

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 6

Quickies:

53. Was versteht man unter einer Zustandsdichte?
54. Was ist die thermische de-Broglie Wellenlänge? Wie kann man sie interpretieren?
55. Was wird durch die Bose-Einstein-Verteilung, die Fermi-Dirac-Verteilung, die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben?
56. Wie lauten die Gleichungen für diese drei Verteilungen? Skizzieren Sie ihren Verlauf.
57. Wann kann man klassische statistische Physik anwenden, wann muss man Effekte der Quantenstatistik erwarten?
58. Wie kann man nachträglich die Faktoren $1/h^{3N}$ und $1/N!$ in der klassischen Statistik rechtfertigen?
59. Wie lautet das Äquipartitionsprinzip?
60. Wie lautet der Virialsatz?

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 5. Dezember)

Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 16) Einsteinmodell (12 Punkte)

In einem einfachen Modell für einen Festkörper werden die Atome des Festkörpers als unabhängige Oszillatoren betrachtet, die um ihren Gleichgewichtspunkt vibrieren können. Da die Atome an verschiedenen Orten sitzen, sind sie unterscheidbar. Betrachten Sie ein solches System von N unterscheidbaren unabhängigen Oszillatoren in einer Dimension. Die Hamiltonfunktion bzw. der Hamiltonoperator des Systems kann geschrieben werden als Summe von Einzel-Oszillatoren:

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_i \text{ bzw. } H = \sum_i H_i \quad \text{mit } \mathcal{H}_i, H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2$$

- (a) Berechnen Sie quantenmechanisch die kanonische Zustandssumme und die freie Energie $F(T, N)$. Das Ergebnis lautet $F = N(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}))$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die wichtigsten Ergebnisse der Quantenmechanik für eindimensionale harmonische Oszillatoren: Die Energieeigenwerte sind gegeben durch $\epsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die mittlere Energie $\langle E \rangle$ und die Entropie S des Gesamtsystems.
- (c) Berechnen Sie nun klassisch die kanonische Zustandssumme und die freie Energie, und daraus die mittlere Energie und die Entropie. Das Ergebnis für die freie Energie lautet $F = \frac{N}{\beta} \ln(\beta\hbar\omega)$.

- (d) Betrachten Sie den Grenzfall hoher Temperaturen, $\beta\hbar\omega \ll 1$, für den quantenmechanischen Fall, und vergleichen Sie die Ergebnisse für F , $\langle E \rangle$ und S mit den entsprechenden klassischen Ergebnissen.
- (e) Betrachten Sie nun den Grenzfall niedriger Temperaturen, $\beta\hbar\omega \rightarrow \infty$. Was passiert konkret mit der Entropie im quantenmechanischen und im klassischen Fall?

Aufgabe 17) Eindimensionale harte Kugeln (12 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales System von N harten “Kugeln” des Durchmessers d , die sich längs einer Strecke der Länge L bewegen können. Das Wechselwirkungspotential zwischen zwei Teilchen i und j sei

$$U_{ij}(x_i, x_j) = \begin{cases} \infty & : |x_i - x_j| < d \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme, die freie Energie und die Entropie.
- (b) Berechnen Sie den (eindimensionalen) Druck $P = -\frac{\partial F}{\partial L}$ und bestimmen Sie daraus die thermische Zustandsgleichung $P = f(T)$ (mit $T = 1/k_B\beta$).

Wie unterscheidet sich das Ergebnis von dem Ergebnis für ideale Gase $P(T) = Nk_B T/L$? Interpretieren Sie Ihren Befund.

Aufgabe 18) Oberflächenadsorption (12 Punkte)

Eine Oberfläche gebe eine Gitterstruktur vor, an deren Gitterplätzen höchstens je ein Goldatom adsorbiert werden kann. Bei der Adsorption eines Atoms wird die Energie um den Wert $\epsilon > 0$ abgesenkt. Die Oberfläche befindet sich in Kontakt mit einem Gas aus Goldatomen, das gleichzeitig als Wärme- und Teilchenreservoir dient. Geben Sie die mittlere Bedeckung der Oberfläche durch adsorbierte Atome als Funktion von β bzw. der Temperatur $T = 1/k_B\beta$ und des chemischen Potentials μ der Goldatome an.