Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Ein bisschen Bruchrechnung

Die Aufgaben sollten ohne Taschenrechner gelöst werden. Versuchen Sie daher möglichst frühzeitig zu kürzen!

(a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}$

(b) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(2+\frac{1}{2}\right):\left(-1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}$

(c) $\left[-2^2:\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2\right]^2:\left(-\dfrac{4}{5}\right)^4-\left[-5:\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\right]^3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

(d) $\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{-2+\frac{1}{3}}-\dfrac{-\frac{3}{2}+2^{-3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{7}{12}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)}+\dfrac{108}{35}$

(e) $\left(\dfrac{5}{2^{-1}+3^{-1}}-\dfrac{1}{3^{-1}-4^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2^{-1}-3^{-1}}-\dfrac{7}{3^{-1}+4^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2$

Aufgabe 2: Aussagenlogik

Bilden Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden Ausdrücke:

(a) $p \wedge (p \vee q)$

(b) $(\neg q) \wedge (p \vee q)$

(c) $p \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$

(d) $q \wedge (q \Rightarrow \neg p)$

(e) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$

(b) Das Produkt von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Aufgabe 4: Mengenoperationen

Gegeben seien die Mengen $A = \{2,3,4\}$ und $B = \{4,5,6\}$. Bestimmen Sie die Mengen:

(a) $A \cap B$

(b) $A \cup B$

(c) $A \setminus B$

(d) $A \bigtriangleup B$

(e) $A \times B$

Aufgabe 5: De Morgansche Regeln für Mengenoperationen

Leiten Sie die Gültigkeit der De Morganschen Regeln für Vereinigungs- und Durchschnittsmenge aus den De Morganschen Regeln für Aussagenlogik her.

De Morgansche Regeln für Mengen A, B und M mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$:

(a) $M \setminus (A \cup B) \ = \ (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(b) $M \setminus (A \cap B) \ = \ (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

Aufgabe 6: Gruppen

Ist die Menge der rationalen Zahlen ohne die Null eine Gruppe bezüglich der Multiplikation und warum? Falls ja, handelt es sich um eine abelsche Gruppe?