/r$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} (1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2})^{-1/2} \\ &\left| \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } (1 + \alpha)^{-1/2} \text{ nach kleinem Parameter} \\ \alpha = -2\vec{r} \cdot \vec{r}'/r^2 + (r'/r)^2 \\ \text{Sortiere nach Potenzen von } 1/r. \quad \text{Definiere } \vec{e}_r = \vec{r}/r. \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} (\vec{e}_r \cdot \vec{r}') + \frac{1}{r^3} \left(\frac{3}{2} (\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

\leadsto Setze ein in Gleichung für Potential Φ bzw. \vec{A} .

$$1/r \rightarrow \underline{\text{Monopolbeitrag.}}$$

$$1/r^2 \rightarrow \underline{\text{Dipolbeitrag.}}$$

$$1/r^3 \rightarrow \underline{\text{Quadrupolbeitrag.}}$$

Bemerkung: Multipolentwicklung in *kartesischen* Koordinaten.

Alternative: *Kugelkoordinaten* \leadsto Entwicklung nach "Kugelflächenfunktionen" $Y_{lm}(\theta, \phi)$ (siehe Mathematische Rechenmethoden 2).

Mehr Formalismus, aber systematischer Vorgehensweise.

$$\text{Zitat: } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\frac{4\pi}{2l+1} r'^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \text{ für } r > r'.$$

2.2.4.2 Multipolentwicklung in der Elektrostatik

Betrachte nun spezielle Fall einer begrenzten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$

1) Berechnung des Fernfeldes bzw. Potentials in großer Entfernung

$$\begin{aligned} & \text{Multipolentwicklung für Potential } \Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \Rightarrow \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}')}_{=q: \text{ Gesamtladung}} + \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{=\vec{p}} \\ &+ \frac{1}{r^3} \sum_{ij} e_{ri} e_{rj} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(\frac{3}{2} r'_i r'_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} r'^2 \right)}_{=: Q_{ij}} \\ \Rightarrow \quad \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} q + \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{p} + \frac{1}{r^3} \sum_{ij} e_{ri} e_{rj} Q_{ij} + \dots \end{aligned}$$

\leadsto Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ wird durch Momente charakterisiert:

q	$= \int d^3r' \rho(\vec{r}')$: Gesamtladung (Monopol)
\vec{p}	$= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$: Dipolmoment
Q_{ij}	$= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3 r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2)$: Quadrupolmoment
etc.	(höhere Ordnungen)	

NB: $\mathbf{Q} = (Q_{ij})$ ist ein Beispiel für einen physikalischen Tensor
Es gilt $Q_{ij} = Q_{ji}$, $\text{Spur}(Q) = \sum_i Q_{ii} = 0$

2) Wechselwirkungsenergie von $\rho(\vec{r}')$ mit äußerem Potential Φ_{ext}

NB: Φ_{ext} schließt das von ρ erzeugte Potential Φ *nicht* ein!

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ & \left| \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } \Phi_{\text{ext}}: \\ \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}') = \Phi_{\text{ext}}(0) + \vec{r}' \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}}{\partial r_i \partial r_j} |_0 + \dots \\ | \quad \vec{E} = -\nabla \Phi \\ = \Phi_{\text{ext}}(0) - \vec{r}' \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial E_i}{\partial r_j} |_0 + \dots \\ | \quad \text{Nutze aus: } \nabla \cdot \vec{E} = \sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial e_i}{\partial r_j} = 0 \\ = \Phi_{\text{ext}}(0) - \vec{r}' \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(\frac{3}{2} r'_i r'_j - \frac{1}{2} r'^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial E_i}{\partial r_j} |_0 + \dots \end{array} \right. \\ &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left\{ \Phi_{\text{ext}}(0) - \vec{r}' \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(\frac{3}{2} r'_i r'_j - \frac{1}{2} r'^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial E_i}{\partial r_j} |_0 + \dots \right\} \\ \Rightarrow \quad U &= q \Phi_{\text{ext}}(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{3} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial r_j} |_0 + \dots \end{aligned}$$

\leadsto Wechselwirkungsenergie wird auch von Multipolen bestimmt.

$$\Rightarrow \text{Kraft auf Ladungsverteilung: } \vec{F} = -\nabla U = q\vec{E} + \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) + \dots$$

\leadsto Ladung folgt Feld.

Dipol folgt Feldgradienten, etc.

2.2.4.3 Multipolentwicklung in der Magnetostatik

Im Prinzip analog der Elektrostatik, Fernfeld wird durch Momente der Stromverteilung bestimmt: $A_k(\vec{r}) = \frac{1}{r} q_k^{(m)} + \frac{1}{r^2} \sum_j e_{rj} p_{kj}^{(m)} + \dots$

mit Monopol: $q_k^{(m)} = \int d^3r' j_k(\vec{r}')$, Dipol: $p_{kj}^{(m)} = \int d^3r' j_k(\vec{r}') r'_j$, etc.

Aber:

Monopol: $q_k^{(m)} = \int d^3r j_k(\vec{r}) = 0 \Rightarrow$ Es gibt keine magnetischen Monopole!

$$\left(\int d^3r j_k(\vec{r}) \underset{j_k = \vec{j} \cdot (\nabla r_k)}{=} \int d^3r \vec{j} \cdot (\nabla r_k) = \underbrace{\int d^3r \nabla(\vec{j} r_k)}_{\text{Gau\ss : } \int_{\infty} d\vec{A} \cdot (\vec{j} r_k) = 0} - \int d^3r \underbrace{(\nabla \cdot \vec{j}) r_k}_0 = 0 \right)$$

Dipol: $p_{kj}^{(m)} = \int d^3r j_k(\vec{r}) r_j$ ist *antisymmetrisch*: $p_{kj}^{(m)} = -p_{jk}^{(m)}$

$$\Rightarrow p_{kj}^{(m)} =: \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ wirkt als Kreuzprodukt, } p\vec{v} \equiv \vec{m} \times \vec{v} \forall \vec{v}.$$

$$\begin{aligned} \left(\text{denn: } p_{ki}^{(m)} + p_{ik}^{(m)} = \int d^3r (j_k r_i + j_i r_k) \underset{j_k = \vec{j} \cdot (\nabla r_k)}{=} \int d^3r (r_i \vec{j} \cdot (\nabla r_k) + r_k \vec{j} \cdot (\nabla r_i)) \right. \\ \left. = \underbrace{\int d^3r \nabla(r_i r_j \vec{j})}_{\text{Gau\ss : } \int_{\infty} d\vec{A}(r_i r_j \vec{j}) = 0} - \int d^3r (r_i r_j \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}}_0) = 0 \right) \end{aligned}$$

Konkret: $\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$: magnetisches Moment

\Rightarrow **Multipolentwicklung:** $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} (\vec{m} \times \vec{e}_r) + \dots$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

2.2.4.4 Anwendung: Maxwellgleichungen in Materie

Bis jetzt: Beschränkung auf einzelnes "Molekül"

(einer einzelnen räumlich begrenzten Ladungs- und Stromverteilung).

Nun: Betrachte System aus vielen Molekülen ("Material" oder "Medium").

Ziel: Herleitung "gemittelter Maxwellgleichungen" für solche Medien für Längenskalen, die viel größer sind als die molekulare Skala.

Dabei hilft Multipolentwicklung.

* **Elektrostatik** Betrachte Moleküle i am Ort \vec{r}_i mit Ladung q_i , Dipol \vec{p}_i .

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_i \vec{p}_i \cdot \nabla_i \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)$$

Makroskopisch:

Ersetze Ladungen q_i durch lokal gemittelte Ladungsdichte $\bar{\rho}$

Ersetze Dipole \vec{p}_i durch Dipoldichte \vec{P} : Polarisation.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{\bar{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &\underset{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\widehat{\rho} - \nabla \cdot \vec{P}) + \text{Oberflächenterme.} \end{aligned}$$

\rightsquigarrow sieht formal aus wie Feld einer Ladungsverteilung $\bar{\rho} - \nabla \cdot \vec{P}$.

\Rightarrow Makroskopische Maxwellgleichung: $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi(\bar{\rho} - \nabla \cdot \vec{P})$

Nächster Schritt: Schreibe sie um in eine Form, in der wieder nur Ladungsterm $4\pi\bar{\rho}$ auf der rechten Seite steht. Definiere dafür die Dielektrische Verschiebung $\vec{D} := \vec{E} + 4\pi \vec{P}$. $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\bar{\rho}$.

Zuletzt Annahme (oft zutreffend): Molekulare Dipole werden durch das \vec{E} -Feld ausgerichtet, resultierende Polarisierung ist proportional zu \vec{E} .
 $\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ mit ε : Dielektrizitätskonstante, charakterisiert Medium.
 (NB: In anisotropen Medien wird ε im allgemeinen ein Tensor sein).

* **Magnetostatik:** Analog

Makroskopischer Strom führt zu lokal gemittelter Stromdichte \vec{j} .

Dichte von magnetischen Momenten \rightarrow Magnetisierung \vec{M}

\leadsto Man erhält makroskopische Gleichung: $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + 4\pi \nabla \times \vec{M}$

Definiere $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ $\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

In vielen Materialien (außer Ferromagneten) ist $\vec{M} \propto \vec{B}$.

$\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$ mit μ : magnetische Permeabilität
 (in anisotropen Medien evtl. auch tensorielle Größe).

* **Verallgemeinerung: Volle Maxwellgleichungen in Materie**

Bei schwach zeitabhängigen Feldern kann man den Formalismus aus der Statik übernehmen und erhält:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\bar{\rho} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array}$$

inhomogene
Maxwellgleichungen
- gemittelte Form -

homogene
Maxwellgleichungen
- unverändert

(Begründung für Term $\partial \vec{D} / \partial t$ wird hier weggelassen.)

Voraussetzung ist, daß Polarisierung bzw. Magnetisierung den Feldern noch adiabatisch (instantan) folgen können.

Schnell veränderliche Felder: ε und μ werden *frequenzabhängig*.

2.3 Lösungen der vollen Maxwellgleichungen

Nun allgemeiner: $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$ zeitabhängig. In diesem Abschnitt zum Abschluß des Kapitels 2 einige wichtige Lösungen der vollen Maxwellgleichungen im Vakuum.

2.3.1 Ebene elektromagnetische Wellen

Als erstes: Zeitabhängige Felder im *materiefreien* Raum, $\rho \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv 0$.

Raum enthält nur Strahlung \leftrightarrow Elektromagnetische Wellen.

Randbedingung: Unbegrenzter Raum

Gleichungen: Wähle Coulomb-Eichung (vgl. Abschnitt 2.1.4.2, 2.1.4.3)

$$\Rightarrow \Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi \equiv 0$$

(da Lsg. eindeutig nach 2.2.2.1 und $\Phi = 0$ am Rand).

Es bleibt: $\square\vec{A} = 0$ mit Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$$

NB: Lineare Gleichungen \Rightarrow Superpositionsprinzip, Lösungen können aufaddiert werden.

Lösungsansatz: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$

Einsetzen:

$$\begin{array}{l} \square\vec{A} = (-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2)\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega = \pm c|\vec{k}| \\ \nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{A}_0 \perp \vec{k} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} = \frac{1}{c}i\omega \times \vec{A} \end{array} \right.$$

NB: Ansatz ist komplexe Funktion, aber mit \vec{A} ist auch \vec{A}^* Lösung.

\Rightarrow Man kann beide aufaddieren bzw. am Ende den Realteil nehmen.

Aus diesem Grund sind von den vier Lösungen $\exp(i(\pm\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t))$ nur zwei wirklich unabhängig.

\leadsto Wähle $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ und $\exp(i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$, $\omega = c|\vec{k}| > 0$.

\Rightarrow **Lösungen:** $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ mit $\omega = ck$, $\vec{A}_0 \perp \vec{k}$

$$\begin{array}{l} \vec{B} = \Re(\nabla \times \vec{A}) = \Re(i\vec{k} \times \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ \vec{E} = \Re(-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}) = \Re(i\vec{k} \times \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \end{array}$$

bzw. $\vec{B} = \Re(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$ mit $\vec{B}_0 = i\vec{k} \times \vec{A}_0$
 $\vec{E} = \Re(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$ $\vec{E}_0 = i\frac{\omega}{c}\vec{A}_0$.

Charakterisierung der Lösung

- \vec{E} und \vec{B} oszillieren in Phase mit Kreisfrequenz ω .
- **Fortbewegung eines "Phasenpunktes"** $\varphi(\vec{r}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$
 $\varphi(\vec{r}, t + \delta t) = \varphi(\vec{r} - \delta \vec{r}, t)$ mit $\delta \vec{r} = \frac{\vec{k}}{k} c \delta t$
 (da: $\varphi(\vec{r} - \delta \vec{r}, t) = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \frac{\vec{k}}{k} c \delta t) - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{r} - ck \delta t - \omega t$
 $= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(t + \delta t) \checkmark$)
 $\Rightarrow c = \delta r / \delta t$: Phasengeschwindigkeit
 \vec{k}/k : Ausbreitungsrichtung
 k : Wellenvektor \leftrightarrow Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$.

• **Polarisation:**

Es gilt: $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$ ($(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ bilden Rechtssystem).
 Amplituden $|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$ ($= \frac{\omega}{c} |\vec{A}_0|$).

$\Rightarrow \vec{B}$ wird durch \vec{E} vollständig festgelegt.

Reine Transversalwelle: Schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. (im Gegensatz zur Longitudinalwelle: schwingt in Ausbreitungsrichtung, z.B. Schall (Dichtewelle)).

\Rightarrow Zwei unabhängige Komponenten (Polarisationsrichtungen).

Beispiele: (oBdA sei $\vec{k}/k = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$)

Linear polarisierte Welle: $\vec{A}_0 = e^{-i\varphi}(A_x, A_y, 0)$ mit reellen A_α .

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\omega}{c}(A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi).$$

Zirkular polarisierte Welle: $\vec{A}_0 = e^{-i\varphi}(i(A_l + A_r), (A_l - A_r), 0)$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\omega}{c} A_l (\vec{e}_x \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi) + \vec{e}_y \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi)) - \frac{\omega}{c} A_r (\vec{e}_x \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi) - \vec{e}_y \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi)).$$

Polarisationen: A_l : linkszirkular polarisierter Anteil

A_r : rechtszirkular polarisierter Anteil.

• **Energietransport und Poynting-Vektor:**

gemittelt über oszillierende Komponenten.

$$u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{16\pi}(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^*) = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega^2}{c^2} |\vec{A}_0|^2$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) \Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{16\pi}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0) = \frac{c}{8\pi} \frac{\omega^2}{c^2} |\vec{A}_0|^2 \frac{\vec{k}}{k}$$

$$= \underbrace{\langle u \rangle}_{\text{Dichte}} \underbrace{c \frac{\vec{k}}{k}}_{\text{Geschwindigkeit}} .$$

(wie man erwarten würde!)

2.3.2 Felder von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen

Nun: Unbegrenzter Raum mit vorgegebenen zeitabhängigen Ladungs- und Stromverteilungen \leftrightarrow Verallgemeinerung des Grundproblems der Elektro- und Magnetostatik. Kann formal wie im statischen Fall mit dem Greens-Funktions-Formalismus gelöst werden.

Wähle im Folgenden Lorenz-Eichung (vgl. 2.1.4.2):

$$\text{Eichbedingung: } \boxed{\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

$$\text{Maxwellgleichungen: } \boxed{\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{und} \quad \square \Phi = 4\pi \rho} \quad (\text{nach 2.1.4.3}).$$

(„inhomogene Wellengleichung“)

2.3.2.1 Greens-Funktion des d'Alembert Operators

Zunächst: Bestimme Greens-Funktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ mit $\square G = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$

Ergebnis: (Herleitung siehe Übungsaufgaben hier und in MMR2).

$$\boxed{G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}$$

mit Vorzeichen $\left| \begin{array}{l} + : \text{„avancierte“ Lösung, } t' > t \\ - : \text{„retardierte“ Lösung, } t' < t \end{array} \right.$

(Soll hier nicht hergeleitet, aber immerhin überprüft werden:

Notation: $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') =: \tilde{G}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$, d.h. $\tilde{G}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \delta(t \pm r/c)$.

Zeige $\square \tilde{G} = 4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t)$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{G} &= 2(\nabla \frac{1}{r})(\nabla \delta(\dots)) + \frac{1}{r} \Delta \delta(\dots) + \delta(\dots) \Delta(\frac{1}{r}) \\ &\left| \begin{array}{l} \nabla \delta(t \pm r/c) = \pm \frac{1}{c} \nabla r \delta'(\dots) = \pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \\ \Delta \delta(t \pm r/c) = \pm \frac{1}{c} \underbrace{\nabla(\frac{\vec{r}}{r})}_{2/r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \delta(\dots)}_{\pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots)} \\ = \pm \frac{2}{r} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(\dots) \\ 2(\nabla \frac{1}{r})(\nabla \delta(\dots)) = -2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots)) = \mp \frac{2}{r^2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \\ \delta(t \pm r/c) \Delta(\frac{1}{r}) = -\delta(t \pm r/c) 4\pi \delta(\vec{r}) = -4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t) \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{G} - 4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t) \\ \Rightarrow \square \tilde{G} = (\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) \tilde{G} = 4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t) \checkmark \end{array} \right. \end{aligned}$$

Wähle von nun an retardierte Greens-Funktion. (Potentiale als Funktion der Ladungs- und Stromverteilungen in der Vergangenheit.)

2.3.2.2 Allgemeine Lösung des Problems

Ladungs- und Stromverteilung beliebig, aber vorgegeben.

Einsetzen der Greens-Funktion: $\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ bzw.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \vec{j}(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \rho(\vec{r}', t') \frac{\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \vec{j}(\vec{r}', t') \frac{\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{cases}$$

NB: Erfüllt Lorenzgleichung $\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Übungsaufgabe).

2.3.2.3 Punktförmige Ladungen: Liénard-Wiechert Potentiale

Betrachte nun konkret Feld einer bewegten Punktladung mit Trajektorie $\vec{R}(t)$

Trajektorie $\vec{R}(t)$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ mit $v < c$
(Lichtkegelbedingung, siehe Kapitel 3).

$$\Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \text{ mit } \vec{v}(t) = \dot{\vec{R}}(t).$$

Einsetzen: Definiere zunächst $f(t') := t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c}$

Mit $|\vec{v}(t)| < c \forall t$ gilt $\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla_{\vec{R}} |\vec{R} - \vec{r}| = 1 + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|} > 0$

$\leadsto f(t')$ hat genau eine Nullstelle t_{ret} und wächst monoton.

$$\Rightarrow \delta(f(t')) = \frac{1}{f'(t_{\text{ret}})} \delta(t' - t_{\text{ret}}), \quad \delta(f(t')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \delta(t' - t_{\text{ret}}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}| - \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R})}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}| - \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R})} \Big|_{t'=t_{\text{ret}}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q \vec{v}/c}{|\vec{r} - \vec{R}| - \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R})} \Big|_{t'=t_{\text{ret}}} \end{cases}$$

2.3.2.4 Speziell: Gleichförmig bewegten Punktladung

Noch spezieller: gleichförmig bewegte Punktladung, $\vec{R}(t) = \vec{v}t$.

★ Bestimmung der elektromagnetischen Potentiale

OBdA sei $t = 0$. Definiere $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

$$\Rightarrow f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{v}t'|}{c} \text{ hat Nullstelle } ct_{\text{ret}} = -\frac{\sqrt{(\vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2)} - \vec{r} \cdot \vec{\beta}}{1 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}, t = 0) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{v}t'| - \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t')} \Big|_{t_{\text{ret}}} \stackrel{|\vec{r} - \vec{v}t_{\text{ret}}| = -ct_{\text{ret}}}{=} \frac{q}{-ct_{\text{ret}} - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \beta^2 ct_{\text{ret}}}$$

$$= -\frac{q}{ct_{\text{ret}}(1 - \beta^2) - \vec{\beta} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t = 0) = \vec{\beta} \Phi$$

Schreibe noch um: $(\vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2) = r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(\vec{r}, t = 0) &= \frac{q}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t = 0) &= \frac{q \vec{\beta}}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}} \end{cases}$$

★ **Bestimmung der elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} :**

Aus $\Phi(\vec{r}, t = 0)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t = 0)$ mittels $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
 Ersetze zunächst $\partial_t\vec{A}$ durch Ausdruck, der nur noch *räumliche* Ableitungen enthält: $-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} -\vec{\beta}\frac{1}{c}\partial_t\Phi \underset{\frac{1}{c}\partial_t\Phi+\nabla\cdot\vec{A}=0}{=} \vec{\beta}(\nabla\cdot\vec{A}) \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\nabla)\Phi$
 $\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi + \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\nabla)\Phi; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} \nabla \times \vec{\beta}\Phi = -\vec{\beta} \times \nabla\Phi \underset{\vec{\beta}\times\vec{\beta}\dots=0}{=} \vec{\beta} \times \vec{E}$.

Dann noch geradlinige längere Rechnung, und man erhält

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{q(1-\beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}^3} \vec{r} \\ \vec{B} = \frac{q(1-\beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}^3} (\vec{\beta} \times \vec{r}) \end{array}$$

★ **Diskussion:**

(i) $\beta \ll 1 \Rightarrow \vec{E} \approx q\vec{r}/r^3, \quad \vec{B} \approx 0$: Coulomb-Potential.

(ii) $\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow E_{\parallel} = \frac{q}{r^2}(1-\beta^2), \quad B = 0$

$\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow E_{\perp} = \frac{q}{r^2} / \sqrt{1-\beta^2}, \quad B = \beta E_{\perp}$

(iv) Lorentzkraft zwischen zwei Ladungen q, q' , die mit *gleicher* Geschwindigkeit nebeneinander herfliegen:

$$\vec{F} = q'(\vec{e} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = q'q \frac{(1-\beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{\beta} \times \vec{r})^2}} (\vec{r} + \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{r})) = \dots = -q q' \nabla\psi$$

$$\text{mit } \psi = (1-\beta^2) / \sqrt{r^2 - (\vec{\beta} \times \vec{r})^2}$$

\Rightarrow Kraft hängt von der Geschwindigkeit der Teilchen ab!

\Rightarrow Nicht invariant unter Galilei-Transformationen!

NB: Dasselbe Problem tritt schon bei den elektromagnetischen Wellen auf:

Feste (absolute) Phasengeschwindigkeit c .

Müßte in jedem Inertialsystem gleich sein \rightarrow Wie soll das gehen?

\leadsto Problem mit dem ersten Newtonschen Axiom?

Lösung: Spezielle Relativitätstheorie, Kapitel 3.

Kapitel 3

Die Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Einführung und Grundprinzipien

3.1.1 Das Relativitätsprinzip in der Newtonschen Mechanik

Laut Kapitel 1: Die zentralen Aussagen der Newtonschen Mechanik lauten

- Es existieren Inertialsysteme
 - Die Bewegungsgleichungen haben in Inertialsystemen die Form
$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i \text{ (Newtonsche Bewegungsgleichungen)}$$
- ⇒ Folgerung: Verschiedene Inertialsysteme sind durch Galilei-Transformationen miteinander verknüpft.

(Bei Transformationen von Inertialsystemen $\bar{\Sigma}$ zu Σ ändern sich Koordinaten gemäß $\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_\Sigma = \mathcal{D}\vec{r}_{\bar{\Sigma}} + \vec{v}_0 t_{\bar{\Sigma}} + \vec{d}_0 \\ t_\Sigma = t_{\bar{\Sigma}} + t_0 \end{array} \right\}$ mit $\mathcal{D} \in SO(3)$: Drehung)

Frage: Kann man in einem abgeschlossenen System entscheiden, in welchem Inertialsystem man sich befindet?
(z.B. ob man „in Ruhe“ oder „in Bewegung“ ist?)

Allein aus den Bewegungsgleichungen natürlich nicht,
aber: Die Kräfte \vec{F}_i können ja von Orten und Geschwindigkeiten abhängen:
 $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \vec{v}_1 \dots \vec{v}_N, t)$

Nun gilt aber zusätzlich Erfahrungstatsache:

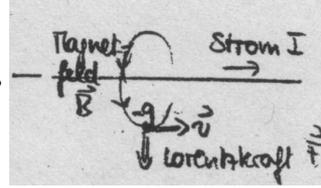
In abgeschlossenen Systemen (keine Einwirkung von außen) hat man:

- Homogenität der Zeit: Kräfte nicht explizit zeitabhängig, $\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial t} = 0$
- Homogenität des Raums: Kräfte hängen nur von relativen Abständen ab (z.B. vom Abstand zum Schwerpunkt)
- Mechanische geschwindigkeitsabhängige Kräfte hängen nur von relativen Geschwindigkeiten ab (z.B. Reibungskräfte)

→ Relativitätsprinzip der Mechanik

|| Alle Inertialsysteme sind bezüglich der mechanischen Gesetze gleichwertig!

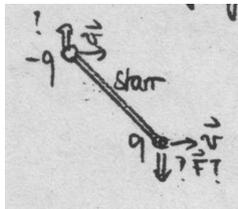
Ausnahme: Lorentzkraft ?



$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
scheint abhängig von der absoluten Geschwindigkeit

Aber: Wäre die Galilei-Transformation der Newtonschen Mechanik exakt richtig, so müsste ein elektrischer Dipol auf sich selbst ein Drehmoment ausüben, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit und Orientierung gegen das Inertialsystem bewegt, in dem die Maxwell'schen Gleichungen für die Elektrodynamik gelten.

Betrachte dazu folgenden Aufbau:



Naiv: $\vec{v} = 0$: Kräfte nur entlang Verbindungsgeraden

$\vec{v} \neq 0$: Lorentzkraft erzeugt Drehmoment.
 \vec{v} könnte z.B. von Erdgeschwindigkeit stammen

De facto: Es wird kein Drehmoment gemessen (Trouton, Noble, 1903)

→ Lorentzkraft zwischen einzelnen bewegten Ladungen lässt sich nicht so einfach herleiten, evtl. doch nur abhängig von der relativen Geschwindigkeit

Vermutung: Es gilt allgemeineres Prinzip:

|| Alle Inertialsysteme sind bezüglich aller Naturgesetze gleichrangig.

→ Generelles Relativitätsprinzip

3.1.2 Schwierigkeiten mit der Newtonschen Mechanik

3.1.2.1 Theoretisch

Relativitätsprinzip scheint inkompatibel mit den Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld zu sein.

z.B. Maxwell-Gleichungen im Vakuum (1864):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

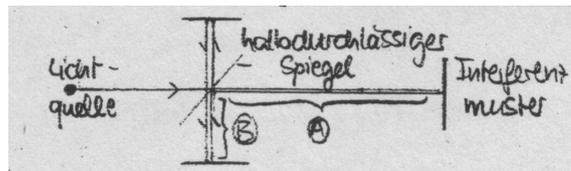
mit c : Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen (Lichtgeschwindigkeit), fest eingebaute Konstante

→ Maxwell-Gleichungen können nicht galilei-invariant sein !

Probleme: Sollen dann die Maxwell-Gleichungen in der obigen (ästhetisch ansprechenden) Form nur in einer verschwindenden Subklasse von Inertialsystemen gültig sein?
Wenn ja, in welchen?

3.1.2.2 Experimentell

- Michelson-Morley-Experiment (1881)



(Apparatur drehbar, bewegt sich mit Erdgeschwindigkeit \vec{v}_{Erde})

Würde sich Licht in einem absoluten Raum isotrop ausbreiten
→ Interferenzmuster im Fall (1) und (2) müssten verschieden sein.

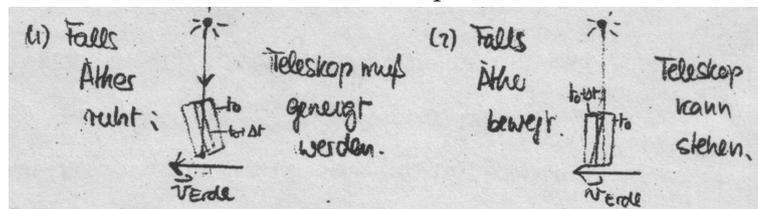
De facto: Immer gleich! (Auch zu verschiedenen Tages-, Jahreszeiten)

Erklärungsversuche für Ausgang des Michelson-Morley-Experiments:

- Licht bewegt sich relativ zur Lichtquelle mit Geschwindigkeit c .
Aber: Als Lichtquelle kann auch die Sonne (Miller) oder ein Fixstern (Tomaschek) benutzt werden.
- Licht schwingt in einem „Äther“, der von der Atmosphäre der Erde mitgeführt wird.

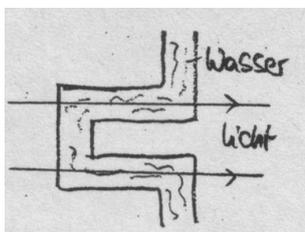
Aber: Stellare Aberration widerlegt diese Hypothese

Betrachte Fixstern durch Teleskop auf Erde



Beobachtung: Fall (1) trifft zu → Beobachter muss Teleskop im Jahresrhythmus im Kreis drehen.

- Fizeau-Experiment (1851)



Möglichkeiten:

- (1) Äther ruht: $c' = c/n$
(n =Brechungsindex)
- (2) Äther bewegt sich mit Wasser mit:
 $c' = c/n + v$

Experimentell: $c' = c/n + v(1 - 1/n^2)$ (!)

Fazit: Experimente zur Lichtausbreitung lassen sich nur schwer mit der Newtonschen Mechanik in Einklang bringen

- selbst bei Verzicht auf das generelle Relativitätsprinzip.

3.1.3 Die Einsteinschen Postulate

Einstein (1905): Zwei Postulate

I: Das generelle Relativitätsprinzip ist gültig: Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.

II: Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen den konstanten Wert c .

Dabei ist ein Inertialsystem: Ein System, in dem sich ein kräftefreier Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. (gemäß dem 1. Newtonschen Axiom)

Das Postulat II ersetzt die Forderung nach Galilei-Invarianz (bzw. das Bewegungsgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$: 2. Newtonsches Axiom)

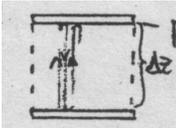
Insbesondere: Absolute Zeit existiert nicht mehr notwendigerweise. Existieren muss nur, was sich praktisch messen/konstruieren lässt. Zum Beispiel kann man Uhren bauen und Synchronisationsvorschriften angeben. Man kann aber nicht zwingend davon ausgehen, dass eine Synchronisationsvorschrift in jedem Inertialsystem zum selben Ergebnis führt.

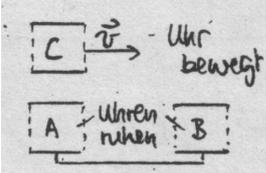
3.1.4 Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten

Gedankenexperimente (Einstein)

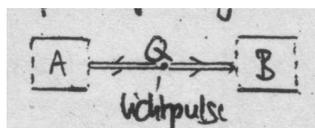
3.1.4.1 Zeitdilatation

Miss Zeit, die eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegte Uhr braucht, um von einem Punkt A zu B zu gelangen.

Uhr: „Lichtuhr“  perfekte Spiegel
misst Anzahl n der Reflexionen
Zeit $ct = \Delta z \cdot n$

Aufbau: 

- 1. Schritt: Synchronisiere die Uhren A und B
Beispiel für Synchronisierungsvorschrift:



Quelle Q in der Mitte sendet Lichtpulse aus, die an A und B reflektiert werden. Verschiebe Q so lange, bis die reflektierten Pulse gleichzeitig zurückkehren. Sende dann weiteren Puls und setze Uhren A, B auf $t=0$, wenn er ankommt.

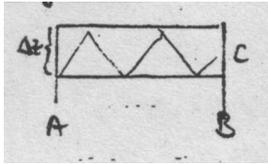
- 2. Schritt:

- * Miss Zeit in A, wenn C bei A vorbeikommt: $\rightarrow \Delta t$

- * Miss Zeit in B, wenn C bei B vorbeikommt: $\rightarrow \Delta t$

Lies jeweils auch Zeit in C ab: $\rightarrow \Delta \bar{t}$

Ergebnis:

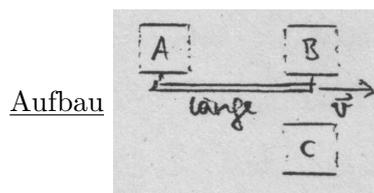


- Uhr C misst: $c\Delta \bar{t} = \Delta z \cdot n$
 - Uhren A, B messen: $(c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + (\Delta z \cdot n)^2$
- $$\Rightarrow \Delta \bar{t} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Bewegte Uhr geht langsamer: Zeitdilatation

3.1.4.2 Lorentzkontraktion

Miss Zeit, die eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegte Uhr braucht, um von einem Punkt A zu B zu gelangen.



Uhren A, B an beiden Enden des Körpers befestigt,
gleichförmige Geschwindigkeit \vec{v}
Uhr C in Ruhe

- 1. Schritt: Synchronisiere Uhren A, B wie gehabt (innerhalb des bewegten Bezugssystems)
- 2. Schritt: Längenmessung: Stoppe Zeit, die es dauert, bis der Körper an der Uhr vorbeigeflogen ist.

Ergebnis:

- Uhren A, B messen: $\bar{l} = v \cdot \Delta \bar{t}$

- Uhr C misst: $l = v \cdot \Delta t$

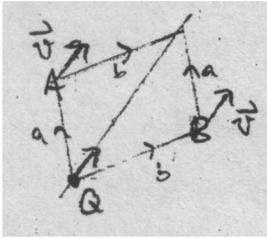
Beachte: Aufbau äquivalent zu dem in 3.1.4.1, wenn man sich in das Ruhesystem des Körpers und damit der Uhren A, B begibt (Uhr C wäre dann bewegt).

\leadsto Messergebnis ist analog: $\Delta \bar{t} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \boxed{l = \bar{l} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Bewegter Körper erscheint verkürzt: Lorentzkontraktion

3.1.4.3 Gleichzeitigkeit



Beobachte von außen die Synchronisation bewegter Uhren.

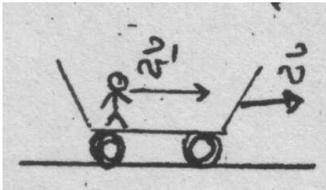
Für „ruhenden“ Beobachter erscheinen

Strecken a und b verschieden lang.

~> Uhren sind nach der Prozedur nicht synchron.

Im Bezugssystem der Uhren sind sie synchron.

3.1.4.4 Addition von Geschwindigkeiten



Beobachte laufende Person in Eisenbahnwaggon.

Person hat im Bezugssystem der Eisenbahn Geschwindigkeit \bar{v}'

Frage: Welche Geschwindigkeit hat sie

für „ruhenden“ Beobachter (Schienen?)

Newton: $\bar{v}' = \bar{v} + \bar{v}'$

Einstein: Einfache Addition scheitert spätestens im Grenzfall $v' \rightarrow c$.

De facto (siehe 3.2.2): $v' = (v + \bar{v}') / (1 + v\bar{v}'/c^2)$

3.2 Die Lorentz-Transformation

In Abschnitt 3.1: Einführung der grundlegenden Postulate der speziellen Relativitätstheorie → neues Bild von Raum und Zeit.

Einige Folgerungen, aber: unsystematisch, reich an „Fallen“ (man denkt leicht falsch, da neues Weltbild unanschaulich)

Vor allem ist noch nicht klar, wie man auf dieser Basis Naturgesetze formulieren soll.

Nun: Systematischer Zugang → Rahmen, der einem eine im Einsteinschen Sinne relativistische Beschreibung der Welt ermöglicht.

Bisheriger Rahmen („Weltstruktur“ der Newtonschen Mechanik)

- a) Vierdimensionale Raum-Zeit
Inertialsysteme, (mechanisches) Relativitätsprinzip
- b) Galilei-Transformation

Nun in der speziellen Relativitätstheorie:

- a) bleibt
- b) wird durch neue Transformation ersetzt: Lorentztransformation

3.2.1 Herleitung der „speziellen“ Lorentz-Transformation

3.2.1.0 Voraussetzungen

Basis: Einsteinsche Postulate

- (I) Relativitätsprinzip: Verschiedene Inertialsysteme, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind äquivalent.
- (II) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Erste Forderung ist älter und scheint „fundamentaler“ als die zweite. Wir werden versuchen, so lange wie möglich nur mit I) auszukommen.

Zusätzlich brauchen wir allerdings:

- (i) Raum hat Euklidische Struktur
(Parallelen schneiden sich nie, Winkelsumme im Dreieck)
- (ii) Homogenität von Raum und Zeit, Isotropie des Raums
- (iii) Kausalität: Zeitpfeil darf durch Transformation nicht genau umgedreht werden.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst den speziellen Fall einer reinen Geschwindigkeitstransformation \rightarrow spezielle Lorentztransformation

- Die beiden Inertialsysteme $\Sigma, \bar{\Sigma}$ bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit V in x -Richtung gegeneinander
- Ursprung zur Zeit $t = 0, \bar{t} = 0$ sei identisch

\rightsquigarrow Koordinaten in Σ : (t, x, y, z) ; Koordinaten in $\bar{\Sigma}$: $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Frage: Transformation
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{t} = \bar{t}(x, y, z, t) \\ \bar{x} = \bar{x}(x, y, z, t) \\ \bar{y} = \bar{y}(x, y, z, t) \\ \bar{z} = \bar{z}(x, y, z, t) \end{array} \right\} ?$$

3.2.1.1 Schritt 1: Die Transformation ist linear

Aus (I) (Relativitätsprinzip) folgt:

Eine gleichförmige Bewegung \vec{v} in Σ (kräftefreie Bewegung) muss in eine gleichförmige Bewegung \vec{v} in $\bar{\Sigma}$ übergehen

Aus (ii) (Euklidische Struktur des Raums) folgt:

- Zwei kräftefreie Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit \vec{v} laufen auf parallelen Bahnen. Der Abstandvektor $\Delta\vec{r}$ zwischen ihnen ist zeitlich konstant.
- Bezugssysteme $\Sigma, \bar{\Sigma}$ können räumlich und zeitlich parallelverschoben werden, ohne dass sich die Koordinaten von Abstandsvektoren $\Delta\vec{r}, \Delta\vec{r}$ verändern.

Betrachte zwei infinitesimal benachbarte kräftefreie Teilchen gleicher Geschwindigkeit \vec{v}

Im System Σ seien bekannte Koordinaten:

Teilchen 1: (t, \vec{r}) , Teilchen 2: $(t + \delta t, \vec{r} + \delta \vec{r})$

\leadsto Transformieren ins System $\bar{\Sigma}$ gemäß:

Teilchen 1: $(\bar{t}, \bar{\vec{r}})$, Teilchen 2: $(\bar{t} + \delta \bar{t}, \bar{\vec{r}} + \delta \bar{\vec{r}})$

mit $\delta \bar{t} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})} \delta t + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})} \delta x + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right)_{(t, \vec{r})} \delta y + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial z}\right)_{(t, \vec{r})} \delta z$ (*)

analog $\delta \bar{x}, \delta \bar{y}, \delta \bar{z}$

Verschiebe nun $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, $\bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}'$ räumlich und zeitlich so, dass Ursprung zur Zeit $t = 0$, $\bar{t} = 0$ bei Teilchen 1.

Dabei bleiben δt , $\Delta \vec{r} = \delta \vec{r} - \vec{v} \delta t$ und damit $\delta \vec{r}$ unverändert; analog auch $\delta \bar{t}$, $\delta \bar{\vec{r}}$

\leadsto In verschobenen Systemen gilt:

$\delta \bar{t} = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 \delta t + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial y'}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial z'}\right)_0 \delta z$ usw.

Da δt , $\delta \bar{t}$ beliebig, folgt aus dem Vergleich mit (*):

$\left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})}$, $\left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})}$, \dots

Aus (iii) (Homogenität von Raum und Zeit) folgt:

$\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)$, \dots unabhängig von der Lage des Ursprungs (bzgl. Raum und Zeit)

$\leadsto \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})}$; $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})}$; \dots für alle \vec{r} , t

\leadsto Partielle Ableitungen $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)$, \dots sind Konstanten!

\Rightarrow Transformation ist linear:
$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $L = L(V) \equiv \begin{pmatrix} L_{\bar{t}t} & L_{\bar{t}x} & L_{\bar{t}y} & L_{\bar{t}z} \\ L_{\bar{x}t} & L_{\bar{x}x} & L_{\bar{x}y} & L_{\bar{x}z} \\ L_{\bar{y}t} & L_{\bar{y}x} & L_{\bar{y}y} & L_{\bar{y}z} \\ L_{\bar{z}t} & L_{\bar{z}x} & L_{\bar{z}y} & L_{\bar{z}z} \end{pmatrix}$

Laut Voraussetzung: Ursprung in Σ , $\bar{\Sigma}$ bei $t = 0$, $\bar{t} = 0$ identisch

$\Rightarrow (t_0, x_0, y_0, z_0) = 0$

3.2.1.2 Schritt 2: y und z bleiben von Transformation unberührt

d.h. Transformation hat die Form
$$L = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

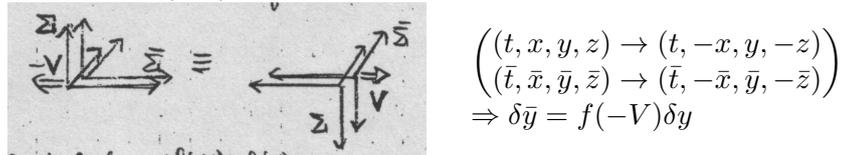
Folgt aus (ii): Isotropie des Raums

- Betrachte Verschiebung $(\delta t, \delta x, \delta y, \delta z) = (0, 0, \delta y, 0)$ im System Σ

\leadsto Verschiebung transformiert gemäß $(\delta \bar{t}, \delta \bar{x}, \delta \bar{y}, \delta \bar{z}) = (L_{\bar{t}y}, L_{\bar{x}y}, L_{\bar{y}y}, L_{\bar{z}y}) \delta y$

- δy zeichnet keine Richtung $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ aus \Rightarrow Es gibt keinen Grund, warum $\delta\bar{x}, \delta\bar{z}, \delta\bar{t}$ Vorzeichen "+" oder "-" haben sollte $\Rightarrow \delta\bar{x} = \delta\bar{z} = \delta\bar{t} = 0$
 $\Rightarrow L_{\bar{t}y} = L_{\bar{x}y} = L_{\bar{z}y} = 0$
- Bleibt $\delta\bar{y} = L_{\bar{y}y}\delta y$; $L_{\bar{y}y}$ hängt von V ab: $L_{\bar{y}y} = f(V)$.
 Umgekehrt gilt $\delta y = L_{y\bar{y}}\delta\bar{y}$ mit $L_{y\bar{y}} = f(-V)$ (Σ bewegt sich mit $-V$ relativ zu $\bar{\Sigma}$).

Aber: Transformation von ruhendem $\bar{\Sigma}$ zu mit Geschwindigkeit $(-V)$ bewegtem Σ ist äquivalent zu einer Transformation von ruhendem Σ zu mit Geschwindigkeit V bewegtem $\bar{\Sigma}$, wenn man beide um π (180) um y -Achse dreht:



Vergleich liefert: $f(-V) = f(V) \Rightarrow \delta\bar{y} = f(V)\delta y = f(V)^2\delta\bar{y}$
 $\Rightarrow f(V)^2 = 1 \Rightarrow f(V) = \pm 1 \Rightarrow L_{\bar{y}y} = \pm 1$

Weiterhin soll $f(V)$ stetig sein. Es gilt $L_{\bar{y}y}|_{V=0} = 1 \Rightarrow L_{\bar{y}y} \equiv 1$

- Betrachte nun Verschiebung $(\delta t, \delta x, \delta y, \delta z)$ mit $\delta y = 0$ im System Σ

$\leadsto \delta y$ transformiert gemäß $\delta\bar{y} = L_{\bar{y}t}\delta t + L_{\bar{y}x}\delta x + L_{\bar{y}z}\delta z$

Es gibt keine ausgezeichnete \bar{y} -Richtung \Rightarrow kein Grund, warum $\delta\bar{y}$ Vorzeichen "+" oder "-" haben sollte $\Rightarrow \delta\bar{y} = 0$ für alle $\delta t, \delta x, \delta z$
 $\Rightarrow L_{\bar{y}t} = L_{\bar{y}x} = L_{\bar{y}z} = 0$

- Analoge Überlegungen für z -Richtung liefern: $L_{\bar{t}z} = L_{\bar{x}z} = L_{\bar{z}t} = L_{\bar{z}x} = 0$,
 $L_{\bar{z}z} = 1$

3.2.1.3 Schritt 3: Leite allgemeine Form der Transformation L aus dem Relativitätsprinzip her (noch ohne II. Einsteinsches Postulat)

- Betrachte Geschwindigkeit eines in x -Richtung bewegten kräftefreien Teilchens.

Im System Σ ist die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$, im System $\bar{\Sigma}$: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$.

Zusammenhang folgt aus: $\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\bar{t}t} & L_{\bar{t}x} \\ L_{\bar{x}t} & L_{\bar{x}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{L_{\bar{x}t}dt + L_{\bar{x}x}dx}{L_{\bar{t}t}dt + L_{\bar{t}x}dx} = \frac{(L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}dx/dt)dt}{(L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}dx/dt)dt} = \frac{L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}v}{L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}v}$

Spezielle Wahl:

- $v = 0 \Rightarrow \bar{v} = -V \leadsto -V = \frac{L_{\bar{x}t}}{L_{\bar{t}t}} \Rightarrow L_{\bar{t}t} = -\frac{1}{V}L_{\bar{x}t}$
- $\bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = V \leadsto 0 = \frac{L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}V}{L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}V} \leadsto L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}V = 0$
 $\Rightarrow L_{\bar{x}x} = -\frac{1}{V}L_{\bar{x}t} (= L_{\bar{t}t})$

- Notation: Setze $\gamma(V) := L_{\bar{t}t} = L_{\bar{x}x}$, $\kappa(V) := -\frac{L_{\bar{t}x}}{\gamma} \cdot V$

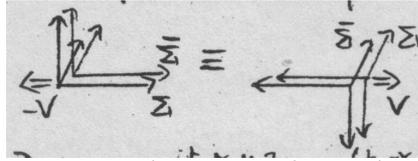
$$\leadsto \text{Transf. hat die Form: } \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & -\kappa(V)/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (*)$$

- Symmetrieüberlegungen:

- Rücktransformation $\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ entspricht Transformation mit Geschwindigkeit $-V$

$$\leadsto \text{hat die Form: } \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma(-V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(-V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (**)$$

- Rücktransformation ist äquivalent zu Transformation $\Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$ mit



Geschwindigkeit V , wenn $\Sigma, \bar{\Sigma}$ um $180 (\pi)$ um y -Achse gedreht und dann vertauscht werden.

$$\text{Drehung: } \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t & -x & y & -z \\ \bar{t} & -\bar{x} & \bar{y} & -\bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (***)$$

$$\text{Vertauschung: } \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ t & x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (***)$$

\leadsto Vergleich von $(**)$ mit $(***)$ liefert: $\gamma(-V) = \gamma(V)$, $\kappa(-V) = \kappa(V)$

- Fasse $(*)$ und $(***)$ zusammen:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \stackrel{(***)}{=} \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \kappa/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \kappa/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma^2 \begin{pmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\text{bzw. } \gamma^2 = 1/(1-\kappa) \Rightarrow \kappa < 1$$

$$\Rightarrow \text{Fazit: } L = \begin{pmatrix} \gamma & -\kappa\gamma/V & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit Bedingung } \gamma^2 = \frac{1}{1-\kappa}$$

3.2.1.4 Schritt 4: Folgerung aus Kausalität

Kausalität bedeutet: Zeitpfeil darf sich nicht umdrehen

$$\Rightarrow \gamma = L_{\bar{t}t} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right) > 0 \text{ für alle Transformationen}$$

Daraus folgt: $\kappa \geq 0$ bzw. $\gamma \geq 1$:

Andernfalls könnte man einen Winkel ϕ definieren mit: $\tan \phi := \sqrt{-\kappa}$

$$\leadsto \gamma = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \cos \phi, \quad \sin \phi = \gamma\sqrt{-\kappa}$$

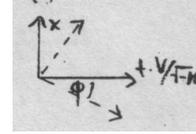
$$\leadsto -V\gamma = -\sin \phi \cdot (V/\sqrt{1-\kappa}), \quad -\frac{\kappa}{V}\gamma = \sin \phi \cdot (\sqrt{-\kappa}/V)$$

~> Transformation hätte die Form:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cdot (\sqrt{-\kappa}/V) \\ -\sin \phi \cdot (V/\sqrt{1-\kappa}) & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\text{oder } \begin{pmatrix} \bar{t} \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}} \\ x \end{pmatrix}$$

entspricht Drehung in der $(t \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}}, x)$ -Ebene



=> Diese Transformation kann im Prinzip mehrmals hintereinander ausgeführt werden ~> Drehung um Winkel $n\phi$

Aber: Irgendwann ist Gesamtwinkel $n \cdot \phi$ so groß, dass $\cos(n\phi)$ negativ wird ~> dann wäre für die kombinierte Transformation $\gamma < 0$ Widerspruch!

Notation: $\kappa = \beta^2 \quad (\in [0, 1]) \Rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

3.2.1.5 Zusammenfassung von Schritt 1 bis 4

Wir haben ohne Ausnutzung des II. Einsteinschen Postulates (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) hergeleitet, dass die Transformation die folgende Form haben muss:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\beta^2}{V}\gamma & 0 & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit einem freien Parameter $\beta(V) < 1$

und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

=> Allgemeine relativistische Transformation für Geschwindigkeitstransformation in x-Richtung

Beinhaltet sowohl Galileitransformation als auch Lorentztransformation

3.2.1.6 Schritt 5: Ausnutzen des II. Einsteinschen Postulats ~> Spezielle Lorentztransformation

Vorbemerkung: Form der Transformation steht weitgehend fest.

Es bleibt nur noch ein freier Parameter: β

Setzt man z.B. $\beta = 0$, so folgt $\gamma = 1$ und die

spezielle Galilei-Transformation:
$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

~> konsistent, da Galilei-Transformation ja auch relativistisch ist.

Nun aber: Verwendung des II. Postulats:

Für Teilchen (Photonen) mit Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt} = c$ in einem Inertialsystem Σ muss $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = c$ in allen Inertialsystemen $\bar{\Sigma}$ sein.

3.2.2.2 Form der Transformation

Mit der Definition $\beta =: \tanh \phi$ ($\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \phi}} = \cosh \phi, \beta\gamma = \sinh \phi$) kann Transformation auch umgeschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} ct \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\leadsto Formale Ähnlichkeit zur Drehung $\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

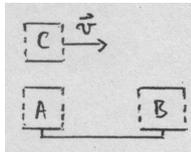
Noch deutlicher: Setze Zeitvariable auf imaginäre Achse und berücksichtige: $\cosh \phi = \cos(i\phi), \sinh \phi = i \cdot \sin(i\phi)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ict \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\phi) & \sin(i\phi) & & 0 \\ -\sin(i\phi) & \cos(i\phi) & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\leadsto Spezielle Lorentztransformation ist Drehung in der (ict, x) -Ebene um einen imaginären Winkel $i\phi$.

3.2.2.3 Beispiele

(i) Zeitdilatation



Systeme:

$\bar{\Sigma}$: Ursprung bei C, mitbewegt

Σ : Ursprung bei A, in Ruhe

$\leadsto t = \bar{t} = 0 \hat{=} C$ bei A

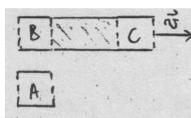
Dann: Zeitmessung, wenn C bei B vorbeikommt \rightarrow Zeiten t bzw. \bar{t}
Ort der Messung: x bzw. \bar{x} mit $\bar{x} = 0$ (Uhr C)

Umrechnung: $\begin{pmatrix} ct \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x \\ -\beta ct + x \end{pmatrix}$ mit $\bar{x} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = \beta ct, \bar{t} = \frac{1}{c}(ct - \beta x) = \gamma t(1 - \beta^2) \Rightarrow \boxed{\bar{t} = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}$ wie gehabt (siehe 3.1.4.1)

NB: Zeit in einer bewegten Uhr vergeht immer langsamer als für außenstehenden Beobachter (Eigenzeit)

(ii) Lorentzkontraktion



Systeme:

$\bar{\Sigma}$: Ursprung bei B, mitbewegt

Σ : Ursprung bei A, in Ruhe

$\leadsto t = \bar{t} = 0 \hat{=} B$ bei A am selben Ort.

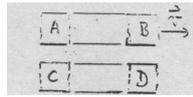
Zur Zeit $t = \bar{t} = 0$ sind die Ortskoordinaten der Uhr C x bzw. \bar{x} .

Umrechnung: $\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ mit $t = \bar{t} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \gamma x$
 $\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1 - \beta^2} \bar{x}}$ wie gehabt (siehe 3.1.4.2)

NB: Längenmessung benötigt zwei Ortsmessungen.

Müssen im jeweiligen Bezugssystem gleichzeitig durchgeführt werden.

(iii) Gleichzeitigkeit



Systeme:

$\bar{\Sigma}$: Ursprung bei A, bewegt

Σ : Ursprung bei C, ruhend

$\rightsquigarrow t = \bar{t} = 0 \hat{=} A$ bei C am selben Ort.

Betrachte zwei Ereignisse:

1. Ereignis: A bei C

\rightarrow Koordinaten $t = \bar{t} = 0, x = \bar{x} = 0$

2. Ereignis: B bei D

\rightarrow Koordinaten $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ ($x \neq 0$)

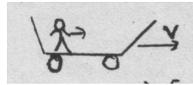
Falls 2. Ereignis mit 1. Ereignis im System Σ gleichzeitig:

$\rightsquigarrow t = 0 \rightsquigarrow \bar{t} = -\frac{1}{c}\beta\gamma x \neq 0 \rightsquigarrow$ nicht gleichzeitig in $\bar{\Sigma}$

Umgekehrt falls Ereignisse gleichzeitig in $\bar{\Sigma}$:

$\rightsquigarrow \bar{t} = 0 \rightsquigarrow t = -\frac{1}{c}\beta\gamma \bar{x} \neq 0 \rightsquigarrow$ nicht gleichzeitig in Σ

(iv) Addition von Geschwindigkeiten



Systeme: $\bar{\Sigma}$: bewegt mit Wagen; Σ : ruhend

\Rightarrow Geschwindigkeit der Person in $\bar{\Sigma}$: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$; in Σ : $v = \frac{dx}{dt}$

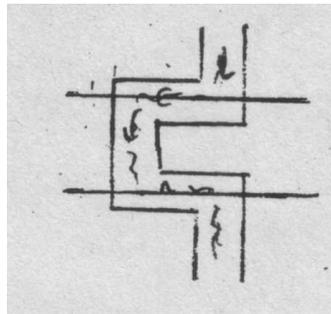
Umrechnung: $\begin{pmatrix} c d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dx}{c dt} = \frac{\beta c d\bar{t} + d\bar{x}}{c dt + \beta d\bar{x}} = \frac{\beta c + \bar{v}}{c + \beta \bar{v}}$

\Rightarrow (mit $\beta = V/c$) $\boxed{v = \frac{\bar{v} + V}{1 + \bar{v}V/c^2}}$ Geschwindigkeitsadditions-Theorem

Speziell $\bar{v} = c$ oder $V = c$: $v = (\bar{v} + c)/(1 + \bar{v}/c) = c$

Anwendung: Deutung des Fizeau-Experiments



Lichtgeschwindigkeit im Medium: $\bar{v} = \frac{c}{n} < c$
 (n =Brechungsindex)

Medium bewegt sich mit Geschwindigkeit V

\rightarrow Lichtgeschwindigkeit im fließenden

Medium für ruhenden Beobachter:

$$v = \frac{\bar{v} + V}{1 + \bar{v}V/c^2} = \frac{c/n + V}{1 + V/cn}$$

Grenzfall $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ (Taylorreihe):

$$v \approx c/n + V(1 - \frac{1}{n^2}) + \dots \quad \checkmark$$

3.2.3 Allgemeine Lorentz-Transformationen

Bisher: Spezieller Fall von Lorentztransformationen zwischen Inertialsystemen $\Sigma, \bar{\Sigma}$, die sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit V in x -Richtung bewegen - ansonsten gemeinsamer Ursprung bei $t = \bar{t} = 0$, nicht verdreht.

Nun allgemeiner: Transformationen, die im Einklang sind mit den Einsteinschen Postulaten, setzen sich zusammen aus:

(i) Spezielle Transformationen in x -Richtung wie gehabt ("Boosts")

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= \mathcal{B}_x(V) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \mathcal{B}_x(V) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \left(\beta = \frac{V}{c} = \tanh \phi, \gamma = \sqrt{1 - \beta^2} \right) \end{aligned}$$

(ii) Raumdrehungen (Rotationen)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & \mathcal{D} & & \\ 0 & & & \end{array} \right); \\ & \mathcal{D} \in SO(3): \text{Drehung wie in 1.1.3 (3x3-Matrix)} \end{aligned}$$

(iii) Translationen in Raum und Zeit

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

(iv) Spiegelungen in Raum und Zeit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ und} \\ \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(NB: „Zeitspiegelung“ $c\bar{t} = -ct$ wäre bisher nicht erlaubt gewesen, da sich Kausalität dann „umdreht“. Soll aber jetzt gestattet sein.)

Diese bilden zusammen die allgemeinen Lorentztransformationen

Beispiel für zusammengesetzte Transformation:

Transformation zwischen Inertialsystemen $\Sigma, \bar{\Sigma}$, die gegeneinander in beliebige Richtung mit Geschwindigkeit \vec{V} gleichförmig bewegt sind.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \mathcal{B}_x(V) \mathcal{R}^T \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \mathcal{B}(\vec{V}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit \mathcal{R} : Rotation, die x-Achse in Richtung \vec{V} dreht.

$$\left(\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{D} & \\ 0 & & & \end{array} \right), \mathcal{D} = \vec{V}/V \right.$$

$$\left. \Rightarrow \mathcal{B}(\vec{V}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & & & -\frac{\gamma}{c} \vec{V}^T \\ \hline -\frac{\gamma}{c} \vec{V} & \mathcal{D} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \mathcal{D}^T \end{array} \right) \right)$$

Ähnlich können beliebige Lorentztransformationen zusammengesetzt werden. Sollen nun systematischer untersucht werden.

3.2.3.1 Notation

- Definiere Vierdimensionalen Vektor $\{x^\mu\} = (ct, \vec{r})$; $\{x_\mu\} = (ct, -\vec{r})$

Index läuft von 0 bis 3: $x^0 = ct, (x^1, x^2, x^3) = \vec{r}$ etc.

Index oben: „kontravariant“
Index unten: „kovariant“
} „tieferer Sinn“: siehe Kapitel 3.3.2

- Transformationsmatrix für Lorentztransformation ohne Translation

4 × 4 - Matrix Λ^μ_σ

- Einsteinsche Summenkonvention

Über ein Paar gleichlautender hochgestellter und tiefgestellter Indizes wird automatisch summiert: $a_\mu b^\mu \hat{=} \sum_\mu a_\mu b^\mu$

~> Allgemeine Transformation wird geschrieben als:

$$\bar{x}^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu_\sigma x^\sigma}_{\text{gleichförmige Bewegung, Rotationen, Spiegelungen}} + \underbrace{a^\mu}_{\text{Translationen}}$$

- Definiere „metrischen Tensor“

$$\{g^{\mu\nu}\} = \{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$ (Kronecker-Symbol); $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

(Vorteil der Notation mit Indizes oben/unten (u.a.): erleichtert Buchhaltung)

3.2.3.2 Lorentztransformation und Linienelement

Definiere Linienelement: $\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$

Für Lichtausbreitung gilt $ds^2 = 0$ in allen Inertialsystemen.

(a) Allgemeiner gilt:

Linienelemente sind invariant unter allen Lorentztransformationen

(Beweis: Gilt für

- (i) Spezielle Lorentztransformationen $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = (\Lambda dx)_\mu (\Lambda dx)^\mu = (\gamma dx^0 - \beta\gamma dx^1)^2 - (-\beta\gamma dx^0 + \gamma dx^1)^2 - dx^2^2 - dx^3^2$$

$$= \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_1 (dx^0^2 - dx^1^2) - dx^2^2 - dx^3^2 = ds^2 \quad \checkmark$$
- (ii) Rotationen: $d\bar{x}^0 = dx^0, d\bar{\vec{r}} = d\vec{r} \Rightarrow d\bar{s}^2 = ds^2 \quad \checkmark$
- (iii), (iv): Translationen, Spiegelungen: klar! \checkmark
 \Rightarrow Gilt damit auch für alle Kombinationen von (i)-(iv) \checkmark

Folgerung: Die Transformationsmatrix erfüllt

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu} \text{ bzw. } \boxed{g = \Lambda^T g \Lambda}$$

(Beweis: $d\bar{s}^2 = d\bar{x}^\alpha g_{\alpha\beta} d\bar{x}^\beta = \Lambda^\alpha_\mu dx^\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu dx^\nu \stackrel{!}{=} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \quad \forall dx$
 $\Rightarrow \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu}$)

Damit gilt: * $\boxed{\det \Lambda = \pm 1}$

$$(g = \Lambda^T g \Lambda \Rightarrow \det g = \det \Lambda^T g \Lambda = (\det \Lambda)^2 \cdot \det g \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1)$$

* $\boxed{\Lambda^0_0 \geq 1}$

$$((\Lambda^T g \Lambda)_0^0 = \Lambda^0_0{}^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1 \Rightarrow \Lambda^0_0{}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1)$$

(b) Umgekehrt gilt folgender wichtige Satz:

Die Lorentztransformationen sind genau die Transformationen $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = f^\mu(x^\nu)$, die alle Linienelemente ds^2 invariant lassen.

Bemerkung: Häufig werden Lorentztransformationen über diese Forderung eingeführt: „Drehungen“ in einer Vierdimensionalen Raumzeit mit Metrik

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(„Metrik“: Abstand $\|x - y\| = (x^\mu - x^\mu)g_{\mu\nu}(x^\nu - y^\nu)$)

Beweis des Satzes

Notwendig: Bereits in (a) gezeigt (Lorentztransformationen lassen ds^2 invariant).

Hinreichend: Beweis in drei Schritten.

Betrachte eine Transformation, die alle ds^2 invariant lässt. Dann gilt:

(i) Die Transformation ist linear

$$ds^2 = d\bar{s}^2 \Rightarrow dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu g_{\alpha\beta} \quad \forall dx$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right) \text{ überall}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det\left\{\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\right\} &= \pm 1 \neq 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left[\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right) g_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad \forall \mu, \nu, \sigma \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} &\equiv 0 \Rightarrow (\text{da } \det\left\{\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\right\} \neq 0): \frac{\partial^2 \bar{x}^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \equiv 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} &= \text{const. } \checkmark \end{aligned}$$

\Rightarrow Transformation hat die Form: $\bar{x} = \Lambda x + a$ und analog zu (a) muss gelten: $\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1, \Lambda_0^0 \geq 1$

(ii) Annahmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

- $\det \Lambda = +1$ (andernfalls schreibe $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda'$,

betrachte fortan Λ')

- $\Lambda_0^0 = 1$ (andernfalls schreibe $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda'$,

betrachte fortan Λ')

- Vektor $(\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3) \neq 0$ (andernfalls ist Λ einfach eine Rotation:

$$\Lambda \text{ hat dann die Form } \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{ccc} M & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \Lambda^T g \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0{}^2 & \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 & \Lambda_0^0 \Lambda_0^2 & \Lambda_0^0 \Lambda_0^3 \\ \hline \Lambda_0^0 \Lambda_0^1 & -M^T M & & \\ \Lambda_0^0 \Lambda_0^2 & & & \\ \Lambda_0^0 \Lambda_0^3 & & & \end{array} \right) \stackrel{!}{=} g$$

$$\Rightarrow (\Lambda_0^0, \Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3) = (1, 0, 0, 0) \text{ und } M^T M = \mathbb{1} \quad)$$

(iii) Zerlegung der Transformationsmatrix Λ in: $\Lambda = \mathcal{R}_1 \mathcal{B}_x(V) \mathcal{R}_2^T$,

wobei \mathcal{R}_i : Rotationen und $\mathcal{B}_x(V)$: Boosts in x-Richtung

- Zunächst: Zerlege Λ in $\Lambda = \mathcal{R}_1 \tilde{\Lambda} \mathcal{R}_2^T$

mit \mathcal{R}_1 : Rotation, dreht x-Achse in den Vektor $(\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3)$

\mathcal{R}_2 : Rotation, dreht x-Achse in den Vektor $(\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3)$

$$\Rightarrow \tilde{\Lambda} \text{ hat die Form } \tilde{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} \tilde{\Lambda}_0^0 & \tilde{\Lambda}_0^1 & 0 & 0 \\ \hline \tilde{\Lambda}_0^1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{ccc} \tilde{M} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$$

mit $\tilde{\Lambda}_0^1 \neq 0$ laut Voraussetzung (ii) und \tilde{M} : 3×3 -Matrix

- Auch für $\tilde{\Lambda}$ gilt: $\tilde{M}^T g \tilde{M} = g, \det \tilde{\Lambda} = \det \Lambda = 1, \tilde{\Lambda}_0^0 = \Lambda_0^0 \geq 1$

Daraus folgt: \tilde{M} ist orthogonal und hat die Form $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\text{Denn: } \tilde{\Lambda}^T g \tilde{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} \tilde{\Lambda}_0^0{}^2 - \tilde{\Lambda}_0^1{}^2 & a^T & & \\ \hline a & A & & \end{array} \right) \stackrel{!}{=} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit: } a = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^0 - \tilde{M}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \tilde{M}^T \tilde{M}$$

$$a \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \tilde{M}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_0^0 \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{M}^T = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ mit } \tilde{\Lambda}_0^1 = \tilde{\Lambda}_0^0 \frac{\tilde{\Lambda}_0^1}{\tilde{\Lambda}_0^0}$$

$$A \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{M}^T \tilde{M} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 - (\tilde{\Lambda}_0^1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{M} \text{ orthogonal und hat die Form } \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \checkmark$$

- Dann: Definiere Rotation $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

⇒ Neue Zerlegung $\Lambda = \mathcal{B}_1 \mathcal{B} \mathcal{B}_2^T$

$$\text{mit } \mathcal{B} = \tilde{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^0 & \tilde{\Lambda}_1^0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Lambda}_0^1 & \tilde{\Lambda}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wieder gilt: $\mathcal{B}^T g \mathcal{B} = g$, $\det \mathcal{B} = \det \Lambda = 1$, $\mathcal{B}_0^0 = \Lambda_0^0 \geq 1$
 - Zeige: \mathcal{B} ist eine spezielle Transformation in x-Richtung

Denn:

$$\mathcal{B}^T g \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_0^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 & \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^1 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^1 & \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^1 \mathcal{B}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^1 = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1^0 / \mathcal{B}_0^1 = \mathcal{B}_1^1 / \mathcal{B}_0^0$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0{}^2 - \mathcal{B}_1^0{}^2 = \mathcal{B}_1^1{}^2 - \mathcal{B}_0^0{}^2 = 1$$

$$\det \mathcal{B} = \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^1 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0 = \mathcal{B}_1^1; \mathcal{B}_1^0 = \mathcal{B}_0^1; \mathcal{B}_0^0 = \sqrt{1 + \mathcal{B}_1^0{}^2} \quad (\geq 1 \text{ lt Voraussetzung})$$

$$\text{Definiere: } \gamma := \mathcal{B}_1^0; \beta := -\mathcal{B}_1^0 / \mathcal{B}_0^0 \Rightarrow \gamma = \dots = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{B} \text{ hat die Form } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \checkmark$$

3.2.3.3 * Analyse und Klassifizierung von allgemeinen Lorentztransformationen

(Vertiefende Information, nicht Stoff der Vorlesung)

(a) Allgemeine Lorentztransformationen und Poincaré-Gruppe

Allgemeine Form von Lorentztransformationen

$$\boxed{\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\sigma x^\sigma + a^\mu} \text{ mit Bedingung } \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

Eigenschaften:

- gemäß 3.2.3.2(a):

- $\det \Lambda = \pm 1$

- $\Lambda_0^0{}^2 \geq 1$

- Und: Lorentztransformationen bilden eine Gruppe

- Abgeschlossen: (Λ, a) bezeichne Transformation $\bar{x} = \Lambda x + a$
 Verknüpfung $(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')$

$$\rightsquigarrow \text{wieder Lorentztr., denn } (\Lambda' \Lambda)^T g (\Lambda' \Lambda) = \Lambda'^T \Lambda'^T g \Lambda \Lambda = g$$

- Assoziativ:

$$\begin{aligned} & [(\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2, a_2)](\Lambda_1, a_1) \\ &= (\Lambda_3 \Lambda_2, \Lambda_3 a_2 + a_3)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_3 \Lambda_2 a_1 + \Lambda_3 a_2 + a_3) \\ & (\Lambda_3, a_3)[(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)] \\ &= (\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) = (\Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_3 \Lambda_2 a_1 + \Lambda_3 a_2 + a_3) \end{aligned}$$

- Einselement:

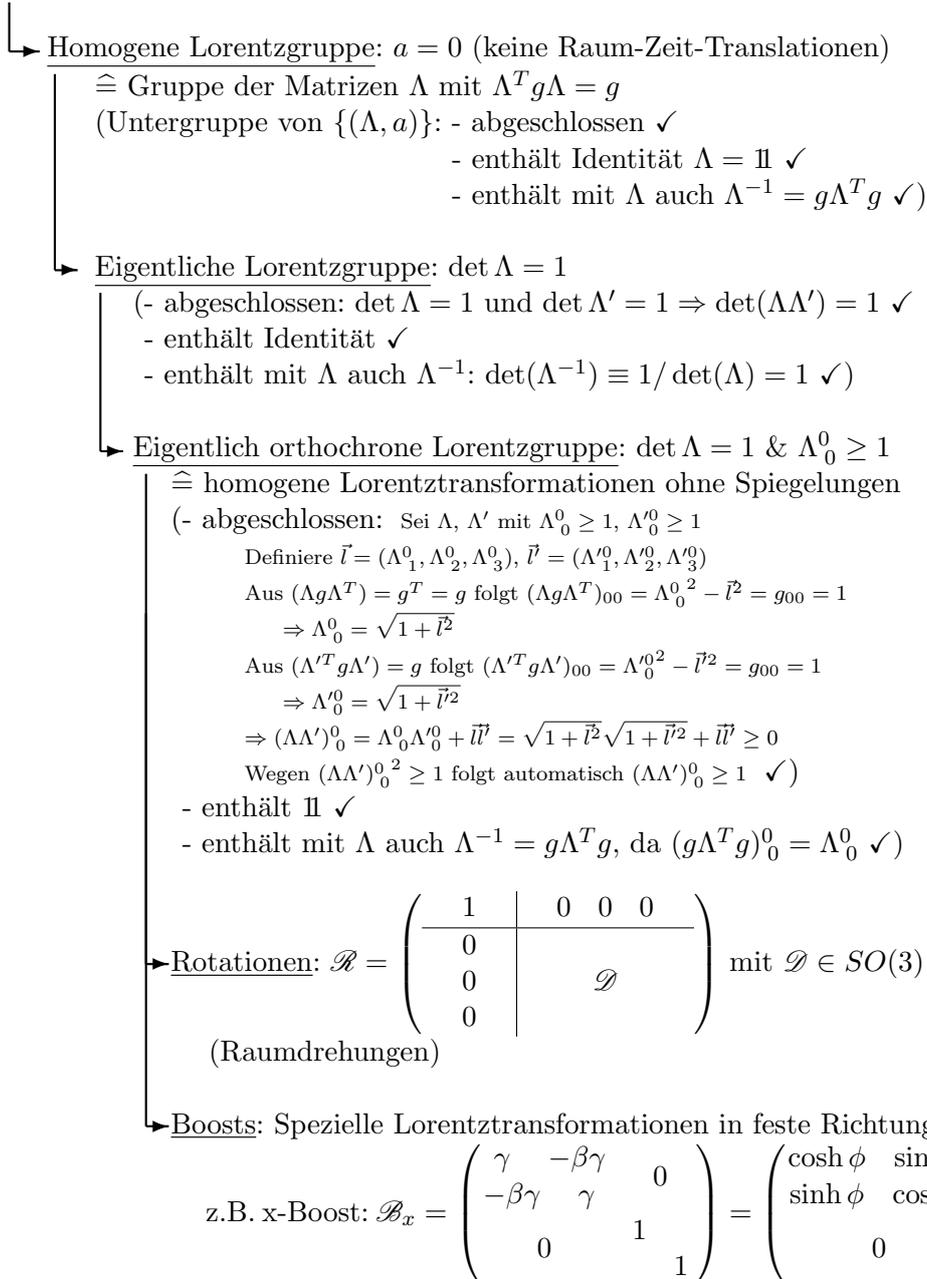
$$\text{Identität: } (\Lambda, a) = (\mathbb{1}, 0) \quad (\text{entspricht } \bar{x}^\mu = x^\mu)$$

- Inverses:
 $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ mit $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$
 denn $(g\Lambda^T g)\Lambda = gg = \mathbb{1}$;
 $\Lambda(g\Lambda^T g) = (\Lambda^T g^T g)^T g = g^T g = \mathbb{1}$

\leadsto Poincaré-Gruppe oder Inhomogene Lorentzgruppe

(b) Untergruppen der Poincaré-Gruppe

Poincaré-Gruppe (Λ, a)



(c) Struktur und Parameter der LorentzgruppeEs gilt:

Beliebige eigentlich orthochrone Lorentztransformationen Λ
 lassen sich zerlegen in: $\Lambda = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{B}_x(v) \cdot \mathcal{R}_2^T$
 mit: $\mathcal{B}_x(v)$: Boost in x-Richtung
 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$: Rotationen

(Beweis: In 3.2.3.2(b) bereits geführt unter (iii))

Alternative Zerlegung

$$\Lambda = \mathcal{R} \cdot \mathcal{B}(\vec{v})$$

mit: \mathcal{R} : Rotation

$$(\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^T)$$

 $\mathcal{B}(\vec{v})$: Boost in Richtung \vec{v}

$$(\mathcal{B}(\vec{v}) = \mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{B}_x(v) \cdot \mathcal{R}_2^T)$$

Folgerungen

- Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe ist zusammenhängend und hat sechs kontinuierliche Parameter
(3 für \vec{v} , 3 für Rotationen. Es lässt sich immer eine stetige Verbindung zum Einsoperator finden.)
- Die Poincaré-Gruppe (Λ, a) hat zehn kontinuierliche Parameter.
(3 für \vec{v} , 3 für Rotationen, 4 für Raumzeittranslationen.)
Sie ist nicht zusammenhängend (siehe unten).
- Die homogene Lorentzgruppe enthält vier unzusammenhängende Komponenten:

– L_+^\uparrow : eigentlich orthochrone Lorentzgruppe mit $\det \Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \geq 1$

– L_-^\uparrow : $\det \Lambda = -1$, $\Lambda_0^0 \geq 1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

– L_+^\downarrow : $\det \Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

– L_-^\downarrow : $\det \Lambda = -1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

Komponenten sind unzusammenhängend, da ein stetiges Überführen von $\det \Lambda = +1$ nach $\det \Lambda = -1$ bzw. von $\Lambda_0^0 \geq 1$ nach $\Lambda_0^0 \leq -1$ offensichtlich nicht möglich ist.

3.3 Raum-Zeit und Lorentzinvarianz

Fazit des vorherigen Abschnitts

Herleitung der Lorentztransformation aus dem Relativitätsprinzip und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

→ Transformation, die zwischen Inertialsystemen vermittelt.

Charakteristische Eigenschaft der Lorentztransformation:

Es existiert eine „Metrik“, vermittelt vom metrischen Tensor

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \text{ die unter der Transformation invariant ist.}$$

(Metrik: „Abstand“ zwischen zwei Punkten x, y ist

$$\|x - y\| = (x^\mu - x^\mu)g_{\mu\nu}(x^\nu - y^\nu))$$

Alternativ möglicher Zugang

$$\text{Festlegung der Metrik } g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

auf der Vierdimensionalen Raumzeit.

→ „Lorentz-Metrik“. Lorentztransformationen sind diejenigen Transformationen, die die Metrik erhalten.

↷ Metrik definiert eine Raum-Zeit-Struktur.

Diese charakterisiert die spezielle Relativitätstheorie.

Fragen in diesem Abschnitt

1. Wie sieht diese Raum-Zeit-Struktur aus? (→ 3.3.1)
2. Wie müssen sinnvolle physikalische Größen in dieser Struktur beschaffen sein? (→ 3.3.2)
3. Wie müssen physikalische Gesetze in dieser Struktur formuliert werden? (→ 3.3.3)
(vgl. Relativitätsprinzip: Inertialsysteme sollen bzgl. aller Naturgesetze äquivalent sein.)

3.3.1 Minkowski-Diagramm und Lichtkegel

Zur ersten Frage:

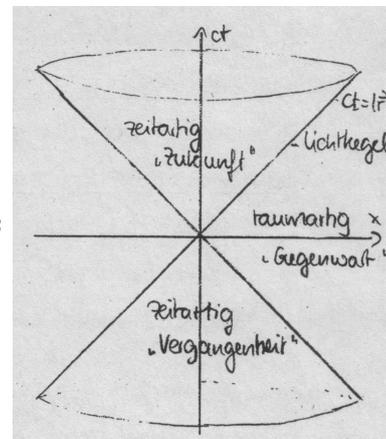
Wie sieht Raum-Zeit-Struktur aus?

↷ Geometrische Veranschaulichung

- Weltpunkt: $x = (ct, \vec{r}) \hat{=} \text{Ereignis}$
- Abstand zwischen Ereignissen x, y
 $s^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu) = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2$
unabhängig vom Bezugssystem

Mögliche Fälle:

- (i) $s^2 > 0$: Abstand zeitartig
- (ii) $s^2 = 0$: Abstand lichtartig
- (iii) $s^2 < 0$: Abstand raumartig



Fall (i): Im Prinzip kann ein Massenpunkt hintereinander bei beiden Ereignissen anwesend sein (z.B. ein Massenpunkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{(\Delta\vec{r})^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{c^2 - s^2}/(\Delta t) < c$)

\leadsto kausaler Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen möglich.

Dagegen: Es kann kein Inertialsystem geben, in dem Ereignisse gleichzeitig sind. (Dann wäre $\Delta t = 0 \leadsto s^2 = -(\Delta\vec{r})^2 < 0$.)

Fall (iii): Es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind.

Dagegen: Kausaler Zusammenhang nicht möglich

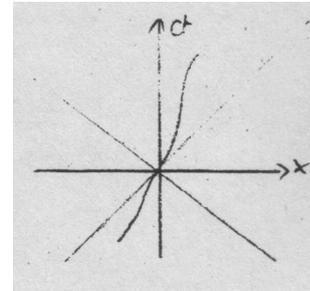
(zumindest nicht, wenn durch Teilchen oder Lichtsignal vermittelt.)

Fall (ii): „Lichtkegel“: Separiert zeitartige und raumartige Bereiche. Trennt zwei getrennte zeitartige Bereiche ab: „Zukunft“ und „Vergangenheit“ \rightarrow kausale Reihenfolge eindeutig: Wenn Ereignis x Ereignis y beeinflussen kann, dann nicht umgekehrt!

- Weltlinie: Bahnkurve eines materiellen Körpers

in der Raumzeit bzw. Verlauf eines Signals.

$(ct, \vec{r}) \hat{=}$ muss lokal zeitartig sein, d.h. $ds^2 > 0$ entlang der Kurve.



Charakterisierung einer Weltlinie:

- Eigenzeit: „Bogenlänge“ s bzw. Zeit τ in einer Uhr, die dem Massenpunkt bzw. Signal genau folgt: $d\tau = ds/c$

(in einem Inertialsystem, das genau die momentane Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ des Massenpunkts hätte, wäre $d\vec{r} = 0 \Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 \equiv c^2 d\tau^2$)

NB: Gegenüber einem äußeren, „ruhenden“ Beobachter gilt stets: Die Zeit des Beobachters vergeht schneller als

die Eigenzeit: Die Eigenzeit geht nach: $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$

\rightarrow Parametrisierung der Weltlinie: $x(\tau)$

- Weltgeschwindigkeit: $u(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = (c \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau})$.

Mit $dt = d\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma d\tau$ folgt:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \vec{v} \Rightarrow u(\tau) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

3.3.2 Viererskalare, Vierervektoren, Vierertensoren

Zur zweiten Frage: Wie sehen in der Raum-Zeit-Struktur der speziellen Relativitätstheorie sinnvolle physikalische Größen aus?

3.3.2.1 Klassifizierung

Wie in der Newtonschen Mechanik (1.1.1.2)

über Transformationsverhalten bei Wechsel des Inertialsystems.

Betrachte dabei nur homogene Lorentztransformationen, also keine Translationen. Transformationsmatrix sei $\{\Lambda^\mu_\sigma\}$

- Viererskalar oder Welskalar
Einkomponentige Größe, unter Lorentztransformationen invariant
Beispiele: Abstandsquadrat s^2 ; Eigenzeit τ
- Vierervektor oder Weltvektor
Vierkomponentige Größe, zwei Typen:
 - kontravariante Vektoren: $\{a^\mu\} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$
Transformieren gemäß $\bar{a}^\mu = \Lambda^\mu_\sigma a^\sigma$
Beispiele: Ortsvektor $\{x^\mu\}$, Weltgeschwindigkeit $\{u^\mu\} = \left\{\frac{dx^\mu}{d\tau}\right\}$
 - kovariante Vektoren: $\{b_\mu\} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$
Transformieren gemäß $\bar{b}_\mu = b_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\tau g^{\tau\sigma} b_\sigma$
(In Matrixschreibweise: $\bar{b}^T = b^T (\Lambda^{-1})$ bzw. $\bar{b} = (\Lambda^{-1})^T b = g \Lambda g b$.
Letzteres folgt aus $g = \Lambda^T g \Lambda \Rightarrow (\Lambda^{-1})^T g = g \Lambda \xRightarrow{g^2=1} (\Lambda^{-1})^T = g \Lambda g$)
Beispiele:
 - $\{x_\mu\}$ mit $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$
 - Gradient $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ($\partial_\mu \rightarrow \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \underbrace{\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\right)}_{(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \partial_\sigma$)
d.h. falls $\phi(x)$ Skalar $\rightarrow \partial_\mu \phi(x)$ kovarianter Vierervektor,
falls $A^\mu(x)$ Vierervektor $\rightarrow \partial_\mu A^\mu(x)$ Skalar, etc.
(NB: Gilt so nur, wenn Λ unabhängig von x ,
also nicht mehr in allgemeiner Relativitätstheorie)

- Vierertensor n-ter Stufe
 4^n komponentige Größe

- kontravariant: $\bar{t}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\sigma_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\sigma_n} t^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$
- kovariant: $\bar{t}_{\mu_1 \dots \mu_n} = t_{\sigma_1 \dots \sigma_n} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\mu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\mu_n}$
- gemischt: $\bar{t}^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_p} = \Lambda^{\mu_1}_{\sigma_1} \dots \Lambda^{\mu_l}_{\sigma_l} t^{\sigma_1 \dots \sigma_l}_{\rho_1 \dots \rho_p} (\Lambda^{-1})^{\rho_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\rho_p}_{\nu_p}$
($p + l = n$)
Beispiel: gemischter Tensor 2. Stufe $A^\mu_\nu \rightarrow \bar{A}^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\sigma A^\sigma_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\nu$
 $\cong \bar{A} = \Lambda A \Lambda^{-1}$: übliches Transformationsverhalten für Matrizen.

3.3.2.2 Rechenregeln

(ohne Beweis)

- Skalarprodukt: $a_\mu b^\mu \rightarrow$ macht aus zwei Vektoren einen Skalar
Beispiele:
 $x_\mu x^\mu$: Längenquadrat
 $\partial_\mu \partial^\mu$: d'Alembert-Operator $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta =: \square$
Skalarer Operator, d.h. wenn $\phi(x)$ skalar $\Rightarrow \square \phi$ skalar.

- Tensorprodukt:
 $a_\mu b^\nu \rightarrow$ macht aus zwei Vierervektoren einen Vierertensor
 Verallgemeinerung:
 $A^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_p} B^{\rho_1 \dots \rho_q}_{\tau_1 \dots \tau_r} \rightarrow$ Tensor $(l + p + q + r)$ ten Grades
- Produkt: A^μ_ν Vierertensor, b^ν Vierervektor $\Rightarrow A^\mu_\nu b^\nu$ Vierervektor
- Herauf- und Herunterziehen eines Index:
 $T^{\dots \alpha \dots} = g^{\alpha\beta} T^{\dots \beta \dots}$ bzw. $T^{\dots \alpha \dots} = g_{\alpha\beta} T^{\dots \beta \dots}$
- Verjüngung:
 $T^{\mu_1 \dots \alpha \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_p} \rightarrow$ macht aus Tensor n-ter Stufe Tensor (n-2)-ter Stufe
 (Summe über α !)
- Spezielle Tensoren:

$$- g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} :$$

gleiche Form in allen Bezugssystemen

- $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$: vollständig antisymmetrischer Tensor mit $\varepsilon_{0123} = 1$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutationen } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ von } (0123) \\ -1 & : \text{ungerade Permutationen } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ von } (0123) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

\leadsto ebenfalls gleiche Form in allen Bezugssystemen

3.3.3 Kovarianz-Forderung an Naturgesetze

Zur dritten Frage: Wie müssen Naturgesetze beschaffen sein, um in Einklang mit dem Relativitätsprinzip zu sein?

Folgerung: Naturgesetz muss unter Lorentztransformationen forminvariant sein
 (\leftrightarrow „kovariant“)

\leadsto Ist genau dann erfüllt, wenn es nur „physikalisch sinnvolle Größen“ mit bekanntem Transformationsverhalten im Sinne von 3.3.2 enthält, und wenn alle Terme der Gleichung für das Naturgesetz Welt-Tensoren gleicher Stufe sind.

3.4 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik im Vakuum

Erste Anwendung des Kovarianzprinzips von 3.3:

Suche nach kovarianter Formulierung für Maxwellgleichungen im Vakuum.

Erinnerung (Abschnitt 2.1)

Gegenstand der Elektrodynamik ist der Zusammenhang zwischen elektromagnetischen **Feldern** $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und **Ladungsdichten** $\rho(\vec{r}, t)$.

Es gilt die **Kontinuitätsgleichung** $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.

Die **Maxwellgleichungen im Vakuum** lauten

$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

inhomogene
Maxwellgleichungen

homogene
Maxwellgleichungen

Lösung der homogenen Maxwellgleichungen durch Einführung **elektromagnetischer Potentiale** Φ, \vec{A} mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$.

Bei der Festlegung von Φ, \vec{A} hat man eine **Eichfreiheit**. Naheliegender hier ist **Lorenzgleichung**: $\frac{1}{c}\partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$. Damit lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen: $\square\Phi = 4\pi\rho$, $\square\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Fazit: Sieht eigentlich ganz erfolgversprechend aus.

Vermutung: $(c\rho, \vec{j})$ und (Φ, \vec{A}) sind Vierervektoren. \vec{E}, \vec{B} lassen sich irgendwie durch Vierergrößen darstellen.

3.4.1 Vierergrößen der Elektrodynamik

1) **Viererstrom**: $\{j^\mu\} = (c\rho, \vec{j})$ ist Vierervektor.

Überprüfung: Betrachte ein infinitesimales Volumen dV mit Ladung dQ , das sich mit Geschwindigkeit $\{j^\mu\}$ bewegt $\Rightarrow \{j^\mu\} = \frac{dQ}{dV}(c, \vec{v})$.

Im mitbewegten System ist $\{\vec{j}^\mu\} = \frac{dQ}{dV}(c, 0, 0, 0)$.

Zusammenhang: $dV = d\bar{V} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\bar{V}/\gamma$

(Lorentzkontraktion in Richtung von \vec{v} .)

$\Rightarrow \{j^\mu\} = \frac{dQ}{d\bar{V}}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \rho_0(\tau)u(\tau)$

mit $\rho_0(\tau)$: Ladungsdichte im mitbewegten System, lorentzinvariant

$u(\tau)$: Weltgeschwindigkeit (3.3.1), Vierervektor. ✓

Kovariante Form der **Kontinuitätsgleichung**: $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2) **Viererpotential:** $\{A^\mu\} = (\Phi, \vec{A})$ sei Vierervektor (Ansatz)

mit kovariant formulierbarer **Eichbedingung**,
z.B. Lorenzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$.

3) **Elektromagnetische Felder:** $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \nabla\Phi$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = -\partial_0 A^1 - \partial_1 A^0 = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0), \text{ analog } E_y, E_z.$$

$$B_x = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2), \text{ analog } B_y, B_z.$$

Motiviert Definition eines **Feldstärketensors**

$$F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad \text{bzw.} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

NB: $F^{\mu\nu}$ ist eichinvariant:

$$\begin{aligned} & \text{(Betrachte allgemeine Eichtransformation } A^\mu \rightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda(\vec{r}, t). \\ \Rightarrow F^{\mu\nu} & \rightarrow F^{\mu'\nu'} = (\partial^\mu A^{\nu'} - \partial^{\nu'} A^\mu) = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) - \partial^{\nu'} (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \\ & = \partial^\mu A^\nu - \partial^{\nu'} A^\mu \underbrace{(\partial^\mu \partial^{\nu'} - \partial^{\nu'} \partial^\mu) \Lambda}_0 = F^{\mu\nu} \checkmark \end{aligned}$$

\Rightarrow Elektromagnetische Felder werden durch Vierertensor beschrieben!

3.4.2 Maxwellgleichungen in kovarianter Form

1) In **Potentialschreibweise** in der **Lorenzeichung**:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \text{mit Eichbedingung} \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

2) Ausgedrückt durch **Felder**:

- **Inhomogene** Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$
(Einsetzen in 1): $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu} - \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu}_{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0} \checkmark$

NB: Diese Gleichung gilt unabhängig von der Eichung, da sie nur eichinvariante Größen enthält.

- **Homogene** Maxwell-Gleichungen ($\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0$)

Definiere **dualen Feldtensor** $\widehat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}$

mit ϵ : Vierdimensionales Analogon vom Levi-Civita-Tensor:
Vollständig antisymmetrisch, $\epsilon^{0123} = 1$.

Dann sind homogene Maxwell-Gleichungen $\Leftrightarrow \partial_\mu \widehat{F}^{\mu\nu} = 0$

Alternativ: Jacobi-Identität $\partial_\nu F_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\lambda} = 0$
für beliebige Triplets $\nu\lambda, \sigma \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(Beweis in beiden Fällen: Stures Einsetzen und Durchrechnen,
"Übungsaufgabe").

3.5 Relativistische Mechanik

Wir wissen nun, wie Naturgesetze aufgebaut sein müssen, damit sie kovariant sind und dem Relativitätsprinzip genügen.

Kovarianzprinzip konnte sehr schön am Beispiel der Elektrodynamik illustriert werden. Dabei haben wir aber einen Beitrag ausgespart: Die Lorentzkraft.

Grund: Kovariante Formulierung von *mechanischen* Kraftgesetzen ist nicht so einfach. Z.B. ist das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ nicht kovariant.

Frage: Was tritt an die Stelle?

3.5.1 Relativistisches Kraftgesetz

Gesucht: Kraftgesetz für ein einzelnes Teilchen der Geschwindigkeit \vec{v}

Forderungen: (i) Gesetz soll kovariant sein (\rightarrow Vierervektor-Gleichung)
 (ii) Im Grenzfall $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ soll Newtonsches Gesetz herauskommen.
 (insbesondere: vektorielle Gleichung)

Ansatz: $K^\mu = m \cdot \frac{d}{d\tau} u^\mu$ mit

m : Masse im mitbewegten System \rightarrow invariant, Viererskalar.

$\{u^\mu\}$: Vierergeschwindigkeit \rightarrow Vierervektor

$\{\frac{d}{d\tau} u^\mu\}$: Viererbeschleunigung, Vierervektor

$\{K^\mu\}$: Noch zu bestimmender Vierervektor: Minkowski-Kraft

\leadsto Kovariante Gleichung \checkmark

Aber: Es muss noch ein Bezug zu physikalisch messbaren Kräften hergestellt werden

Kandidaten: „Einsteinkraft“ und „Newtonkraft“

3.5.1.1 Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Einstein-Kraft“

„Einstein-Kraft“:

Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ auf ein Teilchen in einem Inertialsystem, das sich zu einem gegebenen Zeitpunkt genau mit dem Teilchen mitbewegt (mit dessen momentanen Geschwindigkeit \vec{v}).

Diese Kraft kann lokal gemessen werden.

Im mitbewegten Inertialsystem gilt: $\vec{K} = m(0, \frac{d\vec{v}}{d\tau}) = (0, \vec{F})$

$$\gamma = 1, d\gamma = d \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

$$\Rightarrow dt = \gamma d\tau = d\tau; du = d(\gamma c, \gamma \vec{v}) = (c, \vec{v}) d\gamma + \gamma(0, d\vec{v}) = (0, d\vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\tau} = (0, \frac{d\vec{v}}{d\tau})$$

Im ruhenden System wird Minkowski-Kraft rücktransformiert:

$$K^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{K}^\nu \text{ mit } \Lambda = \mathcal{B}(-\vec{v}): \text{Boost für Geschwindigkeit } (-\vec{v})$$

Speziell: Boost \vec{v} in x-Richtung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma F_x \\ \gamma F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (*)$$

Verallgemeinerung auf beliebige \vec{v} :

Zerlege $\vec{K} := (K^1, K^2, K^3)$ und \vec{F} in Komponenten parallel (\parallel) und senkrecht (\perp) zu \vec{v}

$$\rightsquigarrow \vec{F}_{\parallel} = \frac{1}{v^2} (\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}; \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}; \text{ analog } \vec{K} = \vec{K}_{\parallel} + \vec{K}_{\perp}$$

Vergleich mit (*) $\Rightarrow K^0 = \beta\gamma F_{\parallel}, \vec{K}_{\parallel} = \gamma \vec{F}_{\parallel}, \vec{K}_{\perp} = \vec{F}_{\perp}$

$$\rightsquigarrow \vec{K} = \vec{K}_{\parallel} + \vec{K}_{\perp} = \gamma \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2} + (\vec{F} - \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2}) = \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2} (\gamma - 1)$$

$$= \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \quad (\text{wegen } \frac{\gamma - 1}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1})$$

$$K^0 = \beta\gamma F_{\parallel} = \beta\gamma \frac{(\vec{F}\vec{v})}{v} = \gamma \cdot \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c}$$

$$\Rightarrow \text{Zusammenhang: } \boxed{K = \left(\gamma \cdot \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c}, \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right)}$$

Bemerkung: Im allgemeinen Fall zeigen $\vec{K} = (K^1, K^2, K^3), \vec{F}$ und die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ in drei verschiedene Richtungen!

$$(\text{Transformation von Beschleunigung } \vec{a} \text{ siehe Übungsaufgabe } \rightsquigarrow m\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma+1} \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2})$$

3.5.1.2 Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Newton-Kraft“

„Newton-Kraft“: Zeitliche Änderung einer Größe \vec{p} („Impuls“), die in abgeschlossenen Inertialsystemen erhalten ist: $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

\rightsquigarrow in elastischen Prozessen kann Messvorschrift angegeben werden.
(Impulsänderung eines Teilchens \leftrightarrow Kraft auf anderes Teilchen)

Kandidat für die Erhaltungsgröße: Viererimpuls $p = m \cdot u \equiv (p^0, \vec{p})$

(siehe dazu das nächste Kapitel, 3.5.2)

$$\Rightarrow \text{Newtonkraft } \boxed{\vec{f} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v})} \quad (\text{wegen } u = (\gamma c, \gamma\vec{v}))$$

Vergleich mit Minkowski-Kraft: $K = m \frac{du}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} \equiv (K^0, \vec{K})$

$$\Rightarrow \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \vec{K} \cdot \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \vec{K} = \gamma \vec{f}$$

Weiterhin ist aus 3.5.1.1 bekannt:

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \text{ und } \vec{K} = \gamma \vec{f} = \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \quad (\vec{F} \text{ Einsteinkraft})$$

$$\Rightarrow K^0 = \gamma \cdot \frac{\vec{f}\vec{v}}{c}$$

$$(\text{Einsetzen: } \gamma \frac{\vec{f}\vec{v}}{c} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} + \frac{(\vec{F}\vec{v})v^2}{c^3} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \underbrace{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^2\right)}_{\gamma} = \gamma \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \checkmark)$$

$$\Rightarrow \text{Zusammenhang insgesamt: } \boxed{K = \left(\gamma \frac{\vec{f}\vec{v}}{c}, \gamma \vec{f} \right)}$$

3.5.2 Viererimpuls und Energie-Impuls-Erhaltung

3.5.2.1 Definition und Eigenschaften des Viererimpulses

* Definition: $\boxed{\{p^\mu\} = \{m\gamma u^\mu\} = (m\gamma c, m\gamma \vec{v})}$ (siehe 3.5.2.2)
 \leadsto Transformationsverhalten eines Vierervektors

* Eigenschaften:

- Norm: $p_\mu p^\mu = p^{02} - \vec{p}^2 = (m\gamma c)^2 - (m\gamma \vec{v})^2 = (m\gamma c)^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = m^2 c^2$
 $\Rightarrow \boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2} > 0$: zeitartig
- Element p^0 : $m\gamma c > 0 \rightarrow$ „zukunfts“artig
- Grenzverhalten bei $v/c \rightarrow 0$: (nichtrelativistischer Übergang)
 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow p^\mu = (mc + \frac{m}{2} \frac{v^2}{c}, m\vec{v}) + \dots$
 $\Rightarrow \boxed{\{p^\mu\}_{v/c \rightarrow 0} \approx (\frac{1}{c}(mc^2 + T_{n.r.}), \vec{p}_{n.r.}) + \mathcal{O}(v^2/c^2)}$
 wobei $T_{n.r.}$ nichtrelativistische kinetische Energie
 und $\vec{p}_{n.r.}$ nichtrelativistischer Impuls

* Motiviert Terminologie und Notation

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)} \text{ „Energie-Impuls-Vektor“}$$

mit \vec{p} : relativistischer Impuls
 E : relativistische Energie

$$\text{Zusammenhang: } \boxed{E = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}$$

Energie wird weiter zerlegt in:

„Ruheenergie“: $E_0 = mc^2$

„Relativistische kinetische Energie“: $T_r = E - E_0$

Weiterhin wird oft eingeführt:

$$\text{Bewegte Masse: } \boxed{m(v) = \gamma \cdot m = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(\leftrightarrow „Ruhmasse“ $m_0 = m$)

Damit kann man schreiben:

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m(v) \cdot \vec{v}$

Relativistische Energie: $E = m(v) \cdot c^2$

Nachteil dieser Schreibweise: $m(v)$ ist kein Welt-Tensor.

Dagegen ist Ruhmasse m ein Lorentz-Skalar.

\rightarrow Benutzung von $m(v)$ erschwert kovariante Schreibweise,
 soll daher hier weitgehend vermieden werden!

* Grenzübergang zu masselosen Teilchen

Übergang $m \rightarrow 0$ im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall ohne weiteres möglich (z.B. Photonen)

Man erhält Vierervektor p mit $\boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = 0}$ lichtartig

→ p hat die Form $p = (|p|, \vec{p})$

Vergleich mit $m\gamma(c, \vec{v}) \rightarrow$ Geschwindigkeit $|\vec{v}| = c$

Energie: $E = |\vec{p}| \cdot c$

3.5.2.2 Energie- und Impulserhaltung

„Plausibilitätsbetrachtungen“

In der nichtrelativistischen Physik folgt aus der Homogenität von Raum und Zeit die Energie- und Impulserhaltung. Wie sieht das hier aus?

„Herleitung“ im Moment nicht möglich.

(Bislang noch keine allgemeine Aussagen über Wechselwirkungen und „Potentiale“, wie diejenigen, die in 1.1.5 benutzt wurden.)

Aber: Erhaltungssätze in der nichtrelativistischen Physik sehr stark verankert, konform mit allen Erfahrungen!

→ Annahme: Es gibt so etwas ähnliches auch relativistisch.

In abgeschlossenen Inertialsystemen gibt es eine „Energie“ und einen „Impuls“, die Erhaltungsgrößen sind.

Frage: Welche Größen kommen dafür in Frage?

(müssten im nichtrelativistischen Grenzfall zur nichtrelativistischen Energie und nichtrelativistischem Impuls werden)

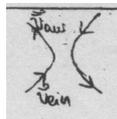
Vermutung (naheliegenderweise): Energie-Impuls-Vektor $p = mu$

Diese Vermutung soll anhand zweier Modellsituationen getestet werden. Ein Beweis ist, wie oben erwähnt, aktuell nicht möglich.

(i) Ein kräftefreies Teilchen

„Kräftefrei“ → Einstein-Kraft $\vec{F} = 0 \rightarrow$ Minkowski-Kraft $K = 0$
Mit $K = \frac{dp}{d\tau}$ folgt $\frac{dp}{d\tau} = 0 \Rightarrow p = \text{const.}$

(ii) Zwei identische Teilchen, elastischer Stoß



Wähle als Bezugssystem dasjenige Inertialsystem, in dem die Teilchen vor dem Stoß mit entgegengesetzter Geschwindigkeit $\pm \vec{v}_{\text{ein}}$ aufeinander zufliegen.

Falls „Energie“- und „Impuls“-erhaltung gilt, müssen sie nach dem Stoß entgegengesetzt auseinanderfliegen mit $\pm \vec{v}_{\text{aus}}$, wobei die absolute Geschwindigkeit dieselbe sein muss wie vor dem Stoß:

$$|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}|$$

→ Gesamtviererimpuls $p = m(u_1 + u_2) = (2\gamma(v)mc, \vec{0}) = \text{const.}$

→ Bleibt auch in jedem anderen Inertialsystem konstant!

Fazit: Viererimpuls ist in unseren Modellsituationen tatsächlich erhalten.

Wir wollen nun fordern, dass er generell erhalten ist.

Folgerung: Energie- und Impulserhaltung sind eng verknüpft.

Ein Erhaltungssatz kann nicht ohne den anderen gelten.

(Denn: Energie und Impuls gehen in verschiedenen Inertialsystemen ineinander über.)

3.5.2.3 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Betrachte inelastischen Stoß oder Explosion

Nichtrelativistische Mechanik: Impulserhaltung, aber keine Energieerhaltung

Relativistisch: Ein Erhaltungssatz kann nicht alleine gelten

Einsteins Forderung: Viererimpuls in solchen Fällen ganz erhalten!

↪ Gesamtenergie $E = \text{const.}$

↪ Geht nur, wenn kinetische Energie in Ruheenergie übergehen kann und umgekehrt \Rightarrow Ruhmasse m ändert sich

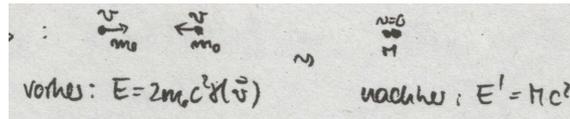
\Rightarrow Äquivalenz von Masse und Energie

$$E = m(v)c^2$$

mit $m(v) = m\gamma$ (gemäß 3.5.2.1)

Folgerungen und Beispiele:

- Inelastischer Stoß:



$$E = E' \Rightarrow M = 2m_0 \gamma(v) > 2m_0$$

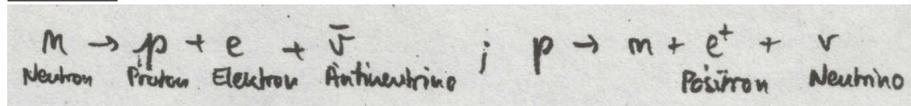
\rightarrow Kinetische Energie geht in Ruheenergie über.

(hier: effektive „Ruheenergie“: erhöhte Wärmebewegung im Körper)

- Massenzuwachs, wenn 100 kg um 1 km gehoben werden:

$$\Delta m = 10^{-12} \text{ kg}$$

- β -Zerfall:



Es gilt: $m_n = 1.0087 \mu$; $m_p = 1.0073 \mu$; $m_e = 5 \cdot 10^{-4} \mu$; $m_\nu \approx 0$

\rightarrow Freies Neutron kann zerfallen, freies Proton nicht (nur im Kern)

- Atombombe: Kraftwirkung durch Massenverlust von $\sim 0.1\%$
- Sonne: Massenverlust $\frac{\Delta m}{\Delta t} \sim 4 \cdot 10^{12} \text{ kg/s}$

3.6 Ausblick: Das starke Äquivalenzprinzip

Wir haben gesehen: Die spezielle Relativitätstheorie, basierend auf den Einsteinschen Postulaten, löst alle eingangs angesprochenen theoretischen und experimentellen Fragen. Sie ist experimentell gut überprüft.

Allerdings wirft sie neue Fragen auf: Die Maxwell-Theorie kann man zwar gut mit dem Relativitätsprinzip in Einklang bringen, aber das Gravitationsgesetz passt nun nicht mehr hinein.

Problem: Newtons Gravitationsgesetz wirkt instantan. In einer Theorie ohne absolute Gleichzeitigkeit ist das nicht möglich

~> Frage: Gibt es also doch wieder ein bevorzugtes Inertialsystem, in dem das Gravitationsgesetz gilt? Hat man die Gültigkeit des Relativitätsprinzips bzgl. eines Naturgesetzes (Maxwellsche Gleichungen) auf Kosten der Relativität eines anderen Naturgesetzes (Gravitationsgesetz) erkaufte?
(Beachte: Gravitationsgesetz ist Galilei-invariant)
Wo soll da der Fortschritt sein?

Einsteins Ausweg: Man braucht eine neue Gravitationstheorie.

Ausgangspunkt: Verschärftes Relativitätsprinzip

Betrachte Beobachter in einem abgeschlossenen Aufzug.

Beobachter fühlt sich kräftefrei: Dann gibt es für ihn keine Möglichkeit festzustellen, ob der Aufzug sich gerade im freien Fall befindet oder im Weltall im intergalaktischen Raum schwebt (fern jeder Materie).

Beobachter spürt eine Kraft: Er kann nicht entscheiden, ob die Kraft die Gravitationskraft zu einer schweren Masse außerhalb des Aufzugs ist, oder ob der Aufzug beschleunigt ist.

(Voraussetzung: Aufzug klein genug. Sonst könnte man Gravitationskraft daran erkennen, dass sie inhomogen ist.)

⇒ Äquivalenzprinzip

Das schwache Äquivalenzprinzip besagt: In Weltgebieten, die so klein sind, dass man die örtliche und zeitliche Änderung des Gravitationsfeldes vernachlässigen kann, lässt sich stets ein Bezugssystem wählen, in dem die Gravitation keinen Einfluss auf die *Bewegung makroskopischer Teilchen* ausübt. Es ist eine Folge der mit einer Genauigkeit von 10^{-11} experimentell bestätigten Äquivalenz von träger und schwerer Masse. Diese Äquivalenz bedeutet, dass alle Körper in einem äußeren Gravitationsfeld gleich schnell fallen.

Das starke Äquivalenzprinzip besagt: In Weltgebieten, die so klein sind, dass man die örtliche und zeitliche Änderung des Gravitationsfeldes vernachlässigen kann, lässt sich stets ein Bezugssystem wählen, in dem die Gravitation keinen Einfluss auf *irgendwelche physikalische*

Vorgänge ausübt. Die allgemeine Relativitätstheorie erfüllt nicht nur das schwache, sondern auch das starke Äquivalenzprinzip.

Als Inertialsysteme gelten nun Systeme, in denen Teilchen auch unter Einfluss von Gravitation kräftefrei erscheinen.

Vorteil: Inertialsysteme sind nun physikalisch realisierbar

Nachteil: Inertialsysteme können nur noch lokal existieren.

(„Koordinatenachsen dürfen nicht zu lang sein“)

Unendlich ausgedehnte Inertialsysteme kann es nicht geben.

↪ Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie