Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 4

Quickies:

36. Wie lautet der zentrale Grenzwertsatz? Welche Bedingungen setzt er voraus?
37. Was versteht man unter Informationsentropie?
38. Wie ist die Entropie der statistischen Mechanik für ein klassisches System N identischer Teilchen definiert? Erläutern Sie die einzelnen Beiträge.
39. Wie ist die von-Neumann Entropie definiert?
40. Was ist ein Qubit?
41. Wie lautet das Prinzip der maximalen Ignoranz? Welcher Gedanke steckt dahinter?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 21. November)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 10) Entropiemaximierung mit Nebenbedingungen (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung, die Gaussverteilung, und die Poissonverteilung jeweils eine Entropie maximieren.

(a) Wenn Sie für eine allgemeine kontinuierliche Verteilung $p(x)$ auf der positiven Halbachse ($x > 0$) den Erwartungswert $\langle x \rangle$ vorgeben, erhalten Sie eine Exponentialverteilung

(b) Wenn Sie für eine allgemeine kontinuierliche Verteilung $p(x)$ (x beliebig) den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Varianz $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ vorgeben, erhalten Sie eine Gaussverteilung.

(c) Für die Poissonverteilung betrachten Sie eine Menge ununterscheidbarer Punkte auf einem Intervall der Länge L. Der Erwartungswert der Zahl der Punkte sei $\langle n \rangle$. Die Verteilung der Punkte auf dem Intervall sei durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p_n(x_1, ..., x_n)$ beschrieben. Berechnen Sie die Funktion $p_n(x_1, ...x_n)$, die die Entropie maximiert. Zeigen Sie dann, daß die integrierte Wahrscheinlichkeit P_n, insgesamt genau n Punkte vorzufinden, poissonverteilt ist.

Bemerkung: Alternativ können Sie die "Punkte" auch als "Ereignisse" auf der Zeitachse auffassen. Dann ist $\langle n \rangle$ proportional zur Ereignisrate. Die Poissonverteilung maximiert die Entropie bei vorgegebener Rate.

Aufgabe 11) Entropie eines quantenmechanischen Messprozesses (12 Punkte)

Der Zustand eines Systems vor der Messung werde durch den statistischen Operator ϱ beschrieben. Es werde nun eine nichtselektive Messung einer Observablen A vorgenommen. Nach der Messung ist der statistische Operator diagonal und hat die Form $\varrho' = \sum_m p_m |a_m\rangle\langle a_m|$. Hier sind die $|a_m\rangle$ die Eigenvektoren der Observablen zum Eigenwert a_m, und die p_m die Wahrscheinlichkeiten, den Eigenwert a_m zu messen: $p_m = \langle a_m|\varrho|a_m\rangle$.

Vergleichen Sie die Entropie des Systems vor und nach der Messung.

(a) Zeigen Sie zunächst die Gibbs-Ungleichung: Für $\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N q_i = 1$ $(p_i, q_i \geq 0\ \forall i)$ gilt $\sum_i p_i \ln(p_i/q_i) \geq 0$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\ln x \leq x - 1$.

(b) Beweisen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Ungleichung die Kleinsche Ungleichung: Für zwei statistische Operatoren ϱ, $\bar{\varrho}$ gilt: $\mathrm{Sp}(\varrho \ln \varrho) - \mathrm{Sp}(\varrho \ln \bar{\varrho}) \geq 0$. Wann gilt hier Gleichheit?

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe der Kleinschen Ungleichung, dass die Entropie unseres Systems nach der Messung zunimmt oder gleich bleibt. Wann bleibt die Entropie gleich?

Aufgabe 12) Wettervorhersage (12 Punkte)

In einem sonnigen Land sei die Genauigkeit der Vorhersage des Meteorologen eines bestimmten Radios durch folgende Statistik charakterisiert.

	Regen	Kein Regen
Regen vorhergesagt	1/12	1/6
Kein Regen vorhergesagt	1/12	2/3

Das Wetter wird also in 3/4 = 1/12 + 2/3 der Fälle richtig vorhergesagt. Ein arbeitsloser Radiohörer bemerkt, daß er in 5/6=1/6 + 2/3 der Fälle recht hätte, wenn er einfach immer vorhersagen würde, daß es nicht regnet. Er bewirbt sich beim Radio. Leider wird seine Bewerbung abgelehnt. Warum?

Begründen Sie Ihre Antwort quantitativ mit Hilfe des Begriffs der Informationsentropie.