Institut für Physik WS 2017/2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 11

Quickies:

82. Was ist eine Legendre-Transformation? Wann und warum setzt man Sie ein?
83. Was sind thermodynamische Potentiale? Zählen Sie einige auf.
84. Welche allgemeinen Eigenschaften haben thermodynamische Potentiale?
85. Nach welchem Kriterium entscheiden Sie, welches thermodynamische Potential Sie in einem bestimmten Problem verwenden sollten?
86. Was sind thermodynamische Koeffizienten? Nennen Sie einige.
87. Was versteht man unter Maxwell-Relationen?
88. Welchen Stabilitätsbedingungen müssen thermodynamische Koeffizienten genügen?
89. Wie verhält sich die spezifische Wärme am absoluten Nullpunkt? Warum?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 23. Januar)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 31) Kosmische Hintergrundstrahlung (12 Punkte)

Die Fundamentalrelation eines Photonengases lautet

$$S(U,V,N) = \frac{4}{3} b^{1/4}\, U^{3/4}\, V^{1/4}, \qquad b > 0. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie, wie die Temperatur T eines Photonengases bei isentroper Expansion (d. h., S bleibt konstant) mit zunehmendem Radius R des Universums abnimmt.

(b) Die Strahlung und die Materie entkoppeln bei einer Temperatur von $T \approx 3000K$. Heute hat die kosmische Hintergrundstrahlung eine Temperatur von $T \approx 3K$. Um welchen Faktor war das Universum zum Zeitpunkt t_0 der Entkopplung kleiner als zur heutigen Zeit t_1?

(c) Machen Sie nun eine einfache Abschätzung des Zeitpunktes der Entkopplung. Vernachlässigen Sie dazu den Einfluß der Materie auf die Expansion des Universums. Die Bewegungsgleichung für die Expansion eines strahlungsdominierten Universums lautet

$$\frac{d^2}{dt^2} R = -\frac{8\pi}{3}\, G\, \rho\, R. \tag{2}$$

Nähern Sie die Massendichte ρ des Universums durch die des Strahlungsfeldes an: $\rho \approx \rho_{rad} \propto T^4$. Zeigen Sie, daß die Temperatur in solch einem strahlungsdominierten Universum für hinreichend kleine R mit $T(t) \propto t^{-1/2}$ abfällt. Schätzen Sie damit den Zeitpunkt t_0 der Entkopplung zwischen Strahlung und Materie ab.

Hinweis: Lösen Sie zunächst die Gleichung (2) für $R(t)$ mit der Anfangsbedingung $R(0) = 0$. Das Universum ist $t_1 = 13.7$ Milliarden Jahre alt.

Aufgabe 32) Jacobi-Determinanten und Thermodynamische Koeffizienten (12 Punkte)

(a) Beweisen Sie den Zusammenhang

$$\frac{\partial(T,S,N)}{\partial(P,V,N)} = 1$$

Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Maxwell-Relation

(b) Betrachten Sie $\frac{\partial U}{\partial V}\,|_{S,N}$. Wenn man versucht, diese Ableitung wie folgt umzuschreiben: $\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial V}$, so erhält man mit $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ und $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$ die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial V} = P$. Dieses Resultat hat jedoch das falsche Vorzeichen. Wo steckt der Fehler?

Benutzen Sie Jacobi-Determinanten, um $\frac{\partial U}{\partial V}\,|_{S,N}$ durch $\frac{\partial U}{\partial S}\,|_{V,N}$ und $\frac{\partial S}{\partial V}\,|_{U,N}$ auszudrücken.

(c) Die isotherme und isentrope Kompressibilität κ_T und κ_S sowie der thermische Ausdehnungskoeffizient α und die spezifische Wärme c_P sind definiert als

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_{T,N},\ \kappa_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_{S,N},\ \alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_{P,N},\ c_P = \frac{T}{N}\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_{P,N}.$$

Zeigen Sie

$$\kappa_T - \kappa_S = T\frac{V}{N}\frac{\alpha^2}{c_P}.$$

Aufgabe 33) Joule-Thompson Prozess (12 Punkte)

Ein Gas wird unter konstantem Druck P_1 durch eine poröse Trennwand in ein Gebiet mit konstantem Druck P_2, $P_2 < P_1$, gedrückt. Die Drücke auf beiden Seiten der Trennwand werden mit Kolben aufrechterhalten. Ansonsten ist das Gas auf beiden Seiten isoliert, und tauscht deshalb keine Wärme mit der Umgebung aus. Dieser Prozess wird z.B. für die Verflüssigung von Gasen eingesetzt.

(a) Argumentieren Sie, dass bei diesem Prozess die Enthalpie H erhalten bleibt.

(b) Im quasistatischen Fall wird die Temperaturänderung während des Prozesses durch den Joule-Thompson Koeffizient $(\frac{\partial T}{\partial P})_{H,N}$ beschrieben. Berechnen Sie diesen Koeffizienten für ein klassisches ideales Gas. Kann man ideale Gase mit dem Joule-Thompson Prozess abkühlen?

(c) Beweisen Sie den allgemeinen Zusammenhang

$$(\frac{\partial T}{\partial P})_{H,N} = V\,\frac{T\alpha - 1}{N c_P},$$

wobei α der in der Vorlesung angegebene thermische Ausdehnungskoeffizient ist, und c_P die spezifische Wärme bei konstantem Druck.

Für reale Gase existiert eine Inversionstemperatur T_i mit $T > 1/\alpha$ für $T < T_i$, und $T < 1/\alpha$ für $T > T_i$. Was passiert also mit der Temperatur eines realen Gases, wenn man es dekomprimiert? Diskutieren Sie die praktischen Konsequenzen.