Institut für Physik WS 2017/2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 3

Quickies:

25. Erläutern Sie den Begriff der von-Neumann-Ergodizität. Wann gilt Sie?
26. Diskutieren Sie allgemein die Begriffe Ergodizität und Mischungseigenschaft in klassischen und quantenmechanischen Systemen.
27. Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum?
28. Was versteht man unter bedingter Wahrscheinlichkeit?
29. Wann sind zwei Ereignisse statistisch unabhängig?
30. Was ist eine Zufallsvariable?
31. Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen definiert?
32. Wie ist die Streuung einer Zufallsvariablen definiert?
33. Was versteht man unter der Korrelation zweier Zufallsvariablen?
34. Warum muss die Korrelation zweier statistisch unabhängigen Variablen Null sein?
35. Wie lautet die Formel für die Gaussverteilung?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 14. November)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 7) Geometrische Wahrscheinlichkeit, Nadelwurf (12 Punkte)

In der Ebene sei ein Liniengitter von parallelen Geraden im Abstand d gegeben. Eine Nadel der Länge l wird zufällig auf dieses Liniengitter geworfen.

(a) Welches ist die Ergebnismenge Ω für diesen Versuch?

(b) Gegeben sei eine Zufallsvariable $B : \Omega \to \mathbb{R}$

$$B = \begin{cases} 1: & \text{falls die Nadel eine Linie berührt} \\ -1: & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie für den Fall $d > l$ den Erwartungswert von B unter der (klassischen) Annahme, daß alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von B für den Fall $d < l$.

Aufgabe 8) Binomialverteilung (12 Punkte)

Betrachten Sie folgenden drei Verteilungen:

- Die Binomialverteilung: $W_N(n) = p^n(1-p)^{(N-n)}\binom{N}{n}$
- Die Poissonverteilung: $W(n) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\,e^{-\alpha}$
- Die Gaußverteilung: $W(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big]$

(a) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung normiert ist. Berechnen Sie den Erwartungswert $< n >$ und die Streuung von n.
Hinweis: Verwenden Sie die Binomialformel $(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} a^n b^{N-n}\binom{N}{n}$

(b) Zeigen Sie: Für große N, kleine $p \ll 1$ mit $pN =: \alpha$, und $n \ll N$, geht die Binomialverteilung in die Poissonverteilung über.
Hinweis: Es gilt $\lim_{m\to\infty}(1-x/m)^m = e^{-x}$

(c) Zeigen Sie: Für große N, große n, und nicht zu kleine $p < 1$ geht die Binomialverteilung in eine Gaußverteilung über. Geben Sie diese explizit an.
Hinweis: Entwickeln Sie $\log W(n)$ um das Maximum und benutzen Sie die Stirling-Formel $m! \approx (m/e)^m$ für große m.

Aufgabe 9) Statistische Erwartungswerte in der Quantenmechanik (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1/2. Der Zustandsraum für den Spin-Freiheitsgrad ist zweidimensional. In der sogenannten Standarddarstellung ist der Spinoperator in diesem Zustandsraum ein Vektor von 2×2-Matrizen $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Paulische Spinmatrizen).

(a) Im Zustandsraum der Spins sei der statistischen Operator gegeben durch $\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & i/3 \\ -i/3 & 1/2 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Streuung von S_x und S_y.

(b) Die statistischen Erwartungswerte $\frac{\hbar}{2}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ des Spinoperators seien bekannt. Bestimmen Sie den statistischen Operator, der diese Erwartungswerte liefert.
Hinweis: Drücken Sie ρ als Summe $\rho = \rho_0\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{3} v_i\sigma_i$ aus. Die Lösung folgt aus den Bedingungen $\text{Spur}(\rho) = 1$ und $\text{Spur}(\rho S_i) = \frac{\hbar}{2}\Delta_i$.

Bonusaufgabe) Der Ruin des Millionärssohns (Zusatzaufgabe, 12 Bonuspunkte).

Ein Millionärssohn hat 900.000 Euro und versucht, sein Vermögen in der Spielbank auf eine Million zu erhöhen. Er geht zum Roulettetisch und setzt immer 1000 Euro auf schwarz.

a) Wäre es eine gute Strategie, statt 1000 Euro lieber nur jeweils 100 Euro zu setzen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er sein Ziel, statt sich zu ruinieren?

(Ein Roulettetisch hat 37 Zahlen: 18 schwarze, 18 rote, und die Null. Lösen Sie die Aufgabe b) zum Beispiel durch eine kleine Simulation am Computer.)