Institut für Physik WS 2017/2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 10

Quickies:

75. Wie lauten die Entropiepostulate?
76. Wie kann man Entropie messen?
77. Wie lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik?
78. Begründen Sie das Nernstsche Theorem.
79. Welche Konvexitätseigenschaften haben Entropie und innere Energie? Warum?
80. Erläutern Sie die Gibbsche Grundform.
81. Wie lautet die Gibbs-Duhem-Relation? Woraus folgt sie?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 16. Januar)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 28) Entropiepostulate (12 Punkte)

Betrachten Sie folgende Vorschläge für die Fundamentalgleichung eines thermodynamischen Systems bestehend aus N Teilchen im Volumen V mit innerer Energie U.

(i) $S_1 = cV^3/NU$ mit $c > 0$.
(ii) $S_2 = cN \ln(UV/N^2)$ mit $c > 0$.
(iii) $S_3 = c(N^2VU^2)^{1/5}$ mit $c > 0$.

(a) Überprüfen Sie, ob die obigen Vorschläge die geforderten Entropiepostulate erfüllen.

(b) Betrachten Sie speziell die Fundamentalgleichung S_3. Bestimmen Sie die zugehörige Fundamentalgleichung $U_3(S, V, N)$ und berechnen Sie daraus die Temperatur T, den Druck P und das chemische Potential μ.

(c) Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung des durch S_3 bzw. $U_3(S, V, N)$ charakterisierten Systems (d.h. den Druck P als Funktion von T, V und N).

Aufgabe 29) Hausaufgabe: Fundamentalrelation (12 Punkte)

Für ein thermodynamisches System sind funktionale Zusammenhänge $P(S, V, N)$ und $T(S, V, N)$ für den Druck P und die Temperatur T als Funktion der Entropie S, des Volumens V und der Teilchenzahl N vorgeschlagen worden.

(a) Welche Bedingungen müssen derartige Beziehungen für $P(S, V, N)$ und $T(S, V, N)$ allgemein erfüllen, damit das thermodynamische Potential der inneren Energie $U(S, V, N)$ existiert?
Hinweis: Welche Bedingungen müssen allgemein gelten, damit Funktionen $y_i(x_1, \cdot, x_m)$ partielle Ableitungen einer "Potentialfunktion" $f(x_1, \cdot, x_m)$ sind, so dass $y_i = \partial f \partial x_i$?

(b) Konkret lautet der Vorschlag

$$P(S,V,N) = (\frac{S}{V})^2 \exp(\frac{S}{Nk_B}), \tag{1}$$

$$T(S,V,N) = \frac{S(S+2k_BN)}{k_BNV} \exp(\frac{S}{Nk_B}). \tag{2}$$

Überprüfen Sie, ob die Bedingungen a) erfüllt sind, und berechnen Sie gegebenenfalls $U(S,V,N)$.

Aufgabe 30) Legendre-Transformation (12 Punkte)

Mathematisch ist die Legendre-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\hat{f}(\xi) := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{\xi x - f(x)\}$.

(a) Zeigen Sie für gerade Funktionen $f(x) = f(-x)$
$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$
$\hat{f}(\xi) := \sup_{x\geq 0}\{\xi x - f(x)\}$ für $\xi \geq 0$.

(b) Berechnen Sie für folgend Funktionen jeweils die Legendre-Transformierte:
$f_1(x) = |x|^\alpha$, mit $\alpha > 1$
$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - c|x|$, mit $c \in \mathbb{R}$
$f_3(x) = |x| \ln |x| - |x|$
$f_4(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } |x| \leq 1 \\ f_3(x), & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$

(b) Zeigen Sie, dass für differenzierbare Funktionen $f(x)$ die obige Definition der Legendre-Transformierte bis auf ein Vorzeichen mit der Definition aus der Vorlesung übereinstimmt ($\hat{f}(\xi) = f(x) - \xi x$ mit $\xi = f'(x)$).