Institut für Physik WS 2017/2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie IV (Statistische Physik und Thermodynamik)

Blatt 8

Quickies:

69. Was ist die spezifische Wärme?
70. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der spezifische Wärme bzw. der Kompressibilität mit statistischen Schwankungen.
71. Wie unterscheiden sich schwach entartete Bose- und Fermigase von klassischen idealen Gasen? Wie kann man den Unterschied interpretieren?
72. Was ist das Kennzeichen von stark entarteten Fermigasen?
73. Erläutern Sie die Begriffe Fermi-Impuls und Fermi-Energie.
74. Erklären Sie das Phänomen der Bose-Einstein Kondensation.

Aufgaben (abzugeben bis spätestens 12:10 am 19. Dezember)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Aufgabe 22) Standardintegrale für Quantengase (12 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Reihenentwicklungen

$$g_{5/2}(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,\sqrt{x}\,\ln(1-ze^{-x}) = \sum_{k=1}^\infty z^k/k^{5/2}$$

$$f_{5/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,\sqrt{x}\,\ln(1+ze^{-x}) = -\sum_{k=1}^\infty (-z)^k/k^{5/2}$$

Welchen Konvergenzradius haben diese Reihen?

(b) Beweisen Sie die Entwicklung

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{z}e^x-1} = \sum_{k=1}^\infty z^k/k^{3/2}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{z}e^x+1} = -\sum_{k=1}^\infty (-z)^k/k^{3/2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $g_{3/2}(z) = z\frac{d}{dz}g_{5/2}(z)$ und $f_{3/2}(z) = z\frac{d}{dz}f_{5/2}(z)$.

(c) Zeigen Sie durch Abschätzung:

– $\lim_{z\to1} g_{3/2}(z)$ existiert und ist endlich.
– Alle Ableitungen $\frac{d^n}{dz^n}g_{3/2}(z)$ von $g_{3/2}(z)$ divergieren im Grenzwert $z \to 1$.

Aufgabe 23) Spezifische Wärme stark entarteter Fermigase (12 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie für ein Gas von N Fermionen (Elektronen) bei festem Volumen V nahe der Temperatur $T = 0$ die spezifische Wärme $c_V = \frac{1}{N}(\frac{\partial S}{\partial T})_{V,N} = \frac{1}{N}(\frac{\partial E}{\partial T})_{V,N}$. ausrechnen. Dieses Problem ist z.B. in der Festkörperphysik von Bedeutung.

Verwenden Sie dazu die folgende Entwicklung der Fermi-Dirac-Verteilung um die Stufenfunktion:

$$n(\epsilon) = [1 - \Theta(\epsilon - \mu)] + \Delta n(\epsilon) \;\text{ mit }\; \Delta n(\epsilon) = -\frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \delta'(\epsilon - \mu) + \mathcal{O}(k_B T)^4. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie den oben behaupteten Zusammenhang $c_V = \frac{1}{N}(\frac{\partial E}{\partial T})_{V,N}$.

(b) Vereinfachen Sie zunächst den Ausdruck für die Einteilchenzustandsdichte zu $\mathcal{D}(\epsilon) = C\sqrt{\epsilon}$. Berechnen Sie die Größen $\rho(\mu)$ und $E(\mu)$ bis zur Ordnung $(k_B T/\mu)^2$ mit Hilfe von (1).

(c) Verwenden Sie nun den Ausdruck aus der Vorlesung, $\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{3\rho}{2\sqrt{\epsilon_F}^3}\sqrt{\epsilon}$ und zeigen Sie $\frac{\mu}{\epsilon_F} = 1 - \frac{\pi^2}{12}(\frac{k_B T}{\epsilon_F})^2 + \mathcal{O}(\frac{k_B T}{\epsilon_F})^3$. Berechnen Sie damit $E(T, V, N)$ und c_V.
Hinweis: Falls Sie (b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $E(\mu) = C\mu^{5/2}\frac{2}{5}(1 + \frac{5}{8}(\frac{k_B T}{\mu})^2)$.

(e) (Bonus, 5 Zusatzpunkte): Wenn Sie Lust haben, beweisen Sie noch (1) oder allgemeiner:

$$\Delta n(\epsilon) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(\epsilon - \mu) \text{ mit } a_k = \begin{cases} 0 & k: \text{ gerade} \\ (2 - \frac{1}{2^{k-1}})\,\zeta(1+k)\,(k_B T)^{1+k} & k: \text{ ungerade} \end{cases} \tag{2}$$

(mit der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(x)$). Zeigen Sie dafür, dass die Werte der Integrale $\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon\, n(\epsilon)\, f(\epsilon)$ mit dem Ausdruck (2) für alle analytischen Funktionen $f(\epsilon)$ korrekt reproduziert werden. Bei kleinen T ist $\Delta n(\epsilon)$ stark um $\epsilon \approx \mu$ lokalisiert. Entwickeln Sie daher $f(\epsilon)$ um $\epsilon = \mu$ und benutzen Sie $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^k/(1 + \mathrm{e}^x) = k!\,(1 - 2^{-k})\,\zeta(1+k)$.

Aufgabe 24) Chandrasekhar-Masse (12 Punkte)

Weiße Zwerge bestehen im wesentlichen aus vollständig ionisierten Kernen. Die Masse ist durch die Zahl der Nukleonen gegeben über $M \approx \sigma m_p N$, wobei m_p die Protonenmasse ist, σ die Zahl der Elektronen pro Nukleon, und N die Zahl der Elektronen. Der Druck wird von dem Druck des Elektronengases dominiert. Der Radius R ergibt sich als Ergebnis eines Kräftegleichgewichts zwischen dem Druck des Fermigases der N Elektronen und dem Gravitationsdruck.

Behandeln Sie näherungsweise den Stern als homogene Kugel und das Elektronengas als ideales Fermigas. Sie müssen hier relativistisch rechnen (d.h. der Ausdruck für die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\epsilon)$ aus der Vorlesung und Aufg. 23 darf hier *nicht* verwendet werden.

(a) Berechnen Sie den Fermiimpuls und die Grundzustandsenergie E_0 eines relativistischen Gases von freien Fermionen mit Spin 1/2 als Funktion der Dichte ρ und der relativistischen Energie-Impuls Beziehung $\epsilon_{\vec{p}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung eingeführte Kontinuumsnäherung $\sum_{\vec{p}} \approx \frac{V}{h^3}\int \mathrm{d}\vec{p}$.

(b) Der Radius R des Sterns stellt sich so ein, daß die Gesamtenergie $E_0 - \frac{3}{5}GM^2/R$ minimal wird. Bestimmen Sie $R(M)$ explizit für den Grenzfall $p_F/mc \ll 1$ (nichtrelativistischer Grenzfall).

(c) Betrachten Sie nun den umgekehrten Fall $p_F/mc \gg 1$. Zeigen Sie, daß der Radius bei einer Masse M_C, der sogenannten Chandrasekharmasse, verschwindet. Wie verhält sich M_C zur Sonnenmasse für $\sigma = 2$? (Die Sonnenmasse ist $2 \cdot 10^{30}$ kg)