Institut für Physik
Friederike Schmid

WS 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 2

Quickies:

10. Was versteht man in der klassischen Mechanik unter der Phasenraumdichte?
11. Wie lautet der Liouville-Satz der klassischen Mechanik?
12. Worin besteht die Ergodizitätsannahme?
13. Was besagt das Ergodentheorem?
14. Was versteht man unter dem "Prinzip des kleinsten Vorurteils"?
15. Was versteht man in der Quantenmechanik unter dem statistischen Operator?
16. Welche Eigenschaften hat der statistische Operator?
17. Wann gelten zwei quantenmechanische (reine oder gemischte) Zustände als identisch?
18. Wie berechnet man statistische Erwartungswerte einer Observablen in der klassischen Mechanik?
19. Wie berechnet man statistische Erwartungswerte einer Observablen in der Quantenmechanik?
20. Wann gelten Teilchen als ununterscheidbar?
21. Welche Bedingung muss der Gesamtzustand eines Systems ununterscheidbarer Teilchen erfüllen?
22. Worin unterscheiden sich Bosonen und Fermionen?
23. Was besagt das Spin-Statistik-Theorem?
24. Was besagt das Pauli-Prinzip?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 7. November)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 4) Klassische Phasenraumdichte (12 Punkte)

In einem geschlossenen Behälter des Volumens V seien N klassische Teilchen i mit unterschiedlichen Massen m_i. Die Phasenraumdichte der Teilchen in dem Behälter habe die Form

$$\rho(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_N) = \mathcal{N} \ \exp(-\beta \sum_i p_i^2/2m_i).$$

Hier ist β ein freier Parameter und $\mathcal{N}$ eine Konstante.

(a) Berechnen Sie den Wert von $\mathcal{N}$ aus der Forderung, dass ρ auf 1 normiert sein soll.

(b) Berechnen Sie den mittleren Gesamtimpuls aller Teilchen.

(c) Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie des Teilchens j. und die gesamte mittlere kinetische Energie.

Aufgabe 5) Statistischer Operator I (12 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zweizustands-System mit den Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und den zugehörigen Energien ϵ_1 und ϵ_2. In diesem System liege ein gemischter Zustand vor, der sich gleichwahrscheinlich (mit Wahrscheinlichkeiten 1/3) aus den Zustandsvektoren $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $(|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$ zusammensetzt.

(a) Berechnen Sie den statistischen Operator ρ.

(b) Verifizieren Sie, dass ρ hermitesch ist und $\mathrm{Sp}(\rho)=1$.

(c) Berechnen Sie den statistischen Erwartungswert der Energie.

(d) Berechnen Sie die Eigenwerte von ρ.

(e) Berechnen Sie den statistischen Erwartungswert $\langle \ln \rho \rangle$.

Aufgabe 6) Statistischer Operator II (12 Punkte)

Auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei der zeitunabhängige Hamiltonoperator H mit Eigenwerten $|n\rangle$ und nicht-entarteten Eigenwerten E_n gegeben ($n \in \{0, 1, 2, ...\}$). ρ sei ein statistischer Operator.

(a) Zeigen Sie, dass die von Neumann Gleichung für beliebige Anfangsbedingungen $\rho(0)$ des statistischen Operators durch

$$\rho(t) = \sum_{n,m} \langle n|\rho(0)|m\rangle \; \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t \Big] \; |n\rangle\langle m|$$

gelöst wird.

(b) Überprüfen Sie mittels der Gleichung aus (a), dass reine Zustände unter Zeitentwicklung rein bleiben.

(c) Bestimmen Sie den zeitgemittelten statistischen Operator

$$\bar{\rho} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; \rho(t)$$

in Energiedarstellung (d.h. ausgedrückt als gewichtete Summe $\bar{\rho} = \sum_{m,n} r_{n,m} |m\rangle\langle n|$). Zeigen Sie, dass er diagonal ist.

(d) Betrachten Sie die "von Neumann-Entropie" $S := -k_B \langle \ln \rho \rangle = -k_B \mathrm{Sp}(\rho \ln \rho)$.
Zeigen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S = 0$.