Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 2 mit Lösungen** 24.03.2020

Aufgabe 1: Skalare und Vektoren

Welche der folgenden Größen sind Skalaren, welche Vektoren?

(a) Beschleunigung
(b) Leistung
(c) Zentrifugalkraft
(d) Geschwindigkeit
(e) Wärmemenge
(f) Impuls
(g) elektrischer Widerstand
(h) magnetische Feldstärke
(i) Atomgewicht

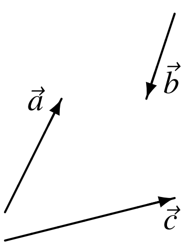
Lösung:

(a) Vektor
(b) Skalar
(c) Vektor
(d) Vektor
(e) Skalar
(f) Vektor
(g) Skalar
(h) Vektor
(i) Skalar

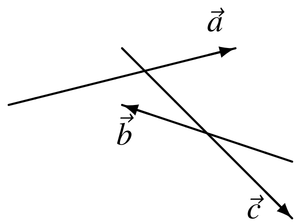
Aufgabe 2: Geometrische Addition und Subtraktion

Zeichnen Sie $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ und $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

(a)



(b)



Aufgabe 3: Operationen in Komponentendarstellung

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

(a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(b) $2\,\vec{a} - \vec{b} + 3\,\vec{c}$

Lösung:

(a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(b) $2\,\vec{a} - \vec{b} + 3\,\vec{c} \;=\; 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 4: Einheitsvektoren

Berechnen Sie jeweils den Einheitsvektor $\vec{e_a}$ in Richtung von $\vec{a}$.

(a) $\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $|\vec{a}| \;=\; \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \;=\; \sqrt{14} \;=\; 3.74$ und $\vec{e_a} \;=\; \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{3.74} \\ -\frac{1}{3.74} \\ \frac{2}{3.74} \end{pmatrix}.$

(b) $|\vec{a}| \;=\; \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \;=\; \sqrt{3} \;=\; 1.73$ und $\vec{e_a} \;=\; \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{1.73} \\ \frac{1}{1.73} \\ \frac{1}{1.73} \end{pmatrix}.$

(c) $|\vec{a}| \;=\; \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3$ und $\vec{e_a} \;=\; \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$

Aufgabe 5: Abstand zweier Punkte

Berechnen Sie den Abstand $|\vec{d}|$ der Punkte $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$.

(a) $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lösung:

Mit $\vec{d} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ erhält man:

(a) $d = |\vec{d}| = \sqrt{\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} = 5.39.$

(b) $d = |\vec{d}| = \sqrt{\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{41} = 6.4.$

Aufgabe 6: Skalarprodukt

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Lösung:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 - 2 + 20 = 15.$

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 + 2 - 10 = 0.$

Aufgabe 7: Winkel zwischen Vektoren

Berechnen Sie den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Lösung:

(a) $\cos(\theta) = -1 \implies \theta = 180°.$

(b) $\cos(\theta) = \frac{2}{3} \implies \theta \simeq 48°.$

Aufgabe 8: Dreiecksungleichung

Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right)$ für Vektoren gilt.

Lösung:

Mit dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α gilt:
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = (a \cdot b \cdot \cos\alpha)^2 = a^2 b^2 \cos^2\alpha = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \cos^2\alpha \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right),$
da $\cos^2\alpha \leq 1$ für alle Winkel α.

Aufgabe 9: Vektorprodukt

Berechnen Sie jeweils das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $\vec{a} = 2\,\vec{e}_x, \quad \vec{b} = -3\,\vec{e}_z.$

(d) $\vec{a} = 4\,\vec{e}_y, \quad \vec{b} = \vec{e}_y.$

Lösung:

Mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ erhält man:

(a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(d) $\vec{c} = \begin{pmatrix} (0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 10: Vektoren in einer Ebene

Wie kann man feststellen, ob drei gegebene Vektoren in einer Ebene liegen?

Lösung:

Die Vektoren liegen in einer Ebene, wenn das Spatprodukt $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$ ist.