Klassische Mechanik (Theoretische Physik 1)

SS 2016 – Blatt 8

Prof. Dr. T. Speck, S. Stalter und Assistenten — Abgabe 27.06.2016

Aufgabe 25: Lagrange mit Reibung (*7 Punkte*)

Man kann den Lagrange-Formalismus verallgemeinern und auch nicht-potentielle Kräfte betrachten. Schauen Sie sich noch einmal die Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art an und machen Sie sich klar, dass die verallgemeinerte Reibungskraft

$$R_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{F}_i^{(np)}$$

lautet. Im Folgenden betrachten wir Reibungskräfte der Form $\mathbf{F}_i^{(np)} = -\gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $R_k = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k}$ mit der Rayleighschen Dissipationsfunktion $P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$.

Die Lagrangegleichungen 2. Art lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Konkret betrachten wir jetzt eine Perle auf einer Schraubenlinie mit Radius R und Steigung a (siehe Aufgabe 19) aber diesmal mit Reibung.

(b) (1 Punkt) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.
Erinnerung: $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (R^2 + a^2) + mga\varphi$

(c) (3 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit der Anfangsbedingung, dass die Perle zur Zeit $t = 0$ in der Höhe $z(0) = 0$ ruht und die Zählung des Winkels φ dort mit dem Wert $\varphi(0) = 0$ beginnt.

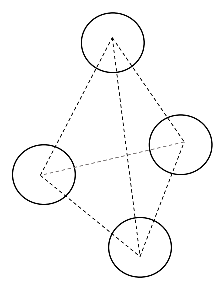
(d) (1 Punkt) Wie lautet $z(t)$?

(e) (1 Punkt) Wie lautet die konstante Grenzgeschwindigkeit v_∞, welche die Perle nach langer Zeit erreicht?

Aufgabe 26: Trägheitstensor (*5 Punkte*)

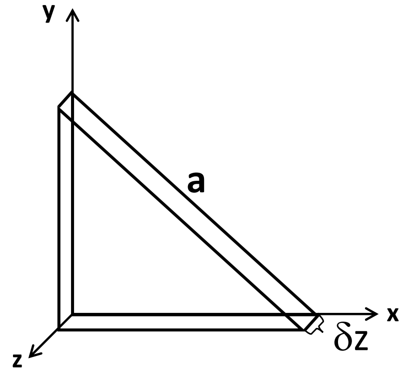
Berechnen Sie den Trägheitstensor für

(a) (3 Punkte) eine Kugel mit Radius R und homogener Masse M, aus der ein Kegel mit Öffnungswinkel $\alpha < \pi/2$ herausgeschnitten wurde. Bestimmen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Mittelpunktes der Kugel, welcher auch der Spitze des Kegels entspricht.



(b) (2 Punkte) vier Kugeln mit Radius r und Masse m. Die Mittelpunkte der Kugeln seien dabei die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge a, wie in der Abbildung zu sehen. Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Schwerpunkt des Tetraeders.

Aufgabe 27: Trägheitsmomente und Satz von Steiner (*8 Punkte*)



Gegeben sei eine unendlich dünne, ebene, homogene Platte von der Form eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks (Hypotenuse a, Masse M, Dicke $\delta z \to 0$). Für eine unendlich dünne Platte gilt dabei die Massendichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \underbrace{\sigma(x,y)}_{Flächendichte} \delta(z)$$

mit der Diracschen Deltadistribution $\delta(z)$.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Komponenten I_{kl} des Trägheitstensors I bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte I_k $(k = 1,2,3)$ des berechneten Trägheitstensors I und geben Sie seine Diagonalform I' an. Berechnen Sie die dazugehörigen drei orthonormierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_j$ (die Hauptachsen).

(c) (2 Punkte) Geben Sie die Matrix A an, welche I auf die Diagonalform I' bringt gemäß

$$\mathsf{I}' = \mathsf{A}\mathsf{I}\mathsf{A}^T.$$

Wie sieht die zugehörige Koordinatentransformation $(x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ aus? Berechnen Sie zur Probe den Trägheitstensor im (x',y',z')-System. Zeigen Sie, dass sich die Spur des Trägheitstensors dabei nicht ändert:

$$\sum_{k=1}^{3} I_{kk} = \sum_{k=1}^{3} I'_{kk}.$$

(d) (2 Punkte) Geben Sie mithilfe des Satzes von Steiner den Trägheitstensor der dreieckförmigen Platte bezüglich des zum (x',y',z')-System achsenparallelen Schwerpunktsystems der Platte an!