Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 1 mit Lösungen** 23.03.2020

Aufgabe 1: Ein bisschen Bruchrechnung

Die Aufgaben sollten ohne Taschenrechner gelöst werden. Versuchen Sie daher möglichst frühzeitig zu kürzen!

(a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}$

(b) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(2+\frac{1}{2}\right):\left(-1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}$

(c) $\left[-2^2:\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2\right]^2:\left(-\dfrac{4}{5}\right)^4-\left[-5:\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\right]^3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

(d) $\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{-2+\frac{1}{3}}-\dfrac{-\frac{3}{2}+2^{-3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{7}{12}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)}+\dfrac{108}{35}$

(e) $\left(\dfrac{5}{2^{-1}+3^{-1}}-\dfrac{1}{3^{-1}-4^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2^{-1}-3^{-1}}-\dfrac{7}{3^{-1}+4^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2$

Lösung:

(a) 1

(b) 20

(c) 17

(d) 0

(e) 1

Aufgabe 2: Aussagenlogik

Bilden Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden Ausdrücke:

(a) $p \wedge (p \vee q)$

(b) $(\neg q) \wedge (p \vee q)$

(c) $p \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$

(d) $q \wedge (q \Rightarrow \neg p)$

(e) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p$

Lösung:

(a)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

(b)

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \wedge (p \vee q)$
w	w	f	w	f
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	f	f

(c)

p	q	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$p \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	f

(d)

p	q	$\neg p$	$q \Rightarrow (\neg p)$	$q \wedge (q \Rightarrow (\neg p))$
w	w	f	f	f
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	f	w	f	w

(e)

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p)$
w	w	f	w	f
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	f	w	f	f

Aufgabe 3: Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$

(b) Das Produkt von drei aufeinander folgenden, natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Lösung:

(a) 1. Gültigkeit für $n = 0$: $2 \cdot 0 \;=\; 0 \;=\; 0 \cdot (0+1)$

2. Die Aussage wird als gültig für n angenommen: $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

3. Führe $n+1$ auf n zurück:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k \;=\; \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n+1) \;\stackrel{2.}{=}\; n(n+1) + 2(n+1) \;=\; (n+1)(n+2), \text{ q.e.d.}$$

(b) Behauptung: $n(n+1)(n+2) \;=\; 6 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{N}$

1. Gültigkeit für $n = 0$:

$$0\,(0+1)\,(0+2) \;=\; 0 \;=\; 6 \cdot m \quad \text{mit} \quad m \;=\; 0 \in \mathbb{N}$$

2. Die Aussage wird als gültig für n angenommen:

$$n(n+1)(n+2) \;=\; 6 \cdot m \text{ mit } m \in \mathbb{N}$$

3. Führe $n+1$ auf n zurück:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) &= (n+1)(n+2)n + 3(n+1)(n+2) \\ &\stackrel{2.}{=} 6 \cdot m + 6 \cdot \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= 6 \cdot m_1\end{aligned}$$

mit $m_1 = m + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \in \mathbb{N}$.

Da $(n+1)(n+2)$ immer eine gerade Zahl ist, ist $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \in \mathbb{N}$ und damit auch $m_1 \in \mathbb{N}$ und $(n+1)(n+2)(n+3)$ ebenfalls durch 6 teilbar.

Aufgabe 4: Mengenoperationen

Gegeben seien die Mengen $A = \{2,3,4\}$ und $B = \{4,5,6\}$. Bestimmen Sie die Mengen:

(a) $A \cap B$
(b) $A \cup B$
(c) $A \setminus B$
(d) $A \triangle B$
(e) $A \times B$

Lösung:

(a) $\{4\}$

(b) $\{2,3,4,5,6\}$

(c) $\{2,3\}$

(d) $\{2,3,5,6\}$

(e) $\{(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6)\}$

Aufgabe 5: De Morgansche Regeln für Mengenoperationen

Leiten Sie die Gültigkeit der De Morganschen Regeln für Vereinigungs- und Durchschnittsmenge aus den De Morganschen Regeln für Aussagenlogik her.

De Morgansche Regeln für Mengen A, B und M mit $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$:

(a) $M \setminus (A \cup B) \;=\; (M \setminus A) \;\cap\; (M \setminus B)$
(b) $M \setminus (A \cap B) \;=\; (M \setminus A) \;\cup\; (M \setminus B)$

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned} x \in \neg(A \cup B) &\iff x \notin A \cup B \iff \neg(x \in A \cup B) \iff \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \;\; \text{(De Morgansche Regel für Aussagenlogik)} \\ &\iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\iff (x \in M \setminus A) \wedge (x \in M \setminus B) \\ &\iff x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in \neg(A \cap B) &\iff x \notin A \cap B \iff \neg(x \in A \cap B) \iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \;\; \text{(De Morgansche Regel für Aussagenlogik)} \\ &\iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ &\iff (x \in M \setminus A) \vee (x \in M \setminus B) \\ &\iff x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B). \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gruppen

Ist die Menge der rationalen Zahlen ohne die Null eine Gruppe bezüglich der Multiplikation und warum? Falls ja, handelt es sich um eine abelsche Gruppe?

Lösung:

Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{x \,|\, x = \frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{Z}$ und $p,q \neq 0\}$.

(a) Die Gruppe ist abgeschlossen, d.h. für $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist auch $a \cdot b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(b) Assoziativität ist erfüllt, d.h. $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(c) Das neutrale Element ist $e = 1$: $\frac{p}{q} \cdot e = e \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$

(d) Zu $a = \frac{p}{q}$ existiert immer ein inverses Element $a^{-1} = \frac{q}{p}$ mit $a \cdot a^{-1} = e = 1$.

(e) Für alle $a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot b = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1\,p_2}{q_1\,q_2} = \frac{p_2\,p_2}{q_1\,q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = b \cdot a$.
Die Gruppe ist kommutativ, d.h. es handelt sich um eine abelsche Gruppe.