

**Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)**  
**Blatt 7**

**Quickies:**

59. Wie lautet das Äquipartitionsprinzip?
60. Wie lautet der Virialsatz?
61. Welche Eigenschaften zeichnen eine intensive Größe aus?
62. Welche Eigenschaften zeichnen eine extensive Größe aus?
63. Wann ist die Energie extensiv?
64. Wann ist die Entropie extensiv?
65. Was ist das chemische Potential?
66. Was versteht man unter dem thermodynamischen Limes? Wann existiert er?
67. Unter welchen Umständen sind verschiedene Gesamtheiten "äquivalent"? Was bedeutet "äquivalent"?
68. Was ist die Enthalpie?

**Aufgaben** (abzugeben bis spätestens 12:10 am 12. Dezember)

Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

**Aufgabe 19) Entropische Kräfte** (12 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Problem: In einem System des Volumens  $V$  befinden sich  $N$  Teilchen  $A$  und zwei Kugeln  $B$  im Abstand  $r$ . Die Teilchen  $A$  wechselwirken nicht miteinander, können aber nicht näher als einen Abstand  $R$  an eine Kugel  $B$  heranrücken. (Dies ist ein beliebtes Modell für Mischungen von Kolloiden (die "Kugeln") und Polymeren (die Teilchen  $A$ ) modelliert.)

- (a) Durch die Anwesenheit der Kugeln  $B$  wird das für die Teilchen  $A$  zugängliche Volumen um einen Betrag  $V_{excl}(r)$  reduziert, welches vom Abstand  $r$  der Kugeln abhängt. Berechnen Sie  $V_{excl}(r)$ . Sie erhalten

$$V_{excl}(r) = \frac{2}{3}\pi R^3(2 + 3z - z^3) \quad \text{mit} \quad z = \frac{r}{2R}$$

für  $r < 2R$  und  $V_{excl}(r) = \frac{8}{3}\pi R^3$  für  $r > 2R$ .

- (b) Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme und daraus die freie Energie als Funktion des Abstandes  $r$  der Kugeln. (Die Kugeln  $B$  seien weiterhin an ihren Orten festgehalten, d.h. Integration nur über die Koordinaten der Teilchen  $A$ ).
- (c) Die Ableitung der freien Energie nach dem Abstand  $r$ ,  $-\frac{\partial F}{\partial r}$ , beschreibt eine effektive Kraft zwischen den Kugeln. Berechnen Sie diese Kraft und diskutieren Sie sie. Skizzieren Sie ihren Verlauf. Ist sie anziehend oder abstoßend? Wie verhält sie sich, wenn man die Temperatur erhöht oder erniedrigt?

- (d) Versuchen Sie, zu erklären, wie es mechanisch zum Auftreten dieser Kraft kommen könnte.

**Aufgabe 20) Entropie, Temperatur, und spezifische Wärme** (12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: In der kanonischen Gesamtheit mit Kontrollvariablen  $(T, V, N)$  gilt für die Entropie  $S(T, V, N)$  der Zusammenhang  $(\frac{\partial S(T, V, N)}{\partial T})_{V, N} = \frac{1}{T}(\frac{\partial E(T, V, N)}{\partial T})_{V, N}$ .
- (b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) für makroskopische Systeme (d.h. bei Äquivalenz der Gesamtheiten) die Relation  $(\frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E})_{V, N} = \frac{1}{T}$ .
- (c) In der kanonischen Gesamtheit ist die spezifische Wärme durch  $c_V = \frac{T}{N}(\frac{\partial S(T, V, N)}{\partial T})_{V, N}$  gegeben. Zeigen Sie  $c_V = \frac{1}{k_B T^2 N}(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$   
Hinweis: Eine ähnliche Rechnung haben Sie bereits in Aufgabe 13 durchgeführt.
- (d) Zeigen Sie: Analog gilt bei festem Druck für die spezifische Wärme  $c_P = \frac{T}{N}(\frac{\partial S(T, P, N)}{\partial T})_{P, N}$  der Zusammenhang  $c_V = \frac{1}{k_B T^2 N}(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2)$  mit  $H = E + PV$ .

**Aufgabe 21) ”Negative Temperatur”** (12 Punkte)

Betrachten Sie ein System von  $N$  wechselwirkenden, unterscheidbaren Teilchen, die jeweils zwei Zustände mit Energien  $\epsilon_i = \pm|\epsilon|$  annehmen können. Die Gesamtenergie  $E$  sei fest. Dies ist ein sehr vereinfachtes Modell eines Lasers. (Die “Teilchen” sind dabei Moleküle im Resonator, die zwei Zustände annehmen können: Den Grundzustand und einen angeregten Zustand).

- (a) Berechnen Sie in der mikrokanonischen Gesamtheit die Entropie als Funktion von  $E$  und  $N$ . Benutzen Sie dabei die Stirlingformel  $\ln n! \approx n \ln n$ .
- (b) Berechnen Sie die Temperatur als Funktion von  $E$  und  $N$  mittels der Gleichung aus Aufgabe 20 b)  $1/T = \partial S / \partial E$ . Für manche Besetzungszahlen  $n_-$  des unteren Niveaus kann sie “negativ” werden. Wann? Diskutieren Sie Ihren Befund.
- (c) In welche Richtung fließt Energie, wenn ein System mit “negativer” Temperatur in thermischen Kontakt mit einem System mit “positiver” Temperatur gebracht wird? Warum?